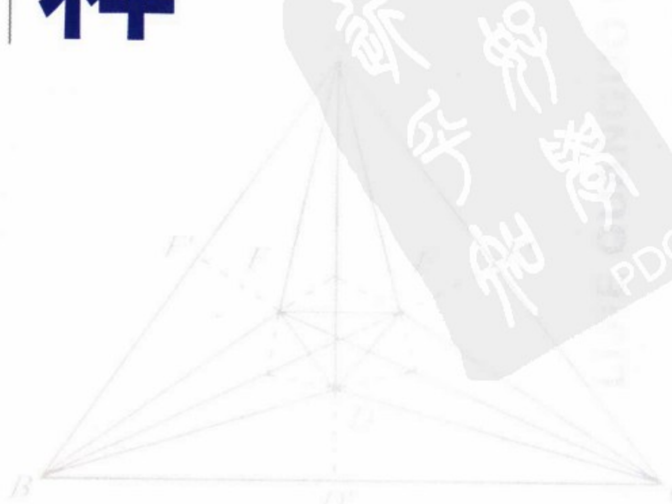
PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

# 走向国际数学奥林匹克的 平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解（下）

$$S_{\triangle z_1z_2z_3} = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|\cdot d = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1z_2} + \overline{z_2z_3} + \overline{z_3z_1}) = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3}\end{vmatrix}$$

主编 沈文选



哈尔滨工业大学出版社

刘培杰
数学工作室

ISBN 978-7-5603-2441-8

9 787560 324418 >

定价 68.00 元(上、下)

上架建议：奥数+几何+科普

ZOUXIANG GUOJI SHUXUE AOLINPIKE DE PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

LIJIE QUANGUO GAOZHONG SHUXUE LIANSAI PINGMIAN JIHE SHITI YITIDUOJIE

# 走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释

## 历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解

## （下）

主　编　沈文选

副主编　杨清桃　步凡　吴凡

哈爾濱工業大學出版社

## 内容提要

全书对1978～2006年间的全国高中数学联赛(包括全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛)、中国数学奥林匹克(CMO,即全国中学生数学冬令营)、中国国家队队员选拔赛中的一百余道平面几何试题进行了诠释,每道试题给出了尽可能多的解法(多的近30种解法)及命题背景,以70个专题讲座的形式对试题所涉及的有关知识或相关背景进行了深入地探讨,揭示了平面几何试题的有关命题途径。该书极大地拓展了读者的视野,可全方位地开启读者的思维,扎实地训练其基本功。该书适合于广大数学爱好者,初、高中数学竞赛选手,初、高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释.下:历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解/沈文选主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2441-8

Ⅰ.走… Ⅱ.沈… Ⅲ.平面几何-高中-解题
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第147214号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 唐蕾
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 总印张55 总字数955千字
版 次 2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2441-8
印 数 1～4 000册
定 价 68.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

# 目　录

第 15 章　1993～1994 年度试题的诠释 …………………… (1)

第 1 节　四边形中的钝角三角形剖分问题 ………………… (17)
第 2 节　特殊多边形的内接正三角形问题 ………………… (23)

第 16 章　1994～1995 年度试题的诠释 ………………… (25)

第 1 节　一个基本图形 …………………………………… (38)
第 2 节　位似变换 ………………………………………… (49)

第 17 章　1995～1996 年度试题的诠释 ………………… (55)

第 1 节　梯形中位线定理推广及应用 ……………………… (73)
第 2 节　从平面解析几何问题到平面几何竞赛题 ………… (79)

第 18 章　1996～1997 年度试题的诠释 ………………… (82)

第 1 节　完全四边形的优美性质(二) ……………………… (104)
第 2 节　一道擂台题与高中联赛题 ………………………… (107)
第 3 节　关于三角形旁切圆的几个命题与问题 ………… (112)

第19章 1997~1998年度试题的诠释 …………………… (127)
第1节 根轴的性质及运用 ………………………………… (140)
第2节 与三角形垂心有关几个命题 ………………………… (146)
第20章 1998~1999年度试题的诠释 …………………… (150)
第1节 过三角形巧合点的直线 …………………………… (175)
第2节 完全四边形的优美性质(三) ……………………… (183)
第21章 1999~2000年度试题的诠释 …………………… (186)
第1节 三角形高上一点的性质及推广 …………………… (193)
第2节 完全四边形的优美性质(四) ……………………… (204)
第3节 梅涅劳斯定理的第二角元形式 …………………… (217)
第22章 2000~2001年度试题的诠释 …………………… (220)
第1节 三角形中共顶点的等角问题 ……………………… (232)
第2节 正三角形的分割三角形问题 ……………………… (240)
第3节 爱尔可斯定理 ……………………………………… (247)
第23章 2001~2002年度试题的诠释 …………………… (253)
第1节 线段垂直的一个充要条件的应用 ………………… (275)
第2节 完全四边形的优美性质(五) ……………………… (282)
第24章 2002~2003年度试题的诠释 …………………… (290)
第1节 含有60°内角的三角形的性质及应用 …………… (320)
第2节 关于平行四边形的几个命题 ……………………… (327)

第 25 章　2003～2004 年度试题的诠释 ……………………（331）

第 1 节　角内切圆的内接四边形的性质及应用 …………（355）
第 2 节　反演变换……………………………………………（357）

第 26 章　2004～2005 年度试题的诠释 ……………………（361）

第 1 节　完全四边形的优美性质(六) ………………………（381）
第 2 节　圆内接四边形的位似形与欧拉线 ………………（396）

第 27 章　2005～2006 年度试题的诠释 ……………………（398）

第 1 节　一道东南赛试题的背景与引申 ……………………（422）
第 2 节　三角形的外接正方形问题…………………………（425）

第 28 章　2006～2007 年度部分试题的诠释 ………………（429）

第 1 节　图形中共顶点的相等线段问题 ……………………（438）
第 2 节　三角形的外接正三角形的面积最大、最小问题 …（444）

# 第15章 1993 ~ 1994年度试题的诠释

**试题A1** 设一凸四边形 $ABCD$,它的内角中仅有 $\angle D$ 是钝角,用一些直线段将该凸四边形分成 $n$ 个钝角三角形,但除去 $A$、$B$、$C$、$D$ 外,在该凸四边形的周界上,不含分割出的钝角三角形顶点,试证 $n$ 应该满足的充分必要条件是 $n \geqslant 4$.

**证法1** 设凸四边形 $ABCD$ 中仅有 $\angle D$ 是钝角.

充分性.

先证:非钝角三角形可分割成三个钝角三角形.事实上,取锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 $B$,或 Rt$\triangle ABC$ 的直角顶点 $B$,向对边 $AC$ 作高 $BG$.以 $AC$ 为直径向三角形内作半圆,于是 $BG$ 上位于该半圆内的任意点 $E$ 与 $\triangle ABC$ 三顶点连线将 $\triangle ABC$ 剖分成三个钝角三角形 $\triangle ABE$、$\triangle BCE$、$\triangle CAE$.

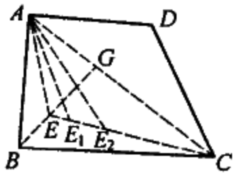


图15.1

(i) 如图15.1,联结 $AC$,由上知 $\triangle ABC$ 可剖分成三个钝角三角形,连同钝角 $\triangle ACD$,凸四边形 $ABCD$ 可剖分成4个钝三角形.

(ii) 如图15.1,在(i)的基础上,作 $AE_1$、$AE_2$、…,即得新的剖分的钝角 $\triangle AEE_1$、$\triangle AE_1E_2$、…(…$\angle AE_2C > \angle AE_1C > \angle AEC > 90°$),凸四边形 $ABCD$ 可剖分为 $n = 5,6,\cdots$ 个钝角三角形.

必要性.

先证:非钝角三角形不能剖分成两个钝角三角形.因为由三角形任一顶点向对边作剖分线段,顶角经剖分不能得钝角,而剖分线段与对边的夹角不能将180°角分成两个钝角,所以非钝角三角形不能剖分成两个钝角三角形.

今设凸四边形已被剖分为 $n$ 个钝角三角形.如果该凸四边形的4条边分别属于4个不同的钝角三角形,则已有 $n \geqslant 4$.如果有两条邻边同属于一个钝角三角形(不相邻的两条边不能构成三角形),这时只能是下列两种情况之一:

(i) 该两邻边夹角为钝角 $\angle D$,这时 $AC$ 必为剖分线.因而非钝角 $\triangle ABC$ 必被再剖分,只能剖分成3个或3个以上的钝角三角形,连同钝角 $\triangle ADC$,有 $n \geqslant 4$.

(ii) 该两邻边夹角不是 $\angle D$,这时夹角不能是 $\angle B$,因为 $\triangle ABC$ 不是钝角

三角形,因而 $BD$ 是剖分线,并将 $\angle D$ 剖分出一个钝角来,使得上述两邻边作为该钝角三角形的两条边.另一部分为非钝角三角形,它必剖分成3个或3个以上的钝角三角形,故 $n \geqslant 4$.

**证法 2** 充分性:如图 15.2,作对角线 $AC$,则由题设知,$\triangle ADC$ 是钝角三角形,$\triangle ABC$ 是非钝角三角形,取 $\triangle ABC$ 的费马点 $E$,则

$$\angle AEB = \angle BEC = \angle CEA = 120^\circ$$

这就把四边形 $ABCD$ 剖分成4个钝角三角形:$\triangle ADC$、$\triangle AEB$、$\triangle BEC$、$\triangle CEA$.

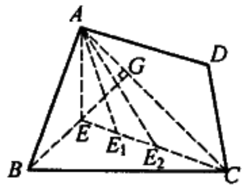


图 15.2

再在 $CE$ 边上取点 $E_1$、$E_2$、…,又可把 $\triangle AEC$ 剖分成2,3,… 个钝角三角形 $\triangle AEE_1$、$\triangle AE_1E_2$、….这就把四边形分成了 $n = 5,6,\cdots$ 个钝角三角形.

必要性:易证明一个非钝角三角形不能剖分成2个钝角三角形.



假设已经作出了 $n$ 个钝角三角形的剖分.考虑 $CD$ 边,设它属于已剖分的钝角三角形 $\triangle ECD$,如图 15.3 所示,若 $E$ 为点 $B$,由于 $\triangle BCD$ 为钝角三角形,只有 $\angle BDC$ 为钝角(已设 $\angle D$ 为钝角),从而 $\angle BDA$ 为锐角,$\triangle BDA$ 为非钝角三角形.它不能剖分成2个而只能剖分成3个以上的钝角三角形.连同 $\triangle BCD$,有 $n \geqslant 4$.若 $E$ 为点 $A$,则 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形,同理可知 $n \geqslant 4$.

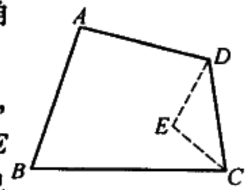


图 15.3

**注** (1)对于不熟悉费马点的人,充分性中的点 $E$ 可以这样选取:以 $AC$ 为直径向 $\triangle ABC$ 内作半圆,在高 $BG$(图 15.1)上取位于半圆内的任一点作为点 $E$.必要性也可以通过分别证明四边形 $ABCD$ 不可能分成 $n = 1,2,3$ 个钝角三角形而得证.

(2)该试题命制背景①:该试题经历了很长时间的讨论才得以形成.原始命题十分简洁优美,但难度太大.原始命题是:“用若干直线要将正方形分剖为若干部分,称为割分,试证明正方形被剖分成 $n$ 个钝角三角形的充分必要条件是 $n \geqslant 6$.”

---

① 李名德,王祖樾.一九九三年全国高中数学联赛某些试题的引申与推广[J].中学教研(数学),1993(12):29-33.

**证明**　充分性：将正方形按对角线剖分，得两个直角三角形，每个直角三角形可剖分成三个钝角三角形．于是一正方形可剖分成 6 个钝角三角形，如果将一直角三角形先剖分出一个钝角三角形，余下的直三角形再剖分出三个钝角三角形．这样正方形可剖分成 7 个钝角三角形．类似对 8，9，… 均可作出．如图 15.4 所示．

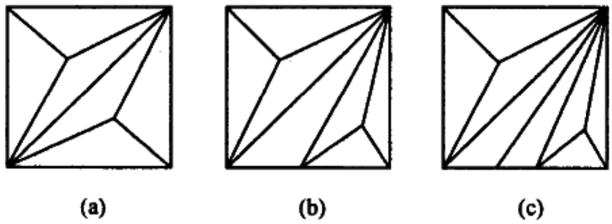



图 15.4

因此，对于任何大于等于 6 的 $n$，均可将正方形剖分成 $n$ 个钝角三角形．充分性证毕．

必要性：为简述起见，一个正方形剖分成若干钝角三角形，称为“钝角剖分”．

现设正方形已作出了钝角剖分，我们证明所剖分出的钝角三角形个数必大于等于 6.

显然，正方形四个直角顶角，必须都被剖分，否则有直角三角形而非钝角剖分了．四直角剖分必在正方形内部相交，得到“剖分点”．剖分点之间的线段称为“剖分线”．

(1) 正方形不存在“仅有一个内部剖分点”的钝角剖分．

我们反证之．设仅有的一个内部剖分点为 $E$，如图15.5所示，则剖分四直角顶角的剖分线必交于点 $E$．显然在点 $E$ 处至少有一个非钝角，不妨设 $\angle AEB$，则 $\triangle AEB$ 为非钝角三角形．若过点 $E$ 再行剖分，比如引剖分线 $EF$（$F$ 是 $AB$ 边上的新剖分点），则含高 $EG$ 的 $\triangle AEF$ 必是锐角或直角三角形，因此无论怎样剖分，在内部剖分点仅有一个的条件下，不能实现剖分．

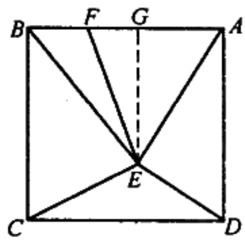



图 15.5

(2) 设正方形内部剖分点的个数大于等于 2.

(i) 设 $AB$、$CD$ 边上除 $A$、$B$、$C$、$D$ 外没有新的剖分点．

由于已完成了对正方形的钝角剖分，所以 $AB$ 应属于某个钝角三角形，设为 $\triangle AEB$．同样，$CD$ 应属于某个钝角三角形，设为 $\triangle CFD$．如图 15.6 所示．

由于 $E$ 处对 $AB$ 所张的角为钝角，所以点 $E$ 在以 $AB$ 为直径的半圆内．类似，$F$ 在以 $CD$ 为直径的半圆内．这样 $\triangle AEB$、$\triangle CFD$ 分离在两个内部不相交的半圆内，这两个三角形相互分离而不相交．

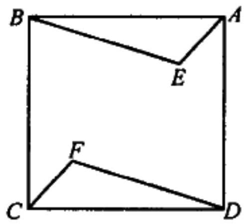



图 15.6

边 $AE$ 或者边 $AE$ 的一段，应属于异于 $\triangle AEB$ 的一个被剖分出的钝角三角形．类似讨论 $BE$．于是由 $\triangle AEB$ 至少找出了三个剖分的钝角三角形．对 $\triangle CFD$ 同样讨论，又得三个不同的剖分钝角三角形．

如果这六个钝角三角形互不相同，我们就证明了 $n \geqslant 6$．但 $BE$ 与 $CF$，$AE$ 与 $CF$ 或 $BE$ 与 $DF$，$AE$ 与 $DF$ 共剖分三角形的情况还是可能的，我们证明在这种情形下，也仍有 $n \geqslant 6$．

$BE$ 与 $CF$ 共剖分三角形的可能情况有三种，如图 15.7 所示．

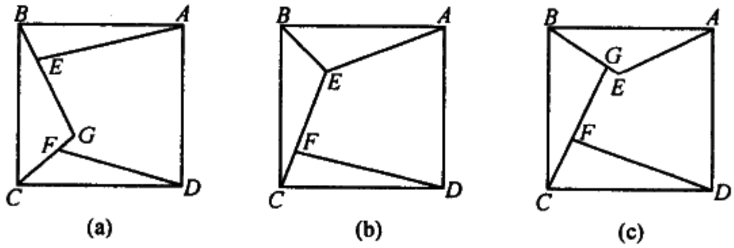



图 15.7

情况(a)．五边形 $AEGFD$ 不能剖分成两个钝角三角形．因为若能剖分，只能 $E$、$G$、$D$(或 $A$、$F$、$G$) 共线，此时 $\triangle AED$($\triangle AFD$) 不可能是钝角三角形．五边形 $AEGFD$ 剖分成钝角三角形时剖分数大于等于 3，故 $n \geqslant 6$．

情况(b)．四边形 $AEFD$ 中只有 $\angle AEF$ 是钝角，用它的对角线分成的两个三角形至少有一个不是钝角三角形，所以它剖成钝角三角形的剖分数也不小于 3，故 $n \geqslant 6$．

情况(c)．五边形 $AEGFD$ 不能剖分成两个钝角三角形．因为五边形 $AEGFD$ 可剖成两个三角形只当 $A$、$E$、$F$(或 $D$、$E$、$G$) 共线时，若 $A$、$E$、$F$ 共线，用 $AF$ 剖分成两个三角形，$\triangle AFD$ 和 $\triangle EFG$ 中，由于 $\angle BGC$、$\angle CFD$、$\angle AEB$ 为钝角，故 $\triangle EFG$ 为锐角三角形，不是钝角三角形剖分．同样，若 $D$、$E$、$G$ 共线，用 $DG$ 剖分五边形，得到的 $\triangle DFG$ 也不可能是钝角三角形，所以也有 $n \geqslant 6$．

$AE$ 与 $CF$ 共剖分三角形的情形，只可能对角线为剖分线，如图 15.8 所示．

当对角线为剖分线时，对角线将正方形 $ABCD$ 剖成两个直角三角形，而每

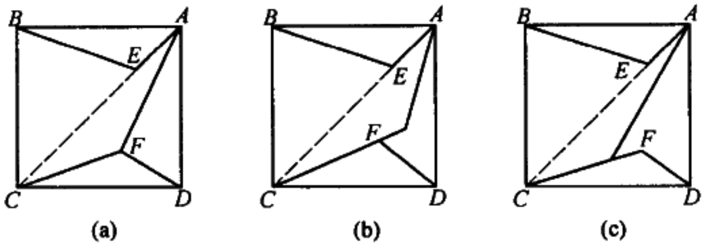



图 15.8

个直角三角形要剖分成钝角三角形剖分数至少为 3,故 $n \geqslant 6$.

$BE$ 与 $FD$, $AE$ 与 $FD$ 共剖分三角形时,证明类似.

(ii) 正方形 $ABCD$ 的边界上还有新的剖分点,若边界上新剖分点至少有两个,则周界被分成至少六段,且每段(或其部分)分别属于不同的剖分三角形.故 $n \geqslant 6$.

若边界上只有一个新的剖分点,则边界被分成五段,由这五段可以找到五个互不相同的剖分三角形.故剖分数大于等于 5.若剖分数为 5,只可能五个三角形有共同顶点 $O$(图 15.9),与内部剖分点数大于等于 2 矛盾.所以 $n \geqslant 6$.

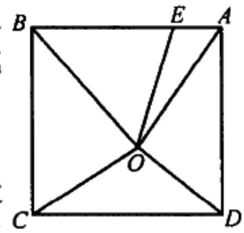



图 15.9

(关于正方形剖分的上述简洁优美命题,由徐士英(浙江师大)提出,并由徐士英、王祖樾(杭州电子工业学院)共同合作完成证明.命题组集体讨论了许多降低难度的方案.现在的命题形式是由过伯祥(舟山师专)提出的.)

**试题 A2**　水平直线 $m$ 通过圆 $O$ 的中心,直线 $l \perp m$, $l$ 与 $m$ 相交于点 $M$,点 $M$ 在圆心的右侧.直线 $l$ 上不同的三点 $A$、$B$、$C$ 在圆外,且位于直线 $m$ 上方,点 $A$ 离点 $M$ 最远,点 $C$ 离点 $M$ 最近, $AP$、$BQ$、$CR$ 为圆 $O$ 的三条切线, $P$、$Q$、$R$ 为切点.试证:

(1) $l$ 与圆 $O$ 相切时, $AB \cdot CR + BC \cdot AP = AC \cdot BQ$.

(2) $l$ 与圆 $O$ 相交时, $AB \cdot CR + BC \cdot AP < AC \cdot BQ$.

(3) $l$ 与圆 $O$ 相离时, $AB \cdot CR + BC \cdot AP > AC \cdot BQ$.

**证法 1**　设圆半径为 $r$, $OM = x$, $AM = a$, $BM = b$, $CM = c\ (a > b > c > 0)$.易算得

$$AM^2 + OM^2 - OP^2 = AP^2$$

故有
$$AP^2 = a^2 + x^2 - r^2 = a^2 + t\ (\text{令 } t = x^2 - r^2)$$

$$AP = \sqrt{a^2 + t}$$

同理
$$BQ = \sqrt{b^2 + t}, CR = \sqrt{c^2 + t}$$

令
$$G=(AB\cdot CR+BC\cdot AP)^2-(AC\cdot BQ)^2$$
则
$$\begin{aligned}G=&[(a-b)\sqrt{c^2+t}+(b-c)\sqrt{a^2+t}]^2-(a-c)^2(b^2+t)=\\&[(a-b)\sqrt{c^2+t}+(b-c)\sqrt{a^2+t}]^2-[(a-b)+(b-c)]^2(b^2+t)=\\&(a-b)^2(c^2+t)+(b-c)^2(a^2+t)+2(a-b)(b-c)\sqrt{c^2+t}\sqrt{a^2+t}-\\&(a-b)^2(b^2+t)-(b-c)^2(b^2+t)-2(a-b)(b-c)(b^2+t)=\\&-(a-b)^2(b^2-c^2)+(b-c)^2(a^2-b^2)+\\&2(a-b)(b-c)[\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}-b^2-t]=\\&(a-b)(b-c)[-(a-b)(b+c)+(a+b)(b-c)+\\&2\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}-2b^2-2t]=\\&2(a-b)(b-c)[-(ac+t)+\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}]\end{aligned}$$

相切时,有 $x=r$,从而 $t=0,G=0$,式(1)成立.

相交时,$0<x<r$,于是 $t<0$,又点 $C$ 在圆外,故 $x^2+c^2>r^2,t=x^2-r^2>-c^2>-a^2$,从而 $G$ 式中根号内为正数,且 $ac+t>0$.于是通过两端平方及 $t<0$,可验证 $\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}<ac+t$,即 $G<0$.式(2)成立.

相离时,$x>r$,于是 $t>0$,同样可验证 $G>0$,式(3)成立.



**证法 2**

(1) 相切如图 15.10 所示.

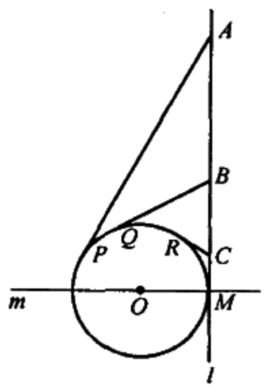


图 15.10

由圆的切线定理,可知 $AP=AM,BQ=BM,CR=CM$.于是欲证之(1)式成为
$$AB\cdot CM+BC\cdot AM=AC\cdot BM \qquad (1')$$
由于 $AM=AB+BC+CM$,(1′)之左方等于
$$\begin{aligned}&AB\cdot CM+BC(AB+BC+CM)=\\&(AB+BC)(BC+CM)=AC\cdot BM\end{aligned}$$
因此式(1′)成立.

(2) 相交如图 15.11 所示.

由圆切割线定理,有
$$AP^2=AD\cdot AE,BQ^2=BD\cdot BE,CR^2=CD\cdot CE$$
故
$$\begin{aligned}G=&(AB\cdot CR+BC\cdot AP)^2-(AC\cdot BQ)^2=\\&AB^2\cdot CR^2+BC^2\cdot AP^2-AC^2\cdot BQ^2+\\&2AB\cdot BC\cdot CR\cdot AP=AB^2\cdot CD\cdot CE+\end{aligned}$$

$$BC^2 \cdot AD \cdot AE - AC^2 \cdot BD \cdot BE +$$
$$2AB \cdot BC\sqrt{AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE}$$

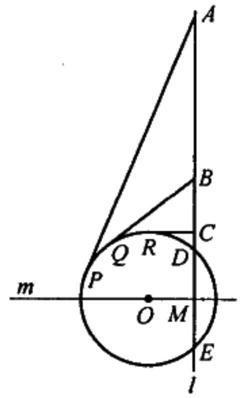



图 15.11

类似(1′),可得

$$AB \cdot CE + BC \cdot AE = AC \cdot BE$$

于是
$$\begin{aligned} G = & AB \cdot CD(AC \cdot BE - BC \cdot AE) + \\ & BC \cdot AD(AC \cdot BE - AB \cdot CE) - \\ & AC \cdot BD(AB \cdot CE + BC \cdot AE) + \\ & 2AB \cdot BC\sqrt{AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE} \end{aligned}$$

类似(1′),又有

$$BC \cdot DE + CD \cdot BE = BD \cdot CE$$
$$AB \cdot DE + BD \cdot AE = AD \cdot BE$$

故

$$\begin{aligned} G = & AB \cdot AC(CD \cdot BE - BD \cdot CE) + AC \cdot BC(AD \cdot BE - BD \cdot AE) - \\ & AB \cdot BC(CD \cdot AE + AD \cdot CE - 2\sqrt{CD \cdot AE \cdot AD \cdot CE}) = \\ & AB \cdot AC(-BC \cdot DE) + AC \cdot BC(AB \cdot DE) - \\ & AB \cdot BC(\sqrt{CD \cdot AE} + \sqrt{AD \cdot CE})^2 < 0 \end{aligned}$$

(3) 相离如图 15.12 所示.

我们设法将 $AP$、$BQ$、$CR$ 这些线段汇集在一个三角形中.

易知

$$AP^2 = AM^2 + OM^2 - OP^2$$

再由点 $M$ 向圆 $O$ 作切线 $MS$,点 $S$ 为切点,并在直线 $m$ 上取点 $T$,使 $MT = MS$.于是

$$AP^2 = AM^2 + OM^2 - OS^2 = AM^2 + MS^2 =$$
$$AM^2 + MT^2 = AT^2$$

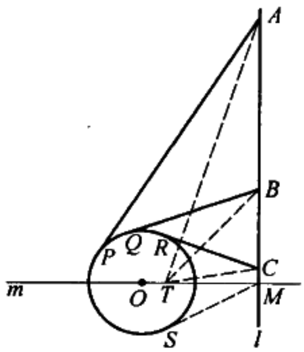



图 15.12

从而 $AP = AT$.同理 $BQ = BT$,$CR = CT$.

在 $\triangle ATC$ 中,如图 15.13 所示,我们证明

$$AB \cdot CT + BC \cdot AT > AC \cdot BT$$

事实上,如图作辅助线使 $\angle TCD = \angle TBA$,$\angle BAD = \angle BTA$,于是 $\triangle TCD \backsim \triangle TBA$,$\triangle TCB \backsim \triangle TDA$.从而

$$AB \cdot CT = CD \cdot BT, BC \cdot AT = DA \cdot BT$$

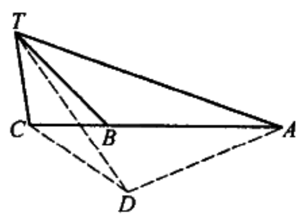



图 15.13

$$AB\cdot CT+BC\cdot AT=CD\cdot BT+DA\cdot BT=(CD+DA)BT>AC\cdot BT$$

将 $AP=AT,BQ=BT,CR=CT$ 代入,即得

$$AB\cdot CR+BC\cdot AP>AC\cdot BQ$$

**证法 3** (由葛洲坝六中姚季新给出)在上述证法 2 中,(1) 的证明较易,(2)、(3) 的证明难度大一些.下面的证法,其实(2) 和(3) 都可通过技术性处理转化为下列命题:

若 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$,则有

$$\sin(\gamma-\alpha)<\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta) \qquad (*)$$

我们先来看其中的(2),若直线 $l$ 与圆 $O$ 相交,证明

$$AB\cdot CR+BC\cdot AP<AC\cdot BQ$$

设直线 $l$ 与圆 $O$ 的交点为 $D$、$E$,以 $M$ 为圆心,以 $MD$ 为半径作圆 $M$,并设圆 $M$ 的半径为



$r(r=MD)$,过点 $A$、$B$、$C$ 分别作圆 $M$ 的切线 $AP'$,$BQ'$,$CR'$($P'$、$Q'$、$R'$ 为切点),如图 15.14 所示.

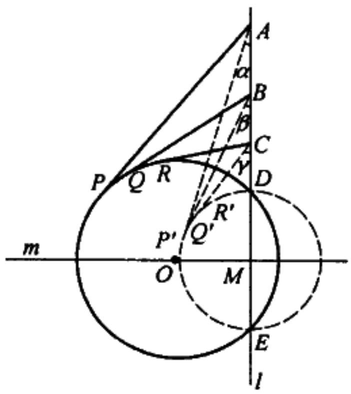



图 15.14

由 $AP^2=AD\cdot AE,AP'^2=AD\cdot AE$,于是 $AP'=AP$,同理有 $BQ'=BQ,CR'=CR$.

又设$\angle MAP'=\alpha,\angle MBQ'=\beta,\angle MCR'=\gamma$,则有 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$,这时

$$AB\cdot CR=(AM-BM)CR'=r(\csc\alpha-\csc\beta)r\cot\gamma=\frac{r^2(\sin\beta-\sin\alpha)\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

同理

$$BC\cdot AP=\frac{r^2(\sin\gamma-\sin\beta)\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$AC\cdot BQ=\frac{r^2(\sin\gamma-\sin\alpha)\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

欲证 $AB\cdot CR+BC\cdot AP<AC\cdot BQ$,只要证

$$(\sin\beta-\sin\alpha)\cos\gamma+(\sin\gamma-\sin\beta)\cos\alpha<(\sin\gamma-\sin\alpha)\cos\beta$$

移项并用差角的正弦公式即化为

$$\sin(\gamma-\alpha)<\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)$$

这就化为命题($*$)的结论.

其中的(3)为若直线 $l$ 与圆 $O$ 相离，证明：$AB\cdot CR+BC\cdot AP>AC\cdot BQ$.如图15.15所示.

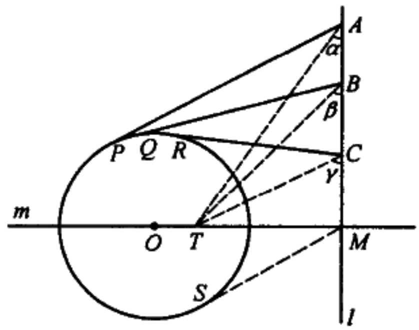



图15.15

过点 $M$ 引圆 $O$ 的切线 $MS$($S$ 为切点).则因为

$$AP^2=AO^2-OP^2=AM^2+MO^2-OS^2=AM^2+MS^2$$

在 $MO$ 上截取 $MT=MS$，则 $AP^2=AM^2+MT^2=AT^2$，于是 $AT=AP$，同理可得 $BT=BQ$，$CT=CR$.

又设 $\angle MAT=\alpha$，$\angle MBT=\beta$，$\angle MCT=\gamma$，则有 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$，并设 $MT=a$，那么

$$AB\cdot CR=(AM-BM)CT=a(\cot\alpha-\cot\beta)a\csc\gamma=\frac{a^2\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

同理

$$BC\cdot AP=\frac{a^2\sin(\gamma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$AC\cdot BQ=\frac{a^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

欲证 $AB\cdot CR+BC\cdot AP>AC\cdot BQ$，即只要证

$$\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)>\sin(\gamma-\alpha)$$

这还是命题(*)的结论.

这样不管直线 $l$ 与圆 $O$ 是相交还是相离，不同两类问题的结论都成立，通过处理、转化，化归为同一个命题(*)的证明.这是数学命题证明的一种常用方法，也是研究数学问题中的一种比较理想的思考方法.

下面仅剩下命题(*)的证明，事实上，由 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$，有

$$0\leqslant\left|\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|<\frac{\gamma-\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$$

由余弦函数在 $[0,\frac{\pi}{4})$ 内为减函数，有

$$\cos\left|\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|>\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

即

$$\cos\left(\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)>\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

又 $\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}>0$,有

$$2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\left(\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)>2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

利用积化和差公式即得

$$\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)>\sin(\gamma-\alpha)$$

这就完成了我们的证明.

下面的两种证法由罗增儒教授给出①.

为了行文的方便,设 $MA=a,MB=b,MC=c(a>b>c>0),OM=x>0$,圆半径为 $r,d=x^2-r^2$.则

$$AP=\sqrt{AO^2+OP^2}=\sqrt{AM^2+OM^2-OP^2}=\sqrt{a^2+x^2-r^2}=\sqrt{a^2+d}$$

$$BQ=\sqrt{b^2+d}$$

$$CR=\sqrt{c^2+d}$$



**证法4** 将求证式转化为确定 $I$ 的符号.作差

$$\begin{aligned}I&=AB\cdot CR+BC\cdot AP-AC\cdot BQ=\\&(a-b)\sqrt{c^2+d}+(b-c)\sqrt{a^2+d}-(a-c)\sqrt{b^2+d}=\\&(b-c)(\sqrt{a^2+d}-\sqrt{b^2+d})-(a-b)(\sqrt{b^2+d}-\sqrt{c^2+d})=\\&\frac{(b-c)(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{(a-b)(b^2-c^2)}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}\end{aligned}\qquad①$$

(1)$l$ 与圆 $O$ 相切时,$d=0,I=0$,命题成立.

(2)$l$ 与圆 $O$ 相交时,$d<0$,由 $a>b>c>0$ 知

$$\frac{c^2}{c^2+d}>\frac{b^2}{b^2+d}>\frac{a^2}{a^2+d}>1$$

有

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}>\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}>1$$

得

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}>\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}>\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}>$$
$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}$$

---

① 罗增儒.1993年高中联赛最后一题新解[J].中等数学,1994(1):14-15.

代入①,得

$$I=(a-b)(b-c)\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}\right)<0$$

(3)$l$ 与圆 $O$ 相离时,$d>0$,由 $a>b>c>0$,知

$$0<\frac{c^2}{c^2+d}<\frac{b^2}{b^2+d}<\frac{a^2}{a^2+d}<1$$

有
$$0<\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}<\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}<1$$

得
$$\frac{c}{\sqrt{c^2+d}}<\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}<\frac{b}{\sqrt{b^2+d}}<$$
$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+d}}$$

代入①,得

$$I=(a-b)(b-c)\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+d}+\sqrt{b^2+d}}-\frac{b+c}{\sqrt{b^2+d}+\sqrt{c^2+d}}\right)>0$$



**证法 5**　(1)$l$ 与圆 $O$ 相切时,$d=0$,可直接验证.

(2)$l$ 与圆 $O$ 相交时,$d<0$.作三角变换

$$AM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\alpha},BM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\beta},CM=\frac{\sqrt{|d|}}{\cos\gamma}$$

其中
$$0<\gamma<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

则有
$$AP=\sqrt{|d|}\tan\alpha,AP^2=AM^2-|d|$$
$$BQ=\sqrt{|d|}\tan\beta$$
$$CR=\sqrt{|d|}\tan\gamma$$

从而

$$\begin{aligned}I=&(AM-BM)CR+(BM-CM)AP-(AM-CM)BQ=\\&AM(CR-BQ)+BM(AP-CR)+CM(BQ-AP)=\\&|d|\left(\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{\cos\alpha}+\frac{\tan\alpha-\tan\gamma}{\cos\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\cos\gamma}\right)=\\&\frac{d[\sin(\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\alpha-\beta)]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}= \quad ①\\&\frac{d\left[2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}-\sin(\alpha-\gamma)\right]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\end{aligned}$$

$$\frac{2d\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$\frac{4d\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}<0(d<0) \qquad ②$$

得
$$AB\cdot CR+BC\cdot AP<AC\cdot BQ$$

(3) 当 $l$ 与圆 $O$ 相离时,$d>0$. 作三角变换

$$AM=\sqrt{d}\tan\alpha, BM=\sqrt{d}\tan\beta, CM=\sqrt{d}\tan\gamma$$

其中
$$0<\gamma<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

则有
$$AP=\frac{\sqrt{d}}{\cos\gamma}, BQ=\frac{\sqrt{d}}{\cos\beta}, CR=\frac{\sqrt{d}}{\cos\alpha}$$

从而
$$I=(AM-BM)CR+(BM-CM)AP-(AM-CM)BQ=$$

$$d\left(\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{\cos\alpha}+\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\cos\gamma}+\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{\cos\beta}\right)=$$

$$\frac{d[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\gamma)]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$



这与上面式 ① 完全一样,也可得式 ②,从而由 $d>0$ 推出 $I>0$,得

$$AB\cdot CR+BC\cdot AP>AC\cdot BQ$$

注　此题实质上是梁绍鸿先生的《初等数学复习及研究》(平面几何)一书中总复习题第 62 题,此题还被收入《华罗庚数学奥林匹克学校试题解析》(高三部分)(大百科全书出版社出版).

**试题 B**　设 $ABCD$ 是一个梯形($AB\parallel CD$),$E$ 是线段 $AB$ 上一点,$F$ 是线段 $CD$ 上一点,线段 $CE$ 与 $BF$ 相交于点 $H$,线段 $ED$ 与 $AF$ 相交于点 $G$. 求证:$S_{EHFG}\leqslant\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果 $ABCD$ 是一个任意四边形,同样结论是否成立?请说明理由.

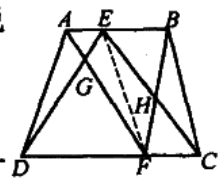



图 15.16

此题有人指出[①]:结论中的等号不能成立.

如图 15.16,联结 $EF$,因 $AE\parallel DF$,故 $S_{\triangle EGF}=S_{\triangle AGD}$,且 $AG:GF=EG:GD$. 设 $AG:GF=k$,则

① 刘久松. 对 1994 年中国数学奥林匹克第一题的修正[J]. 中学数学,1994(10):34.

$$S_{\triangle AGE} = k \cdot S_{\triangle EGF}, S_{\triangle DGF} = \frac{1}{k} \cdot S_{\triangle EGF}$$

则

$$S_{ADFE} = S_{\triangle ADG} + S_{\triangle DGF} + S_{\triangle EGF} + S_{\triangle AGE} = 2S_{\triangle EGF} + (k + \frac{1}{k})S_{\triangle EGF}$$

由 $k + \frac{1}{k} \geqslant 2$，知

$$S_{ADFE} \geqslant 4S_{\triangle EGF} \quad ①$$

同理

$$S_{BEFC} \geqslant 4S_{\triangle EHF} \quad ②$$

①、② 两式相加，得 $S_{ABCD} \geqslant 4S_{EHFG}$，即

$$S_{EHFG} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD} \quad ③$$

下面说明式 ① 与式 ② 中的等号不可能同时成立，亦即题目中的结论不能取等号.

式 ① 中等号成立等价于 $k = 1$，即 $EF \parallel AD$. 同理，式 ② 中等号成立等价于 $EF \parallel BC$. 故 ①、② 两式等号同时成立时必有 $AD \parallel EF \parallel BC$，这与 $ABCD$ 是梯形相矛盾. 故结论应改为 $S_{EHFG} < \frac{1}{4}S_{ABCD}$.



**证法 1**　如图 15.16，联结 $EF$，在梯形 $AEFD$ 中，显然有

$$\sin\angle AGD = \sin\angle DGF = \sin\angle EGF = \sin\angle AGE \quad ①$$

$$S_{\triangle AGD} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG} = S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEG} = S_{\triangle EGF} \quad ②$$

由 ① 和 ②，有

$$(S_{\triangle EGF})^2 = S_{\triangle EGF} \cdot S_{\triangle AGD} = (\frac{1}{2}EG \cdot GF\sin\angle EGF)(\frac{1}{2}AG \cdot GD\sin\angle AGD) = (\frac{1}{2}EG \cdot AG\sin\angle AGE)(\frac{1}{2}GF \cdot GD\sin\angle DGF) = S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DGF} \quad ③$$

由 ② 和 ③，有

$$S_{AEFD} = S_{\triangle AGE} + S_{\triangle EGF} + S_{\triangle DGF} + S_{\triangle AGD} = 2S_{\triangle EGF} + (S_{\triangle AGE} + S_{\triangle DGF}) \geqslant 2S_{\triangle EGF} + 2\sqrt{S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DGF}} = 4S_{\triangle EGF} \quad ④$$

类似，有

$$S_{BEFC} \geqslant 4S_{\triangle EHF} \quad ⑤$$

④加⑤再乘以$\frac{1}{4}$有

$$\frac{1}{4}S_{ABCD} > S_{EHFG}\text{(因④、⑤两式等号不同时取得)} \quad ⑥$$

对于后半题,如果 $ABCD$ 是一个任意凸四边形,结论不一定成立.反例如:如图 15.17,作一个梯形 $ABCD$, $BC // AD$. $AD=1$, $BC=100$,梯形高 $h=100$.在 $AB$ 上取一点 $E$,作 $EF // BC$,交线段 $CD$ 于点 $F$.已知线段 $EF$ 与 $BC$ 之间的距离为 1,则

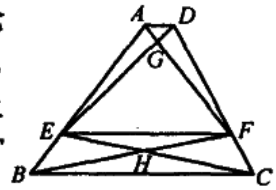


图 15.17

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)h=5\ 050$$

$$EF=\frac{1}{100}(99BC+AD)=99.01$$

点 $G$ 到线段 $EF$ 的距离记为 $h^*$,显然

$$\frac{h^*}{99-h^*}=\frac{EF}{AD}=99.01$$



从而
$$h^*=\frac{99\times 99.01}{100.01}$$

那么
$$S_{EHFG}>S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}EF\cdot h^*=$$
$$\frac{99\times(99.01)^2}{200.02}>\frac{1}{4}\times 5\ 050=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

**证法2** 如图 15.18,联结 $EF$,过点 $H$ 作 $P_1P_2 // FC$,交 $EF$ 于点 $P_1$,交 $BC$ 于点 $P_2$,过点 $G$ 作 $P_3P_4 // DF$,交 $EF$ 于点 $P_4$,交 $AD$ 于点 $P_3$,由第6章第1节中定理的推论,可推知

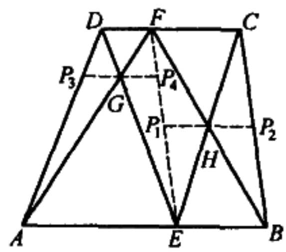


图 15.18

$$S_{\triangle FP_1H}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle EFC}, S_{\triangle EP_1H}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle EFB}$$

又
$$S_{\triangle EFB}=S_{\triangle CEB}$$

则
$$S_{\triangle EP_1H}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle CEB}$$

则

$$S_{\triangle FP_1H}+S_{\triangle EP_1H}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle EFC}+\frac{1}{4}S_{\triangle CEB}=\frac{1}{4}S_{EBCF} \quad ①$$

同理

$$S_{\triangle FGP_4}+S_{\triangle EGP_4}\leqslant\frac{1}{4}S_{AEFD} \quad ②$$

① + ② 便得
$$S_{EHFG}\leqslant\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

由于 ①、② 中的等号不能同时成立，故

$$S_{EHFG}<\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

对于后半题，同证法 1.

**证法 3**　如图 15.19，联结 $EF$，记 $S_{\triangle EFH}=S_1$，$S_{\triangle FHC}=S_2$，$S_{\triangle CHB}=S_3$，$S_{\triangle BHE}=S_4$，$S_{\triangle EFG}=S'_1$.

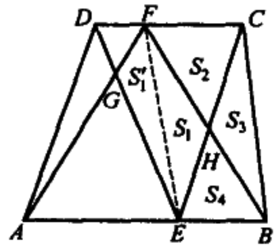



图 15.19

$ABCD$ 是梯形（$AB\ /\!/\ CD$）.

由第 1 章第 4 节定理 6 推论 3，有

$$S_1+S_3\leqslant S_2+S_4$$

即
$$2(S_1+S_3)\leqslant S_1+S_2+S_3+S_4$$

而
$$S_1=S_3$$

则
$$4S_1\leqslant S_{EBCF}$$

即
$$S_1\leqslant\frac{1}{4}S_{EBCF}$$

同理
$$S'_1\leqslant\frac{1}{4}S_{AEFD}$$

故
$$S_{EHFG}=S_1+S'_1<\frac{1}{4}S_{EBCF}+\frac{1}{4}S_{AEFD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

对于后半题，如果 $ABCD$ 是任意一个四边形，结论不一定成立. 例如，可作一个等腰梯形 $ABCD$（$AD\ /\!/\ BC$），如图 15.20 所示，取 $AB$ 中点 $E$，$CD$ 中点 $F$，且 $AD=2$，$BC=6$，则 $EF=4$. 过 $G$、$H$ 作梯形的高 $MN$，设 $GM=h$，$OH=h_1$，则 $OG=2h$，$HN=\frac{3}{2}h_1$. 又 $3h=\frac{5}{3}h_1$，则 $h_1=\frac{6}{5}h$，则

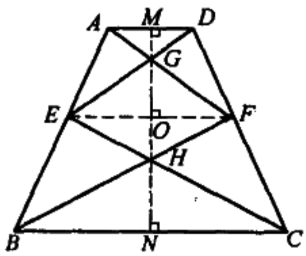



图 15.20

$$S_{EHFG}=S_{\triangle GEF}+S_{\triangle HEF}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2h+\frac{1}{2}\cdot4\cdot h_1=\frac{32}{5}h$$

$$4S_{EHFG}=\frac{128}{5}h$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)MN=\frac{1}{2}(2+6)(3h+\frac{5}{2}h_1)=24h$$

又
$$\frac{128}{5}h>24h$$

则
$$4S_{EHFG}>S_{ABCD}$$

即
$$S_{EHFG}>\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

注　对于这道试题,如果考虑它的加强,则可得到①:在原题条件下,若设 $AB=a,DC=b(a\neq b)$,则有

$$S_{EHFG}\leqslant\frac{ab}{(a+b)^2}S_{ABCD} \qquad (*)$$

由于 $a\neq b$,显然有 $\frac{ab}{(a+b)^2}<\frac{1}{4}$,所以式(*)加强了试题 B.

为证明(*),先引入引理.

**引理**　设 $0<\lambda,\mu<1$,对任意的 $a$、$b\in\mathbf{R}^+$,均有

$$F(\lambda,\mu)=\frac{\lambda\mu}{\lambda a+\mu b}+\frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{(1-\lambda)a+(1-\mu)b}\leqslant\frac{1}{a+b}$$



当且仅当 $\lambda=\mu$ 时等号成立.

事实上

$$F(\lambda,\mu)=\frac{\lambda\mu[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]+(1-\lambda)(1-\mu)(\lambda a+\mu b)}{(\lambda a+\mu b)[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]}=$$
$$\frac{\lambda\mu(1-\lambda)a+\lambda\mu(1-\mu)b+\lambda(1-\lambda)(1-\mu)b+\mu(1-\lambda)(1-\mu)b}{(\lambda a+\mu b)[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]}=$$
$$\frac{\lambda(1-\lambda)[\mu+(1-\mu)]a+\mu(1-\mu)[\lambda+(1-\lambda)]b}{(\lambda a+\mu b)[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]}=$$
$$\frac{\lambda(1-\lambda)a+\mu(1-\mu)b}{(\lambda a+\mu b)[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]}$$

则要证 $F(\lambda,\mu)\leqslant\frac{1}{a+b}$,即证

$$(a+b)[\lambda(1-\lambda)a+\mu(1-\mu)b]\leqslant(\lambda a+\mu b)[(1-\lambda)a+(1-\mu)b]$$

又
$$\begin{aligned}\text{左边}-\text{右边}=&[\lambda(1-\lambda)a(a+b)-(1-\lambda)(\lambda a+\mu b)a]+\\&[\mu(1-\mu)b(a+b)-(1-\mu)(\lambda a+\mu b)b]=\\&(1-\lambda)a[\lambda(a+b)-(\lambda a+\mu b)]+\\&(1-\mu)b[\mu(a+b)-(\lambda a+\mu b)]=\end{aligned}$$

① 李刚,冯华.一道冬令营赛题的加强[J].中学数学,1998(2):38-39.

$$(1-\lambda)(\lambda-\mu)ab+(1-\mu)(\mu-\lambda)ab=$$
$$ab(\lambda-\mu)[(1-\lambda)-(1-\mu)]=$$
$$-ab(\lambda-\mu)^2\leqslant 0$$

故左边$\leqslant$右边,从而$F(\lambda,\mu)\leqslant\frac{1}{a+b}$(当且仅当$\lambda=\mu$时等号成立).

下面证明式(*).

如图15.21,联结$EF$.令$AE:AB=\lambda,DF:DC=\mu(0<\lambda,\mu<1)$,则

$$AE=\lambda\cdot AB=\lambda a,DF=\mu\cdot DC=\mu b$$

因$AE/\!/DF$,故$S_{\triangle EGF}=S_{\triangle AGD}$且

$$AG:GF=EG:GD=AE:DF=\lambda a:\mu b$$

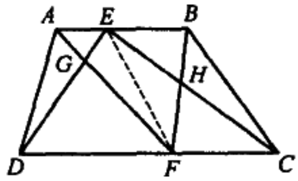



图15.21

则
$$S_{\triangle AGE}=\frac{\lambda a}{\mu b}S_{\triangle EGF},S_{\triangle DGF}=\frac{\mu b}{\lambda a}S_{\triangle EGF}$$

即
$$S_{ADFE}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle DGF}+S_{\triangle EGF}+S_{\triangle AGE}=$$
$$2S_{\triangle EGF}+(\frac{\lambda a}{\mu b}+\frac{\mu b}{\lambda a})S_{\triangle EGF}=\frac{(\lambda a+\mu b)^2}{\lambda\mu ab}\cdot S_{\triangle EGF}$$

又
$$S_{ADFE}=\frac{\lambda a+\mu b}{a+b}\cdot S_{ABCD}$$

则
$$S_{\triangle EGF}=\frac{\lambda\mu ab}{(\lambda a+\mu b)(a+b)}\cdot S_{ABCD}$$

同理
$$S_{\triangle EHF}=\frac{(1-\lambda)(1-\mu)ab}{[(1-\lambda)a+(1-\mu)b](a+b)}\cdot S_{ABCD}$$

将上两式相加得

$$S_{EHFG}=\frac{ab}{a+b}[\frac{\lambda\mu}{\lambda a+\mu b}+\frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{(1-\lambda)a+(1-\mu)b}]S_{ABCD}$$

由引理知不等式(*)得证,当且仅当$\lambda=\mu$,即$AE:AB=DF:FC$时等号成立.

## 第1节　四边形中的钝角三角形剖分问题

1993年全国高中联赛加试第1题涉及了四边形中的钝角三角形剖分.如果将题中“仅有一个钝角”及“周界上不含有钝角三角形顶点”的条件去掉,结论又将如何?浙江师大的肖雯先生探讨了这个问题,现介绍如下.①

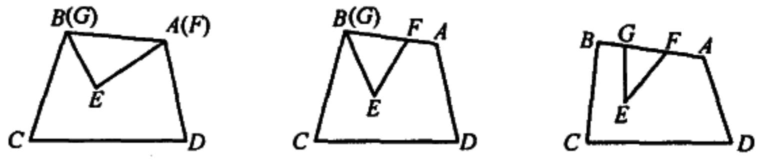
为了讨论问题的方便,先介绍关于一般三角形剖分的一个结论.

① 肖雯.关于四边形的钝角三角剖分[J].中学教研(数学),1993(12):33-36.

**引理** 对凸四边形 $ABCD$ 作任意三角形剖分，若四边形 $ABCD$ 的对角线不是剖分线，且四边形内部有剖分点，则剖分三角形的个数 $n$ 必须满足 $n \geqslant 4$.

**证明** 设凸四边形 $ABCD$ 内部有剖分点 $E$. 则 $E$ 必为某剖分 $\triangle EFG$ 的顶点，分两种情形讨论.

(i) $\triangle EFG$ 的边 $FG$ 在凸四边形 $ABCD$ 的边界上，不妨设在 $AB$ 上，如图15.22所示.




(a) (b) (c)

图 15.22

情况(a)：由于对角线不是剖分线，五边形 $AEBCD$ 不可能分成两个三角形，所以 $n \geqslant 4$.



情况(b)时，六边形 $AFEBCD$ 不可能分成两个三角形，也有 $n \geqslant 4$.

情况(c)时，七边形 $AFEGBCD$ 不可能分成两个三角形，故也有 $n \geqslant 4$.

(ii) $\triangle EFG$ 的边 $FG$ 不在凸四边形 $ABCD$ 的周界上，此时三边 $EF$、$FG$、$GE$(或其部分)必属于不同于 $\triangle EFG$ 的剖分三角形，且各不相同，所以也有 $n \geqslant 4$，如图 15.23 所示.

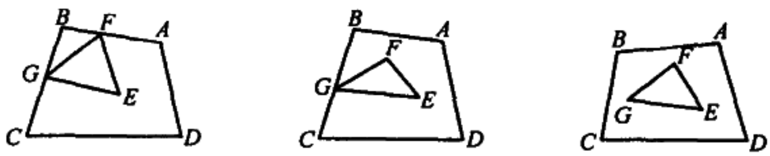
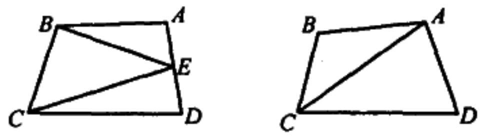



图 15.23

**注** 引理中的条件对角线不是剖分线和内部有剖分点是重要的，缺一将不能保证 $n \geqslant 4$，如图 15.24 所示.




(a) (b)

图 15.24

(内部没有剖分点，$n = 3$；对角线为剖分线，$n = 2$)

考虑凸四边形仅有一个钝角的情形：

此时，我们证明 $n \geqslant 4$.

分以下两种情形讨论.

(1) 周界上不含新剖分点

此时即原竞赛题，充分性易由构造法给出，应用引理我们给出原竞赛题不同于标准答案的一个必要性证明.

若凸四边形内部没有剖分点，又周界上也没有新剖分点，此时四边形的三角剖分只能是用对角线的剖分，对角线将凸四边形分成两个三角形，由于原四边形只有一个钝角，不可能都是钝角三角形，所以当边界上没有剖分点时，仅有一钝角的凸四边形的钝角三角剖分，必有剖分内点.

如对角线是剖分线，则对角线分四边形的两三角形中必有一非钝角三角形，它分成钝角三角形至少须分成三份，所以 $n \geqslant 4$. 若对角线不为剖分线，由于边界上无新剖分点的钝角三角剖分必有内剖分点，由引理也有 $n \geqslant 4$.

(2) 周界上含新剖分点

(i) 若凸四边形的对角线是剖分线，则 $n \geqslant 4$.

(ii) 若凸四边形的对角线不是剖分线，且四边形内有剖分点，由引理知此时剖分数 $n \geqslant 4$.

(iii) 若凸四边形的对角线不是剖分线，且四边形内部无剖分点.

设凸四边形的唯一钝内角为 $\angle D$，分两种情形讨论.

若过 $\angle D$ 无剖分线，则有图 15.25 中两种情况.

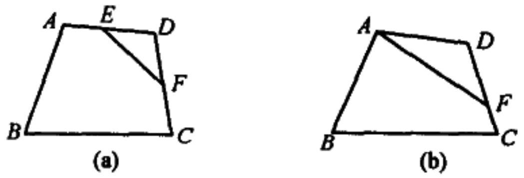



图 15.25

情况(a)：凸五边形 $ABCFE$ 分成三角形至少需要三个，$n \geqslant 4$；

情况(b)：凸四边形 $ABCF$ 中只有 $\angle AFC > 90°$，不可能剖分成两个钝角三角形，也有 $n \geqslant 4$.

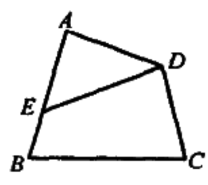



图 15.26

若过 $\angle D$ 有剖分线，如图 15.26 所示，如 $\triangle ADE$ 为非钝角三角形，则要剖分成钝角三角形至少需要三个，故 $n \geqslant 4$. 若 $\triangle ADE$ 为钝角三角形，钝角只能是 $\angle ADE$ 与 $\angle AED$ 之一，此时凸四边形 $BCDE$

只可能有一钝角,不可能分成两个钝角三角形,故也有 $n \geqslant 4$.

考虑凸四边形恰有两个钝角的情形.

(1) 若两钝角为对角,则 $n \geqslant 2$.

易知,证略.

(2) 两钝角为邻角,设为 $\angle C$、$\angle D$. 记以 $AB$ 为直径的圆为圆 $O$,分几种情况考察.

(i) $C$、$D$ 中至少有一点在圆 $O$ 内部,则 $n \geqslant 4$,如图 15.27(a) 所示.

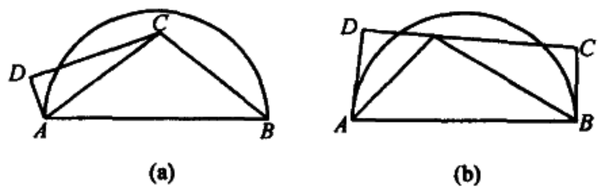


图 15.27

必要性显然,充分性由图及钝角三角形可分成两个钝角三角形即知.



(ii) $C$、$D$ 不在圆 $O$ 内部,但 $CD$ 中有点在圆 $O$ 内,则 $n \geqslant 3$.

充分性由图 15.27(b) 可知,必要性:由于四边形 $ABCD$ 的对角线不能把四边形分成两个钝角三角形,故 $n \geqslant 3$.

(iii) $CD$ 中没有点位于圆 $O$ 内,但 $BC$ 与圆 $O$ 交于点 $E$,且 $\angle ADE > 90°$(或 $AD$ 与圆 $O$ 交于点 $F$,且 $\angle BCF > 90°$),则 $n \geqslant 3$,如图 15.28 所示.

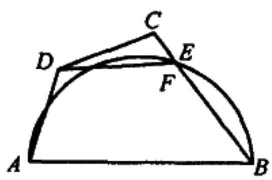


图 15.28

充分性:在 $BE$ 上取点 $F$ 充分靠近 $E$,使 $\angle ADF > 90°$,此时 $\triangle ABF$、$\triangle ADF$、$\triangle CDF$ 均为钝角三角形,它们形成凸四边形 $ABCD$ 的钝角三角剖分.

必要性:由凸四边形 $ABCD$ 不能用对角线分成两个钝角三角形推出.

(iv) 其他情形时 $n \geqslant 4$,如图 15.29 所示.

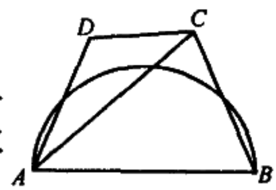


图 15.29

充分性显然.

必要性:若对角线为剖分线,则分得两三角形必有一为非钝角三角形,再作钝角三角形剖分,至少需要分三份,故 $n \geqslant 4$.

若对角线不为剖分线,且四边形内部有剖分点,则由引理知 $n \geqslant 4$.

若对角线不为剖分线,且四边形内部无剖分点,对钝角 $\angle D$ 剖分或不剖分

两种情形讨论.

若钝角 $\angle D$ 不剖分,如图 15.30 所示.

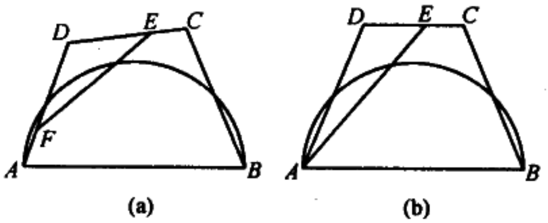



图 15.30

情况(a):凸五边形 $ABCEF$ 的三角剖分数至少需要 3,故 $n \geqslant 4$.

情况(b):凸四边形 $ABCE$ 只有两邻角 $\angle BCE$、$\angle AEC$ 为钝角,不可能分成两个钝角三角形,也有 $n \geqslant 4$.

若钝角 $\angle D$ 剖分,如图 15.31 所示.

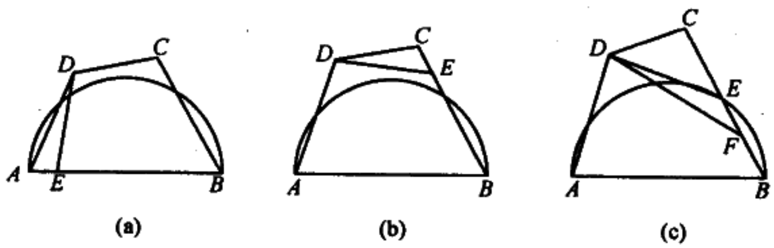



图 15.31

情况(a):$\triangle ADE$ 不可能为非钝角三角形,因否则要分成钝角三角形必有内剖分点.$\triangle ADE$ 为钝角三角形,只有 $\angle DEA > 90°$,故 $\angle DEB < 90°$.凸四边形 $EBCD$ 不可能分成两个钝角三角形,故 $n \geqslant 4$.

情况(b):四边形 $ABED$ 不能用对角线分成两个钝角三角形,也有 $n \geqslant 4$.

情况(c):此时由于 $\angle ADF < \angle ADE \leqslant 90°$,凸四边形 $ABFD$ 只有一个钝角,不可能分成两个钝角三角形,所以 $n \geqslant 4$.

考虑凸四边形有三个钝角和没有钝角的情形.

若凸四边形有三个钝角,则易见可剖分成 $n$ 个钝角三角形的充要条件是剖分数 $n \geqslant 2$.

若凸四边形没有钝角,则凸四边形 $ABCD$ 为矩形,当 $AB = CD$ 时,即正方形的情形,结论是 $n \geqslant 6$. $AB \neq CD$ 时,即矩形的情形,也可仿正方形的情形类似地证明.

最后,我们归纳一下探讨的结论:

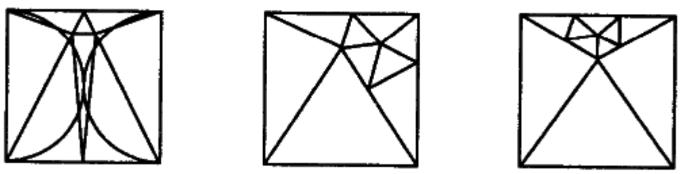
对一般凸四边形 $ABCD$,它可剖分成 $n$ 个钝角三角形的充要条件是剖分数 $n \geqslant n_0$.

$n_0$ 的数值依赖于凸四边形 $ABCD$ 的性态,已如上述,由于凸四边形的钝角个数只能是 0,1,2,3,所以我们的讨论已经穷尽了所有可能情况,现将结论列表总结如下.

<table>
<tr><th colspan="3">钝角个数</th><th>$n_0$</th></tr>
<tr><td colspan="3">0</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="3">1</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td colspan="2">两钝角为对角</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">两钝角为邻角设为$\angle C$、$\angle D$</td><td>至少 $C$、$D$ 之一在圆 $O$ 内(圆 $O$ 是以 $AB$ 为直径的圆)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$C$、$D$ 不在圆 $O$ 内,$CD$ 中有点在圆 $O$ 内</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$CD$ 中没有点位于圆 $O$ 内,但 $BC$ 与圆 $O$ 交于 $E$,$\angle ADE > 90°$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$CD$ 中没有点位于圆 $O$ 内,但 $AD$ 与圆 $O$ 交于 $F$,$\angle BCF > 90°$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>其他</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">3</td><td>2</td></tr>
</table>

本题自然还可推广与延伸:首先从凸四边形到凸五边形、凸六边形 …,到凹四边形、凹五边形 …,结论将如何变化?其次剖分从钝角三角剖分换成锐角三角剖分,结论又将如何?直角三角剖分的情形较易讨论,但是否能对一般 $n$ 边形得出结论呢?

特别地,对正方形的锐角三角剖分,由图 15.32 及每一锐角三角形可分成四个锐角三角形,所以当 $n \geqslant 8$ 时,正方形总可剖分成 $n$ 个锐角三角形,反之,我们问:8 是否是最小数?即正方形可剖分成 $n$ 个锐角三角形时,是否一定有 $n \geqslant 8$?我们猜想是对的,希望有兴趣的读者证明它.



$(n=8)$　　$(n=9)$　　$(n=10)$

图 15.32

## 第2节　特殊多边形的内接正三角形问题

在1978年全国高中数学联赛中，出了一道正方形的内接正三角形问题．这里，我们再介绍几个特殊多边形的内接正三角形问题．①

**问题1**　在一边长为$a$的正方形$ABCD$内以$A$为一个顶点作等边三角形，使它的另外两个顶点$E$、$F$分别位于$BC$和$CD$上，求这个等边$\triangle AEF$的边长．（用锐角三角函数表示）

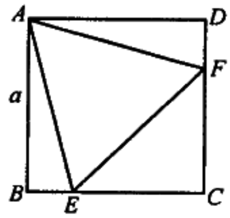


图15.33

此题解法不难，略解如下．

如图15.33，易证$\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong \mathrm{Rt}\triangle ADF$，于是

$$\angle BAE=\angle DAF=\frac{90^\circ-60^\circ}{2}=15^\circ$$

从而等边$\triangle AEF$的边长

$$AE=\frac{AB}{\cos\angle BAE}=\frac{a}{\cos 15^\circ}$$

**注**　此题若不要求用锐角三角函数表示，亦可解答如下．

设$BE=x(0<x<a)$，则$CE=CF=a-x$，且$EF=AE=\sqrt{a^2+x^2}$．于是在$\mathrm{Rt}\triangle CEF$中由勾股定理可得$a^2+x^2=2(a-x)^2$．解得$x=(2-\sqrt{3})a$．从而等边$\triangle AEF$的边长$AE=\sqrt{a^2+x^2}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$．

原解综合运用几何与三角知识，简捷明朗；此解充分运用方程思想，独到新颖．两种解法，各得其趣．而且对比可得结论$\cos 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，由此亦可联想到：欲求$\cos 15^\circ$，可构造题图求解．

**问题2**　矩形$ABCD$是否存在内接正$\triangle AEF$，其中点$E$、$F$分别在边$BC$和$CD$上？若可能存在，则此矩形的长与宽满足的条件是什么？

如图15.34，可使正方形$ABCD$的一边$AD$固定，其对边$BC$向下平移，如此来探讨矩形的情形．

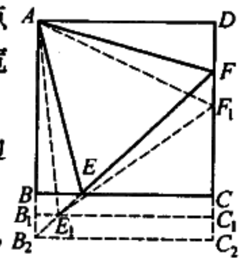


图15.34

设此时能作内接正$\triangle AE_1F_1$，由$AE=AF$，$\angle EAE_1=\angle FAF_1=60^\circ-\angle EAF_1$，$AE_1=AF_1$，可知

① 彭学军．习题再思索，学习增收获[J]．中学生数学，1998(11)：17．

$\triangle AEE_1 \cong \triangle AFF_1$.从而 $\angle AEE_1 = \angle AFF_1 = 105°$. 又 $\angle AEB = 75°$, 于是 $\angle BEE_1 = 30°$(定值).

由上可见,若令 $\angle BEB_2 = 30°$,且 $B_2$ 在 $AB$ 的延长线上,则可知正方形 $ABCD$ 变为矩形 $AB_1C_1D(AB \leqslant AB_1 \leqslant AB_2)$ 时能作唯一合题的正 $\triangle AE_1F_1$,且顶点 $E_1$ 在线段 $EB_2$ 上滑动.当 $E_1$ 与 $B_2$ 重合时,矩形长与宽的比最大为 $AB_2 : AD = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.从而若矩形存在合题的正三角形,则其长与宽之比 $k$ 满足 $1 \leqslant k \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

**问题 3** 菱形 $ABCD$ 是否存在内接正 $\triangle AEF$,且 $E$、$F$ 分别在边 $BC$ 和 $CD$ 上?若可能存在,还唯一吗?此时,其内角 $\angle A$(即图 15.35 中 $\angle BAD$) 满足的条件是什么?

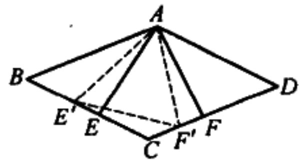


图 15.35

显然当 $0° < \angle A < 60°$ 时,菱形不存在合题的内接正三角形.



当 $60° \leqslant \angle A < 180°$ 时,由菱形的轴对称性可知只须作 $\angle BAE = \angle DAF = \frac{\angle A - 60°}{2}$,分别交 $BC$、$CD$ 于点 $E$、$F$,则 $\triangle AEF$ 即为合题的一个正三角形.

假若这样的正三角形还可作出一个 $\triangle AE'F'$,如图 15.35 所示,则 $\triangle AEE' \cong \triangle AFF'$,从而

$$\angle AEE' = \angle AFF'$$

又由对称性可知

$$\angle AFF' = \angle AEC$$

于是

$$\angle AEE' = \angle AEC$$

从而

$$AE \perp BC$$

即

$$\angle BAE + \angle B = 90°$$

因为

$$\angle BAE = \frac{\angle A - 60°}{2}, \angle B = 180° - \angle A$$

故可得

$$\frac{\angle A - 60°}{2} + 180° - \angle A = 90°$$

从而

$$\angle A = 120°$$

由上可见,当 $\angle A = 120°$ 时,菱形 $ABCD$ 存在无数个合题的正 $\triangle AEF$,且其中关于 $AC$ 对称的 $\triangle AEF$ 边长最短.而当 $60° \leqslant \angle A < 180°$ 且 $\angle A \neq 120°$ 时,只能存在唯一的正 $\triangle AEF$.

# 第16章 1994～1995年度试题的诠释

**试题A** 如图16.1,设$\triangle ABC$的外接圆$O$的半径为$R$,内心为$I$,$\angle B=60°$,$\angle A<\angle C$,$\angle A$的外角平分线交圆$O$于$E$,证明:(1)$IO=AE$;(2)$2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

下面先给出(1)的多种证法,再给出(2)的证法.(以下证法中,记$\angle BAC=\angle A$,$\angle ABC=\angle B$,$\angle ACB=\angle C$)

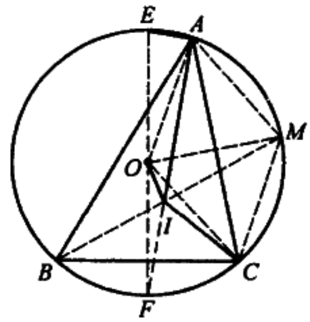



图16.1

(1)**证法1** 如图16.1,设射线$BI$与圆$O$交于点$M$,联结$MA$、$MC$,易知$M$为$\overset{\frown}{AC}$的中点,$MA=MC$.

联结$OA$、$OC$、$OM$.易知$\angle AOM=\angle B=60°$,故$\triangle AOM$为正三角形,$MC=MA=MO=R$.

由$I$是$\triangle ABC$的内心,$M$是$\overset{\frown}{AC}$的中点,知

$$\angle MAI=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\angle MIA$$

有

$$MI=MA=R$$

故$A$、$O$、$I$、$C$在以$M$为圆心,$R$为半径的圆$M$上,圆$M$与圆$O$为等圆.

设$AI$的延长线与$\overset{\frown}{BC}$交于点$F$,联结$EF$.

因$AF$、$AE$分别为$\angle A$及其外角平分线,故$\angle EAF$为直角,$EF$为圆$O$的直径,又

$$\angle OFA=\angle OAF=\angle OCI$$

依“在同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弦相等”,即知

$$AE=IO$$

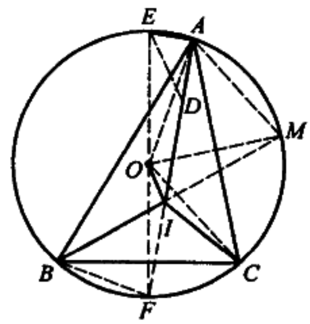



图16.2

**证法2** 如图16.2,设射线$BI$、$AI$分别与圆$O$交于点$M$、$F$,易知$M$为$\overset{\frown}{AC}$的中点,联结$OA$、$OM$、$AM$.由

$$\angle AOM = \angle B = 60^\circ$$

知 $\triangle OAM$ 为正三角形，且

$$\angle AMO = 60^\circ, \angle AMB = \angle C$$

有
$$\angle IMO = \angle AMB - \angle AMO = \angle C - 60^\circ$$

联结 $EF$、$FB$.

因 $AF$、$AE$ 分别为 $\angle A$ 及其外角的平分线，故 $\angle EAF$ 为直角，$EF$ 为圆 $O$ 的直径. 又

$$\angle AEF = \angle ABF = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$$

则
$$\angle AOE = 180^\circ - 2\left(\angle B + \frac{1}{2}\angle A\right) = \angle C - 60^\circ$$

即
$$\angle IMO = \angle AOE$$

从而两等腰三角形 $\triangle MIO \cong \triangle OAE$，$IO = AE$.



**证法3** 如图16.3，延长 $AI$ 交 $\overset{\frown}{BC}$ 于点 $D$，联结 $OA$、$OC$、$OD$、$OE$.

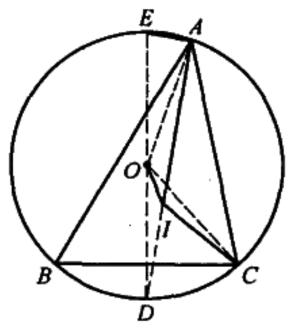


图 16.3

因 $AI$ 和 $AE$ 分别平分 $\angle A$ 及其外角，则 $\angle EAD = 90^\circ$，即 $EOD$ 为一条直径. 又

$$\angle AOC = 2\angle B = 120^\circ$$

$$\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 120^\circ$$

则 $A$、$O$、$I$、$C$ 四点共圆. 即

$$\angle ICO = \angle IAO = \angle IDO$$

$$\angle OIC = 180^\circ - \angle OAC = 150^\circ$$

在 $\triangle OIC$ 中应用正弦定理有

$$OI = \frac{OC\sin\angle OCI}{\sin\angle OIC} = 2R\sin\angle OCI = 2R\sin\angle ODI = AE$$

**证法4** 如图16.2，延长 $AI$ 交圆 $O$ 于 $F$，由题设知 $AE \perp AF$(内、外角平分线性质). 故 $EF$ 为直径.

作 $ED \parallel OI$ 交 $AF$ 于点 $D$，因 $O$ 为 $EF$ 的中点，故 $OI = \frac{1}{2}ED$.

联结 $OC$,因

$$\angle AOC = 2\angle B = 120^\circ$$

$$\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA) = 120^\circ$$

故 $\angle AOC = \angle AIC$,从而 $A$、$O$、$I$、$C$ 四点共圆.因此即得(因 $OA = OC$,且 $\angle AOC = 120^\circ$)

$$\angle OIA = \angle OCA = 30^\circ$$

又由 $OI \parallel ED$,知

$$\angle EDA = \angle OIA = 30^\circ$$

再由 $\angle EAD = 90^\circ$,得

$$AE = \frac{1}{2}ED$$

所以

$$OI = AE$$

下面的证法5至证法10由湖北宜昌的万兴灿、杨开清给出.

首先联结 $OA$、$OC$,则 $\angle AOC = 2\angle B = 120^\circ$,$\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 120^\circ$,故有 $I$、$O$、$A$、$C$ 四点共圆.延长 $AI$ 交圆 $O$ 于点 $F$,联结 $EF$,因为 $AE$、$AF$ 分别是 $\angle A$ 的外、内角平分线,则 $EA \perp AF$,故有 $EF$ 为圆 $O$ 的直径.

**证法5**　如图16.4,作 $OG \perp AF$ 于 $G$,有

$$OG \parallel EA$$

且

$$OG = \frac{1}{2}EA$$

又由 $I$、$O$、$A$、$C$ 四点共圆,得

$$\angle OIA = \angle OCA = \angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 30^\circ$$

有

$$OG = \frac{1}{2}IO$$

即

$$IO = EA$$

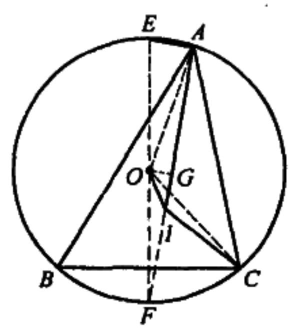



图16.4

**证法6**　如图16.5,联结 $EC$ 交 $AF$ 点于 $D$,因

$$\angle CEA = \angle B = 60^\circ, EA \perp AD$$

则

$$EA = \frac{1}{2}ED, \angle EDA = 30^\circ$$

又由 $I$、$O$、$A$、$C$ 四点共圆,得

$$\angle OIA=\angle OCA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOC)=30^\circ$$

则 $$OI \parallel ED$$

且 $$OI=\frac{1}{2}ED$$

有 $$OI=EA$$

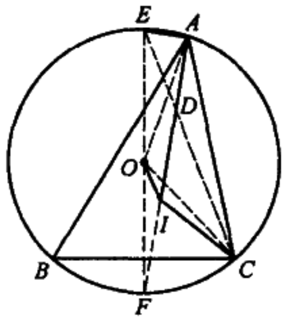


图 16.5

**证法 7** 如图 16.5,由 $I$、$O$、$A$、$C$ 四点共圆,知

$$\angle IOC=\angle DAC$$

$$\angle OCI=\angle OAF=\angle AFE=\angle ACD$$

则 $$\triangle OIC \backsim \triangle ADC$$

有 $$OI:AD=OC:AC$$

又 $$\angle B=60^\circ, AC=\sqrt{3}R$$

及 $$\angle AED=60^\circ, AD=\sqrt{3}EA$$



有 $$OI=\frac{R\cdot\sqrt{3}EA}{\sqrt{3}R}=EA$$

**证法 8** 如图 16.5,因 $I$、$O$、$A$、$C$ 四点共圆,$AC=\sqrt{3}R$,由托勒密定理有

$$OI\cdot AC+AO\cdot IC=AI\cdot OC$$

即 $$OI\cdot\sqrt{3}R+R\cdot IC=AI\cdot R$$

即 $$AI=IC+\sqrt{3}OI$$

因 $$\angle AEC=\angle B=60^\circ$$

则 $$\angle EDA=\angle IDC=30^\circ$$

又由 $$\angle DIC=120^\circ$$

知 $$\angle ICD=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$$

有 $$IC=ID, AD=\sqrt{3}AE$$

即有 $$AI=AD+ID=IC+\sqrt{3}AE$$

故 $$OI=AE$$

**证法 9** 如图 16.6,过 $O$ 引 $OG \perp\!\!\!= EA$,联结 $AG$、$GI$.因 $EA\perp AI$,则 $OG\perp AI$,又由 $AG=OE=OA$,知 $O$、$G$ 关于 $AI$ 对称.

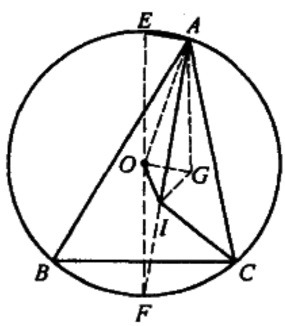


图 16.6

又由 $O$、$I$、$C$、$A$ 四点共圆,知 $\angle OIA = 30°$,有 $\triangle OIG$ 是正三角形,即

$$OI = OG = EA$$

**证法 10**　如图 16.7,联结 $BE$,则

$$\angle ABE = \pi - \angle BEA - \angle EAB =$$

$$\pi - (\pi - \angle C) - (\frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}) =$$

$$\angle C - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{\angle C}{2} - 30°$$

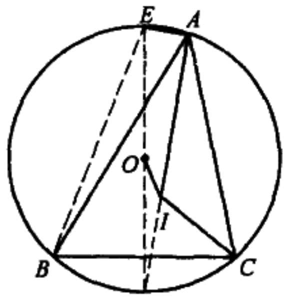


图 16.7

即 $$EA = 2R\sin(\frac{C}{2} - 30°)$$

又由欧拉公式 $$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

有 $$OI^2 = R^2(1 - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}) = R^2[1 + 2(\cos\frac{A+C}{2} - \cos\frac{A-C}{2})] =$$

$$2R^2(1 - \cos\frac{A-C}{2}) = 2R^2(1 - \cos\frac{120° - 2C}{2}) = 4R^2\sin^2\frac{60° - C}{2}$$ 

又因 $\angle A < \angle C$,则 $\angle C > 60°$,有

$$OI = 2R\sin(\frac{C}{2} - 30°)$$

故 $$OI = EA$$

**证法 11**　如图 16.7,因

$$\angle EBA = 180° - \frac{\angle B + \angle C}{2} - (180° - \angle C) = \frac{\angle C}{2} - 30°$$

则 $$AE = 2R\sin(\frac{C}{2} - 30°)$$

又 $$\angle AIC = 180° - \frac{\angle A + \angle C}{2} = 120°$$

则 $$IC = \frac{AC\sin\frac{A}{2}}{\sin 120°} = \frac{2R\sin 60°\sin\frac{A}{2}}{\sin 120°} = 2R\sin\frac{A}{2}$$

在 $\triangle OIC$ 中,注意到 $\angle OCI = \frac{\angle C}{2} - 30°$,则

$$IO^2 = R^2 + IC^2 - 2R \cdot IC\cos(\frac{C}{2} - 30°) =$$

$$R^2+4R^2\sin^2\frac{A}{2}-4R^2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=$$

$$R^2+4R^2\frac{1-\cos A}{2}-2R^2[\sin 30^\circ+\sin(30^\circ-A)]=$$

$$2R^2-2R^2[\cos A+\cos(120^\circ-A)]=$$

$$2R^2[1-\cos(60^\circ-A)]=[2R\sin(30^\circ-\frac{A}{2})]^2$$

故 $$IO=2R\sin\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)=2R\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=AE$$

(2) **证法 1** 如图 16.1,如(1)中证法 1 所述,圆 $M$ 与圆 $O$ 是等圆.在圆 $M$ 中,有

$$IO=2R\sin\frac{1}{2}\angle IMO=2R\sin\frac{1}{2}(\angle IMA-\angle OMA)=$$

$$2R\sin\frac{1}{2}(C-60^\circ)=2R\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right)$$

$$IA=2R\sin\frac{1}{2}\angle IMA=2R\sin\frac{1}{2}C$$



$$IC=2R\sin\frac{1}{2}A$$

故 $$IO+IA+IC=2R[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right)+\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}A]=$$

$$2R[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right)+2\sin\frac{1}{4}(C+A)\cos\frac{1}{4}(C-A)]=$$

$$2R[\sin\left(\frac{1}{2}C-30^\circ\right)+\sin\left(90^\circ-\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}A\right)]=$$

$$2R\cdot 2\sin\frac{1}{2}\left(60^\circ+\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}A\right)\cos\frac{1}{2}\left(120^\circ-\frac{3}{4}C+\frac{1}{4}A\right)=$$

$$2R\cdot 2\sin 45^\circ\cos\frac{1}{2}(150^\circ-C)=$$

$$2\sqrt{2}R\sin\left(15^\circ+\frac{1}{2}C\right)$$

由 $\angle A<\angle C$ 知 $60^\circ<\angle C<120^\circ$,有

$$30^\circ<\frac{1}{2}\angle C<60^\circ$$

而 $$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

故 $$2\sqrt{2}R\sin 45^\circ<IO+IA+IC<2\sqrt{2}R\sin 75^\circ$$

此即 $$2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$$

**证法2** 如图16.2,联结 $OC$.$\angle AOC=2\angle B=120^\circ$,有

$$\angle OAC=\angle OCA=30^\circ,\angle AIC=\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=120^\circ$$

由
$$\angle AOC=\angle AIC$$

故 $A$、$O$、$I$、$C$ 共圆,则

$$\angle OCI=\angle OAF=\angle OFA$$
$$\angle OIC=180^\circ-\angle OAC=150^\circ$$

且
$$\angle AIO=\angle ACO=30^\circ$$

得
$$\angle OIF=150^\circ$$

故
$$\triangle OIC\cong\triangle OIF,IC=IF$$

如(1)中证法2所述,$\angle EAF$ 是直角,$EF$ 是圆 $O$ 的直径,则

$$IO+IA+IC=AE+AF=2R(\sin\angle OFA+\cos\angle OFA)=$$
$$2\sqrt{2}R\sin(\angle OFA+45^\circ)=2\sqrt{2}R\sin(\angle OAF+45^\circ)=$$
$$2\sqrt{2}R\sin(30^\circ-\frac{1}{2}A+45^\circ)=$$
$$2\sqrt{2}R\sin[75^\circ-\frac{1}{2}(120^\circ-C)]=2\sqrt{2}R\sin(15^\circ+\frac{1}{2}C)$$



由
$$\angle A<\angle C$$

知
$$60^\circ<\angle C<120^\circ$$

有
$$30^\circ<\frac{1}{2}\angle C<60^\circ$$

而
$$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

故
$$2\sqrt{2}R\sin 45^\circ<IO+IA+IC<2\sqrt{2}R\sin 75^\circ$$

此即
$$2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$$

**证法3** 如图16.3.由

$$\angle OID=180^\circ-\angle OIA=180^\circ-\angle OCA=150^\circ=\angle OIC$$

知
$$\triangle OID\cong\triangle OIC$$

有
$$ID=IC$$

即
$$2R=ED<AE+AD=AE+AI+IC$$

记 $\angle ICO=\alpha$,于是有

$$AE+AD=2R(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

因
$$\alpha=30^\circ-\frac{1}{2}\angle A<30^\circ$$

则 $$AE + AD = 4R\sin 45^\circ\cos(45^\circ - \alpha) < 4R\sin 45^\circ\cos 15^\circ = 2R(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = (1 + \sqrt{3})R$$

故 $$2R < IO + IA + IC < (1 + \sqrt{3})R$$

**证法 4** 如图 16.2. 由 $A$、$O$、$I$、$C$ 四点共圆及 $\triangle OFA$ 是等腰三角形,得

$$\angle ICO = \angle IAO = \angle IFO$$

又由 $\angle OIA = 30^\circ$,知

$$\angle OIC = \angle OIA + \angle AIC = 150^\circ$$

$$\angle OIF = 180^\circ - \angle OIA = 150^\circ$$

故 $$\angle OIC = \angle OIF$$

又 $$OI = OI$$

所以 $$\triangle OIF \cong \triangle OIC$$

从而 $$IF = IC$$

又已证得 $IO = AE$,所以



$$IO + IA + IC = AE + IA + IF = AE + AF > EF = 2R$$

记 $\angle OFI = \alpha$,则

$$\alpha = \angle OAI \leqslant \frac{1}{2}\angle BAC < 30^\circ$$

(由 $\angle BAC < \angle BCA$, $\angle B = 60^\circ$ 知 $\angle BAC < 60^\circ$)

且 $$AE + AF = 2R\sin\alpha + 2R\cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha)$$

而当 $\alpha \leqslant 45^\circ$ 时, $\sin(45^\circ + \alpha)$ 是 $\alpha$ 的增函数,所以

$$AE + AF < 2R(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ) = (1 + \sqrt{3})R$$

即 $$IO + IA + IC < (1 + \sqrt{3})R$$

下面的证法 5、6 由万兴灿、杨开清给出.

**证法 5** 设 $AI = x$, $IO = y$, $IC = z$,由(1)证法 8 知

$$x = \sqrt{3}y + z$$

有 $$y = \frac{x - z}{\sqrt{3}}$$

又由 $$AC = \sqrt{3}R, \angle AIC = 120^\circ$$

知 $$(\sqrt{3}R)^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^\circ$$

即 $$x^2 + z^2 + xz = 3R^2$$

从而 $$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx =$$

$$x^2+z^2+(\frac{x-z}{\sqrt{3}})^2+2xz+2(x+z)(\frac{x-z}{\sqrt{3}})=$$

$$\frac{4(x^2+z^2+xz)}{3}+\frac{2(x^2-z^2)}{\sqrt{3}}=4R^2+\frac{2(x^2-z^2)}{\sqrt{3}}$$

而 $$\angle A<\angle C$$

有 $$0<\frac{2(x^2-z^2)}{\sqrt{3}}<\frac{2(x^2+z^2+xz)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}R^2$$

故 $$4R^2<(x+y+z)^2<4R^2+2\sqrt{3}R^2=(1+\sqrt{3})^2R^2$$

即 $$2R<x+y+z<(1+\sqrt{3})R$$

**证法6** 如图16.8,因 $\angle AIC=120°$,则

$$\angle FIC=60°$$

又 $$\angle AFC=\angle B=60°$$

有 $\triangle IFC$ 为正三角形.则

$$AI+IC+IO=AI+IF+AE=$$
$$AF+AE>EF=2R$$

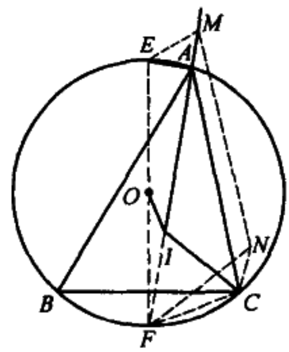



图16.8

在 $FA$ 延长线上取点 $M$,使 $AM=AE$,引 $CN\perp AM$,联结 $MN$,有 $MN=AC$,在 $\triangle FIO$ 与 $\triangle FCN$ 中,$FC=FI,CN=AM=AE=IO$,又

$$\angle FIO=180°-\angle OIA=180°-30°=150°>120°=$$
$$\angle A+\angle C=\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle A}{2}+\angle C=$$
$$\angle BCF+\angle FAC+\angle C=$$
$$\angle BCF+\angle ACN+\angle C=\angle FCN$$

则 $$FO>FN$$

即 $$FN<R$$

故有 $$FM<FN+MN<R+AC=R+\sqrt{3}R$$

即有 $$2R<AI+IC+IO<(1+\sqrt{3})R$$

**证法7** 如图16.1.因

$$\angle IFC=\angle ABC=60°=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle BCF+\angle ICB=\angle ICF$$

则 $IC=IF$,于是

$$IO+IA+IC=AE+IA+IF=AE+AF>EF=2R$$

且 $IO+IA+IC=AE+AF=2R[\cos(60^\circ+\frac{1}{2}A)+\sin(60^\circ+\frac{1}{2}A)]=$

$$2\sqrt{2}R\sin(105^\circ+\frac{1}{2}A)=2\sqrt{2}R\sin(75^\circ-\frac{1}{2}A)$$

又 $\angle B=60^\circ,\angle A<\angle C$,所以 $\angle A<60^\circ,45^\circ<75^\circ-\frac{1}{2}\angle A<75^\circ$,所以

$$IO+IA+IC<2\sqrt{2}R\sin 75^\circ=(\sqrt{3}+1)R$$

$$2R<IO+IA+IC<(\sqrt{3}+1)R$$



下面的证法 8、9 由李长明教授给出.

**证法 8** 如图 16.9,延长 $AO$ 交圆 $O$ 于点 $D$,延长 $AI$ 交圆 $O$ 于点 $F$,联结 $OC$.注意到 $OC=OF=R$,知 $\angle OFC=\angle OCF$,由 $A$、$O$、$I$、$C$ 共圆,知

$$\angle OFI=\angle OAI=\angle OCI$$

从而 $$\angle IFC=\angle ICF$$

故 $$IC=IF$$

即 $$IA+IC=AF \quad ①$$

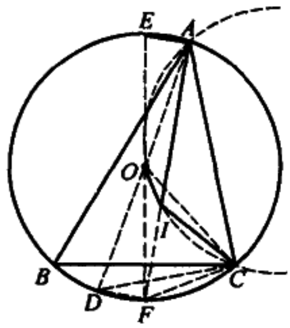



图 16.9

因等腰 $\triangle OAC$ 的顶角 $\angle AOC=120^\circ$,则

$$\angle OAC=30^\circ>\angle IAC=\frac{1}{2}\angle A$$

即 $AI$ 介于 $AO$、$AC$ 之间.

延长 $AO$ 交圆 $O$ 于点 $D$,则在 $Rt\triangle AFD$ 与 $Rt\triangle ACD$ 中,由 $AI$ 介于 $AO$ 与 $AC$ 之间,则

$$S_{\triangle AFD}<S_{\triangle ACD}$$

即 $$DF\cdot AF<DC\cdot AC$$

但 $$DF^2+AF^2=AD^2=DC^2+AC^2$$

则 $$(DF+AF)^2<(DC+AC)^2$$

即

$$AD<DF+AF<DC+AC \quad ②$$

又 $DF=AE$(关于圆心对称),再由 ① 及 $DF=AE=IO$,有

$$DF+AF=IO+IA+IC \quad ③$$

另一方面,$\angle ADC=\angle ABC=60^\circ$.

而在 $Rt\triangle ACD$ 中,斜边 $AD=2R$,则

$$DC=R,AC=\sqrt{3}R$$

将 ③ 与此二等式代入 ② 中，即得

$$2R < IO + IA + IC < (1+\sqrt{3})R$$

**证法 9**　如图 16.10，在图 16.9 基础上，延长 $AC$ 至 $C'$ 使 $CC' = CD$，再延长 $AF$ 至 $F'$，使 $FF' = FD$. 这时则与上述证法一样可知

$$AC' = (1+\sqrt{3})R \quad ①$$

$$AF' = AF + DF = IO + IA + IC \quad ②$$

又

$$\angle AC'D = \angle AF'D = 45°$$

则 $C'$、$F'$ 在以 $AD$ 为弦的一弓形弧上. 且此弓形弧之圆心 $N$ 实为半圆 $\widehat{AD}$ 的中心.

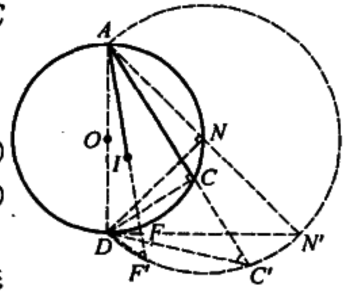


图 16.10

而 $AI$ 介于 $AD$、$AC$ 之间(见证法 8)，则 $AD < AF' < AC'$，用①、②代换，即得所证.

**试题 B**　空间有四个球，它们的半径分别为 2，2，3，3，每个球都与其余三个球外切. 另有一个小球与那四个球都外切. 求这个小球的半径.

**解**　如图 16.11，用 $A$、$B$ 记半径为 3 的那两个球的中心，令 $R = 3$；用 $C$、$D$ 记半径为 2 的那两个球的中心，令 $r = 2$. 从而有

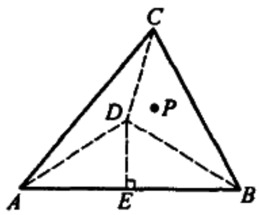


图 16.11

$$AB = 2R, CD = 2r$$

$$AD = AC = BD = BC = R + r$$

若小球存在，记其球心为 $P$，半径为 $s$，我们有

$$AP = BP = R + s$$

$$CP = DP = r + s$$

过点 $C$ 作线段 $AB$ 的垂直平分面. 由于 $AC = BC$，$AP = BP$，$AD = BD$，所以点 $P$ 以及线段 $CD$ 都在这平面上. 这平面与 $AB$ 的交点记为 $E$，它应是 $AB$ 的中点.

考察 $\triangle CDE$，如图 16.12 所示. 注意到

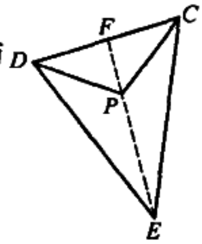


图 16.12

$$DE = CE = \sqrt{(R+r)^2 - R^2} = \sqrt{2Rr + r^2}$$

$$DC = 2r$$

$$DP = CP = r + s$$

于是,$\triangle DEP \cong \triangle CEP$.因此,$\angle DEP = \angle CEP$.延长 $EP$ 交 $DC$ 于点 $F$,于是 $EF \perp CD$.从而 $CF = FD = r$,且

$$EF = \sqrt{EC^2 - CF^2} = \sqrt{r^2 + 2Rr - r^2} = \sqrt{2Rr}$$

另外
$$EP = \sqrt{(r+s)^2 - r^2} = \sqrt{s^2 + 2sr}$$

现在再讨论 $\triangle APE$.由于 $PE \perp AE$,故有

$$EP = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{(R+s)^2 - R^2} = \sqrt{2Rs + s^2}$$

由于 $EF = EP + PE$,可得

$$\sqrt{2Rr} = \sqrt{2Rs + s^2} + \sqrt{s^2 + 2rs}$$

将 $r = 2, R = 3$ 代入上式,得出关于 $s$ 的方程

$$2\sqrt{3} = \sqrt{s^2 + 6s} + \sqrt{s^2 + 4s}$$

解之得 $s = \frac{6}{11}$,即小球的半径是$\frac{6}{11}$.

**试题 C** 给定锐角 $\theta$ 和相内切的两个圆.过公切点 $A$ 作定直线 $l$(不过圆心)交外圆于另一点 $B$.设点 $M$ 在外圆优弧上运动,$N$ 是 $MA$ 与内圆的另一交点,$P$ 是射线 $MB$ 上的点,使得 $\angle MPN = \theta$.试求点 $P$ 的轨迹.



**解法 1** 当动点 $M$ 在大圆优弧的不同部位时,相应的图形略有差异(参看图 16.13,我们所写的文字说明统一地适用于各种情形).

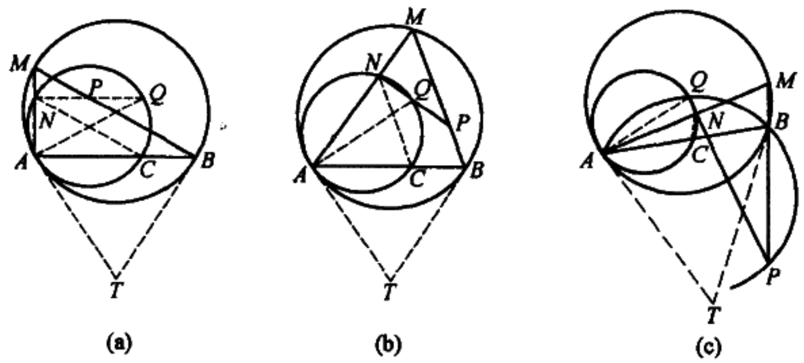



图 16.13

设直线 $l$ 与内圆的另一交点是 $C$,联结 $NC$.过点 $A$ 和点 $B$ 作外圆的切线相交于点 $T$.由

$$\angle TAB = \angle AMB = \angle ANC$$

知
$$MB \parallel NC$$

则
$$\angle CNP = \angle MPN = \theta$$

设直线 $PN$ 与内圆的另一交点是 $Q$，则 $A$、$C$、$N$、$Q$ 四点都在内圆周上，因而

$$\angle CAQ = \angle CNP = \angle MPN = \theta$$

由此得知 $A$、$Q$、$P$、$B$ 四点共圆.

综上所述，点 $Q$ 是内圆上的定点，$\angle CAQ = \theta$，并且点 $P$ 在 $\triangle ABQ$ 的外接圆上. 因此，我们可以按以下方式作出点 $P$ 的轨迹(请验证).

在内圆被直线 $l$ 截得的优弧上取点 $Q$，使得 $\angle BAQ = \theta$，然后作 $\triangle ABQ$ 的外接圆. 该外接圆周在 $\angle ABT$ 外的那段圆弧，就是所求的轨迹.

**解法 2**　过点 $A$ 和点 $B$ 作外圆的切线相交于点 $T$. 设直线 $l$ 与内圆的另一交点是 $C$，联结 $NC$. 在切线 $BT$ 上取一点 $D$，使得 $\angle BDC = \theta$，然后，联结 $AD$ 和 $CD$，如图 16.14 所示. 因

$$\angle NMP = \angle CBD, \angle MPN = \angle BDC$$

则

$$\triangle MNP \backsim \triangle BCD$$

因而

$$\frac{MN}{MP} = \frac{BC}{BD} \quad ①$$

又因为 $MB \parallel NC$，所以

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC} \quad ②$$

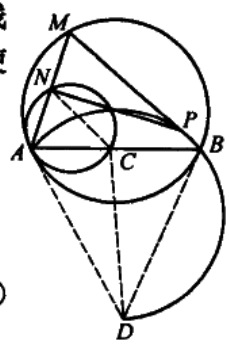



图 16.14

将式 ① 和式 ② 两边分别相乘就得到

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AB}{BD}$$

又因为

$$\angle AMP = \angle ABD$$

所以

$$\triangle AMP \backsim \triangle ABD$$

上式右端是一个完全确定的三角形. 因此，$\triangle AMP$ 的各角以及各边之比都是完全确定的. 我们看到，点 $P$ 可由点 $M$ 经过绕点 $A$ 的旋转位似变换而得到，即

$$\angle PAM = \angle DAB(\text{定角})$$

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AD}{AB}(\text{定值})$$

因此，将所给的外圆的优弧作相应的旋转位似变换就得到点 $P$ 的轨迹.

综上所述，点 $P$ 的轨迹是以 $AD$ 为弦，张角等于 $\angle ABD$(定角) 的一段圆弧.

# 第1节　一个基本图形

方亚斌先生探讨了数学竞赛命题中的一个基本图形①,下面加以介绍.

如图16.15,设$\triangle ABC$的三内角平分线分别交三边于$A_0$、$B_0$、$C_0$,交其外接圆于$D$、$E$、$F$,又交$\triangle DEF$的三边于$A_1$、$B_1$、$C_1$.点$M$、$N$、$P$、$Q$、$R$、$S$分别是$\triangle ABC$与$\triangle DEF$三边的交点.记$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$为$\triangle ABC$的三内角,其对边分别为$a$、$b$、$c$;$\angle D$、$\angle E$、$\angle F$为$\triangle DEF$的三内角,其对边分别为$a'$、$b'$、$c'$.$R(R')$、$r(r')$、$p(p')$、$S(S')$分别为$\triangle ABC(\triangle DEF)$的外接圆半径、内切圆半径、半周长和面积,$\triangle ABC$的内心为$I$.

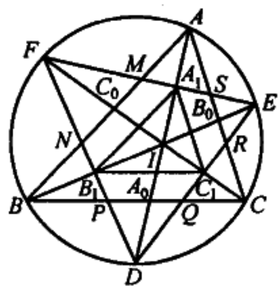


图16.15

这一常见的构图,可以衍生出一系列数学竞赛题.

**题1**　$AD\perp EF$.

(1991年第32届IMO加拿大训练题第6题)



**证明**　由

$$\angle ADF+\angle DFE=\angle ADF+\angle DFC+\angle CFE=\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ$$

知

$$AD\perp EF$$

类似可知

$$BE\perp DF, CF\perp DE$$

故$I$为$\triangle DEF$的垂心.

**题2**　$I$为$\triangle A_1B_1C_1$的内心.

(《数学通讯》1994年第1期"问题"第71题)

**证明**　由题1知,$A_1$、$F$、$B_1$、$I$四点共圆,所以

$$\angle B_1A_1I=\angle B_1FI$$

又

$$\angle B_1FI=\angle DFC=\angle DAC=\angle DAB$$

所以

$$\angle B_1A_1I=\angle DAB, A_1B_1\ /\!/\ AB$$

同理

$$B_1C_1\ /\!/\ BC, C_1A_1\ /\!/\ CA$$

故$I$为$\triangle A_1B_1C_1$的内心.

**题3**　$D$、$E$、$F$分别为$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心.

**证明**　因

① 方亚斌.数学竞赛命题中的一个基本图形[J].中学数学,1998(12):1-5.

$$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\angle CAD+\angle CBE=$$
$$\angle CBD+\angle CBI=\angle IBD$$

故
$$DB=DI$$
同理
$$DC=DI$$
故
$$DB=DC=DI$$
$D$ 为 $\triangle IBC$ 的外心.

类似可知，$E$、$F$ 分别为 $\triangle ICA$、$\triangle IAB$ 的外心.

注意到 $A$、$B$、$C$ 与 $D$、$E$、$F$ 六点共圆，故 $\triangle ABC$ 与由 $\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$ 的外心组成的 $\triangle DEF$ 有相同的外心，此即1988年第17届USAMO第4题的结论.

**题4** 四边形 $AMIS$ 为菱形.

(1977年第11届全苏数学奥林匹克八年级第4题)

**证明** 由题3知，$EA=EI$，由题1知，$EF\perp AI$，故 $EF$ 垂直平分 $AI$，得
$$SA=SI, MA=MI$$
又
$$\angle SAA_1=\angle MAA_1$$
得
$$AS=AM$$
从而
$$SA=SI=IM=MA$$
故四边形 $AMIS$ 为菱形.

**题5** $M$、$I$、$Q$ 三点共线，且 $MQ\parallel AC$.

(1965年全俄中学生数学奥林匹克八年级第3题)

**证明** 由题4知，$AMIS$、$CQIR$ 均为菱形，故 $MI\parallel AC$，$QI\parallel AC$，从而 $M$、$I$、$Q$ 三点共线，且 $MQ\parallel AC$.

同理可证，$N$、$I$、$R$ 三点共线(1990年湖南省第五届中学生数学夏令营B卷第二(6)题)；$NR\parallel BC$(《数学通报》1988年第11期"数学问题解答"第461题)；$P$、$I$、$S$ 三点共线，且 $PS\parallel AB$，从而知六边形 $MNPQRS$ 的三条"长"对角线平行于 $\triangle ABC$ 的三边，且交于一点，此即1977年第11届全苏数学奥林匹克九、十年级第1题.

**题6** $\dfrac{AI}{IA_0}=\dfrac{b+c}{a}$.

(1979年广东省中学数学竞赛题)

**证明** 由角平分线性质，知
$$\frac{AI}{IA_0}=\frac{AC}{CA_0}=\frac{AB}{BA_0}$$

得
$$\frac{AI}{IA_0}=\frac{AC+AB}{CA_0+BA_0}=\frac{b+c}{a}$$

**题 7** $\frac{1}{IA_0}-\frac{1}{ID}=\frac{1}{AI},\frac{AI}{IA_0}-\frac{IA_0}{A_0D}=1.$

(《友谊 88》国际中学生(九年级)数学循环赛第 3 题)

**证明** 由 $\triangle ACA_0\backsim\triangle BDA_0$,得
$$\frac{AC}{CA_0}=\frac{BD}{DA_0}=\frac{DI}{DA_0}$$

又 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,所以
$$\frac{AC}{CA_0}=\frac{AI}{IA_0}$$

得
$$\frac{AI}{IA_0}=\frac{DI}{DA_0}$$

所以
$$\frac{1}{AI}=\frac{DA_0}{IA_0\cdot DI}=\frac{DI-IA_0}{IA_0\cdot DI}=\frac{1}{IA_0}-\frac{1}{DI}$$
$$\frac{AI}{IA_0}=\frac{DA_0+A_0I}{DA_0}=1+\frac{IA_0}{DA_0}$$



即
$$\frac{AI}{IA_0}-\frac{IA_0}{DA_0}=1$$

**题 8** $\frac{ID}{IA}+\frac{IE}{IB}+\frac{IF}{IC}=\frac{1}{2}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}-1.$

(《数学通讯》1981 年第 6 期"问题征解"第 5 题)

**证明** 由题 7 得
$$\frac{IA}{ID}=\frac{IA}{IA_0}-1$$

由题 6 得
$$\frac{IA}{ID}=\frac{b+c}{a}-1=\frac{b+c-a}{a}$$

所以
$$\frac{ID}{IA}=\frac{a}{b+c-a}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

同理
$$\frac{IE}{IB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}},\frac{IF}{IC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

所以
$$\frac{ID}{IA}+\frac{IE}{IB}+\frac{IF}{IC}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

因为 $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]=$

$$1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以

$$\frac{ID}{IA}+\frac{IE}{IB}+\frac{IF}{IC}=\frac{1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{1}{2}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}-1$$

**题9**　$AD\cos\frac{A}{2}+BE\cos\frac{B}{2}+CF\cos\frac{C}{2}=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

**证明**　在四边形 $ABCD$ 中,由托勒密定理,知

$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

因为

$$BD=CD=\frac{1}{2}BC\sec\angle DBC=\frac{a}{2}\sec\frac{A}{2}$$

所以

$$(c+b)\frac{a}{2}\sec\frac{A}{2}=AD\cdot a$$

$$AD=\frac{b+c}{2}\sec\frac{A}{2},AD\cos\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2}$$

同理

$$BE\cos\frac{B}{2}=\frac{c+a}{2},CF\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b}{2}$$

所以

$$AD\cos\frac{A}{2}+BE\cos\frac{B}{2}+CF\cos\frac{C}{2}=$$

$$a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=$$

$$8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

令 $R=1$,得 $\dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{AD\cos\frac{A}{2}+BE\cos\frac{B}{2}+CF\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{1}{8}$.

此即1987年湖北省数学奥林匹克函授学校暑期面授高中组竞赛试题第一(3)题.

**题10**　$R=\frac{ID\cdot IF}{IB},2r=\frac{IA\cdot IC}{IE}$.

([俄]B.B.波拉索洛夫《平面几何问题集及其解答》11.7题)

**证明**　由题3及题9知

$$ID=BD=\frac{a}{2}\sec\frac{A}{2}$$

$$IE = \frac{b}{2}\sec\frac{B}{2}, IF = \frac{c}{2}\sec\frac{C}{2}$$

又
$$IA = r\csc\frac{A}{2}, IB = r\csc\frac{B}{2}, IC = r\csc\frac{C}{2}$$

故
$$\frac{ID \cdot IF}{IB} = \frac{\frac{a}{2}\sec\frac{A}{2} \cdot \frac{c}{2}\sec\frac{C}{2}}{r\csc\frac{B}{2}} = \frac{ac\sec\frac{A}{2}\sec\frac{C}{2}}{4r\csc\frac{B}{2}} =$$

$$\frac{4R^2\sin A\sin C\sec\frac{A}{2}\sec\frac{C}{2}}{4r\csc\frac{B}{2}} =$$

$$\frac{4R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r} = R$$

$$\frac{IA \cdot IC}{IE} = \frac{r\csc\frac{A}{2} \cdot r\csc\frac{C}{2}}{\frac{b}{2}\sec\frac{B}{2}} = \frac{r^2\csc\frac{A}{2}\csc\frac{C}{2}}{R\sin B\sec\frac{B}{2}} =$$

$$\frac{r^2}{2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 2r$$



由题 10 可得
$$\frac{ID \cdot IF}{IB} = R, \frac{IA \cdot IB}{IF} = 2r$$
两式相乘,即知 $AI \cdot ID = 2Rr$,此即 1979 年山东省中学数学竞赛题.

又由 $\frac{IA \cdot IC}{IE} = 2r, BI \cdot IE = 2Rr$,两式相乘,得 $IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2$,此即[苏]Л.С.莫坚诺夫《初等数学习题汇编·平面几何》第 17 章 §3.10.

**题 11** $\frac{DP}{DQ} \cdot \frac{ER}{ES} \cdot \frac{FM}{FN} = 1$.

**证明** 因

$$\angle EDF = \angle EDA + \angle FDA = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

由题 1 知 $AA_1 \perp EF$,故 $\angle ASF = 90° - \frac{1}{2}\angle A$,从而 $\angle EDF = \angle ASF$,$F$、$S$、$R$、$D$ 四点共圆,得

$$ER \cdot ED = ES \cdot EF$$

同理
$$FM \cdot FE = FN \cdot FD, DP \cdot DF = DQ \cdot DE$$

此三式相乘,得 $DP \cdot ER \cdot FM = DQ \cdot ES \cdot FN$,此即结论.

由题11，$\frac{DP}{DQ}$、$\frac{ER}{ES}$、$\frac{FM}{FN}$之中，必有一个不超过1，也必有一个不小于1，此即《数学通报》1988年第12期“数学问题解答”第468题.

**题12**　$S' \geqslant S$.

（《数学教学》1983年第6期“数学问题与解答”第26题，1988年第29届IMO预选题第4题）

**证明**　易知，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的三内角关系式为

$$\angle D = \frac{\pi - \angle A}{2}, \angle E = \frac{\pi - \angle B}{2}, \angle F = \frac{\pi - \angle C}{2}$$

故得　$2S' = 4R'^2 \sin D \sin E \sin F = R^2(\sin 2D + \sin 2E + \sin 2F) =$

$$R^2(\sin A + \sin B + \sin C) = RP = R \cdot \frac{S}{r} = S \cdot \frac{R}{r} \geqslant 2S$$

故得

$$S' \geqslant S$$

**题13**　$16S'^3 \geqslant 27R^4 \cdot S$.

（1989年第30届IMO预选题第14题）

**证明**　由题12知$S' = \frac{RS}{2r}$，故只要证$2S^2 \geqslant 27Rr^3$，即

$$2p^2 \geqslant 27Rr = 27\frac{abc}{4p}$$

亦即$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$，此式显然成立.

**题14**　$p' \geqslant p, r' \geqslant r$.

（《首届全国数学奥林匹克命题比赛精选》题之一）

**证明**

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{S'}{r'}}{\frac{S}{r}} = \frac{S'r}{Sr'} = \frac{Rr}{2rr'} = \frac{R'}{2r'} \geqslant 1$$

即

$$p' \geqslant p$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{4R'\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2}}{\cos D\cos E\cos F}$$

因为

$$\cos D\cos E \leqslant \frac{1-\cos F}{2} = \sin^2\frac{F}{2}$$

同理

$$\cos E\cos F \leqslant \sin^2\frac{D}{2}, \cos F\cos D \leqslant \sin^2\frac{E}{2}$$

所以

$$\sin\frac{D}{2}\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2} \geqslant \cos D\cos E\cos F$$

故 $$r' \geqslant r$$

由 $p' \geqslant p$ 知，$a' < a, b' < b, c' < c$ 不能同时成立，此即《数学通报》1990年第11期"数学问题解答"第684题.

**题 15** $AF + FB + BD + DC + CE + EA \geqslant AD + BE + CF.$

(1991年国家教委数学试验班招生试题第4题)

**证明** 由题1知，$I$ 为 $\triangle DEF$ 的垂心，由题12知，$\triangle DEF$ 为锐角三角形，即点 $I$ 在 $\triangle DEF$ 的内部. 根据爱尔特希－莫德尔不等式，得

$$DI + EI + FI \geqslant 2(IA_1 + IB_1 + IC_1)$$

由题4知 $$2(IA_1 + IB_1 + IC_1) = AI + BI + CI$$

故 $$DI + EI + FI \geqslant AI + BI + CI$$

由题3知
$$\begin{aligned}&AF + FB + BD + DC + CE + EA = \\&2(ID + IE + IF) \geqslant (ID + IE + IF) + (AI + BI + CI) = \\&(AI + ID) + (BI + IE) + (CI + IF) = \\&AD + BE + CF\end{aligned}$$



**题 16** $AD + BE + CF > AB + BC + CA.$

(1982年澳大利亚数学竞赛题)

**证明** $\triangle BDC$ 中，$BD + CD > BC$，即 $2DI > BC$，同理

$$2EI > AC, 2FI > AB$$

所以

$$2(DI + EI + FI) > AB + BC + CA \qquad ①$$

$\triangle BIC$ 中，$IB + IC > BC$，同理

$$IC + IA > CA, IA + IB > AB$$

所以

$$2(IB + IC + IA) > AB + BC + CA \qquad ②$$

① + ② 即得结论.

**题 17** $IA \cdot IB \cdot IC \leqslant ID \cdot IE \cdot IF.$

(《中等数学》1998年第3期P23命题)

**证明** 据题10知

$$R = \frac{IE \cdot IF}{IA} = \frac{ID \cdot IF}{IB} = \frac{ID \cdot IE}{IC}$$

故 $$R^3 = \frac{(ID \cdot IE \cdot IF)^2}{IA \cdot IB \cdot IC}$$

同理 $$(2r)^3 = \frac{(IA \cdot IB \cdot IC)^2}{ID \cdot IE \cdot IF}$$

由熟知的不等式 $R \geqslant 2r$ 可得

$$(ID \cdot IE \cdot IF)^3 \geqslant (IA \cdot IB \cdot IC)^3$$

即
$$IA \cdot IB \cdot IC \leqslant ID \cdot IE \cdot IF$$

**题 18**　$ID + IE + IF \geqslant IA + IB + IC$.

（1990 年第 31 届 IMO 预选题第 106 题）

**证明**　由题 10 的推导得

$$ID = BD = \frac{a}{2}\sec\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}$$

$$IA = r\csc\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

等等，因此

$$\delta = ID + IE + IF - (IA + IB + IC) = 2R[\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - 2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}]$$

令 $t = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$，由熟知的公式

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{2R - r}{2R}$$

得
$$\delta = f(t) = 2R(-t^2 + t + \frac{2R - r}{2R})$$

又易知　$t - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}[(2\sin\frac{\alpha + \beta}{4} - \cos\frac{\alpha - \beta}{4})^2 + \sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}] \leqslant 0$

因此 $y = f(t)$ 的图象是抛物线的一段，$0 < t \leqslant \frac{3}{2}$，显然

$$f(0) = 2R - r > 0$$

从而
$$f(t) \geqslant 0$$

即
$$\delta \geqslant 0, ID + IE + IF \geqslant IA + IB + IC$$

**题 19**　$\frac{DA_0}{AA_0} + \frac{EB_0}{BB_0} + \frac{FC_0}{CC_0} \geqslant \frac{AA_1}{DA_1} + \frac{BB_1}{EB_1} + \frac{CC_1}{FC_1}$.

（《中学数学教学》1993 年第 4 期“有奖擂台题”）

**证明**　左边 $= \frac{S_{\triangle BDC}}{S} + \frac{S_{\triangle EAC}}{S} + \frac{S_{\triangle FAB}}{S} = \frac{S_{AFBDCE}}{S} - 1$

右边 $= \frac{S_{\triangle AEF}}{S'} + \frac{S_{\triangle BDF}}{S'} + \frac{S_{\triangle CDE}}{S'} = \frac{S_{AFBDCE}}{S'} - 1$

由题 12，$S' \geqslant S$ 知，左边 $\geqslant$ 右边.

**题 20** $\frac{DA_0}{AA_0}+\frac{EB_0}{BB_0}+\frac{FC_0}{CC_0}\geqslant 1.$

(《上海中学数学》1988 年第 4 期"数学问题与解答"第 4 题)

**证明** 由题 4 知,$EF$ 是 $AI$ 的中垂线,故 $S_{\triangle IEF}=S_{\triangle AEF}$,同理

$$S_{\triangle IFD}=S_{\triangle BFD},S_{\triangle IDE}=S_{\triangle CDE}$$

三式相加,即得 $$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle DCE}$$

故 $$2S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle DCE}=$$

$$S_{AFBDCE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ECA}+S_{\triangle FAB}$$

由题 12 知 $$S_{\triangle DEF}\geqslant S_{\triangle ABC}$$

可得 $$S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ECA}+S_{\triangle FAB}\geqslant S_{\triangle ABC}$$

即 $$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle ECA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle FAB}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant 1$$

亦即 $$\frac{DA_0}{AA_0}+\frac{EB_0}{BB_0}+\frac{FC_0}{CC_0}\geqslant 1$$



**题 21** ① $\frac{DA_0}{AA_1}+\frac{EB_0}{BB_1}+\frac{FC_0}{CC_1}\geqslant 3$;② $\frac{AA_1}{DA_0}+\frac{BB_1}{EB_0}+\frac{CC_1}{FC_0}\geqslant 3.$

(《中学教研》1993 年第 2 期"难题征解"第 19 题)

**证明** 由 $S_{\triangle DA_0B}+S_{\triangle DA_0C}=S_{\triangle DBC}$ 得

$$BD\cdot DA_0\sin C+DC\cdot DA_0\sin B=BD\cdot DC\sin(B+C)$$

注意到 $DB=DC=\frac{1}{2}a\sec\frac{A}{2}$ 得

$$DA_0=\frac{DB\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2R\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

又 $$AA_1=\frac{1}{2}AI=2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故 $$\frac{DA_0}{AA_1}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

同理 $$\frac{EB_0}{BB_1}=\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{FC_0}{CC_1}=\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

所以　$$\frac{DA_0}{AA_1}+\frac{EB_0}{BB_1}+\frac{FC_0}{CC_1}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{DA_0}{AA_1}\cdot\frac{EB_0}{BB_1}\cdot\frac{FC_0}{CC_1}}=$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}}\geqslant 3$$

其中,等号当且仅当 $\angle A=\angle B=\angle C$ 时成立.

另外,利用公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

等,易知

$$\frac{AA_1}{DA_0}+\frac{BB_1}{EB_0}+\frac{CC_1}{FC_0}=2p^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-3p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3$$

故欲证 ②,只须证明

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geqslant 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

由熟知的不等式　$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$$

可知 ② 成立,其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

**题 22**　(1) $\frac{AI^2}{bc}+\frac{BI^2}{ca}+\frac{CI^2}{ab}=1$.

(《数学通报》1994 年第 6 期“数学问题解答”第 898 题)

(2) $\frac{bc}{AI^2}+\frac{ca}{BI^2}+\frac{ab}{CI^2}\geqslant 9$.

(江苏省第三届部分中学高二数学通讯赛第五(2)题)

**证明**　由题 6 得 $\frac{AI}{IA_0}=\frac{b+c}{a}$,则

$$\frac{AI}{AA_0}=\frac{b+c}{a+b+c}$$

又由角平分线长公式得

$$AA_0=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

可得
$$\frac{AI^2}{bc}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$$
同理
$$\frac{BI^2}{ca}=\frac{c+a-b}{a+b+c},\frac{CI^2}{ab}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$
三式相加,即得
$$\frac{AI^2}{bc}+\frac{BI^2}{ca}+\frac{CI^2}{ab}=1$$
由题 18
$$AI=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
故
$$\frac{bc}{AI^2}=\frac{4R^2\sin B\sin C}{16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$
同理
$$\frac{ca}{BI^2}=\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},\frac{ab}{CI^2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$$
故得
$$\frac{bc}{AI^2}+\frac{ca}{BI^2}+\frac{ab}{CI^2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}\geqslant$$
$$3\sqrt[3]{(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2})^2}\geqslant3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2}=9$$



其中等号当且仅当 $\angle A=\angle B=\angle C$ 时成立.

**题 23** $AI+BI+CI\geqslant\frac{2}{3}(AA_0+BB_0+CC_0)\geqslant2(IA_0+IB_0+IC_0)$.

(《数学通讯》1994 年第 5 期"数学竞赛之窗"问题 84)

**证明** 由题 22 得
$$AI=\frac{b+c}{a+b+c}AA_0,BI=\frac{c+a}{a+b+c}BB_0,CI=\frac{a+b}{a+b+c}CC_0$$
不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则
$$b+c\geqslant c+a\geqslant a+b,AA_0\geqslant BB_0\geqslant CC_0$$
由切比雪夫不等式
$$AI+BI+CI\geqslant\frac{1}{3}(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c})\cdot$$
$$(AA_0+BB_0+CC_0)=\frac{2}{3}(AA_0+BB_0+CC_0)$$
而
$$IA_0+IB_0+IC_0=AA_0+BB_0+CC_0-(AI+BI+CI)\leqslant$$
$$AA_0+BB_0+CC_0-\frac{2}{3}(AA_0+BB_0+CC_0)=$$
$$\frac{1}{3}(AA_0+BB_0+CC_0)$$

**题24** $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA_0 \cdot BB_0 \cdot CC_0} \leqslant \frac{8}{27}$.

(1991年第32届IMO第1题)

**证明** 记 $x = \frac{AI}{AA_0}$,由题23,$x = \frac{b+c}{a+b+c}$,同理

$$y = \frac{BI}{BB_0} = \frac{c+a}{a+b+c}$$

$$z = \frac{CI}{CC_0} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

显然

$$x + y + z = 2$$

由均值不等式

$$xyz \leqslant (\frac{x+y+z}{3})^3 = \frac{8}{27}$$

另一方面,由三角形两边之和大于第三边可知

$$x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}, z > \frac{1}{2}$$

设

$$x = \frac{1+\varepsilon_1}{2}, y = \frac{1+\varepsilon_2}{2}, z = \frac{1+\varepsilon_3}{2}$$

其中,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 均为正数.且

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$$

于是

$$xyz = \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{8} > \frac{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{8} = \frac{1}{4}$$

## 第2节 位似变换①

设 $O$ 为平面 $\alpha$ 上一定点,$H$ 为 $\alpha$ 到自身的一一变换.如果对于 $\alpha$ 上任意异于点 $O$ 的点 $A$,在 $OA$ 所在直线上有点 $A'$,满足 $\overrightarrow{OA'} : \overrightarrow{OA} = k \neq 0$,则称 $H$ 为平面 $\alpha$ 上的位似变换,记为 $H(O,k)$.其中点 $O$ 为位似中心,$k$ 为位似系数或位似比.$A$ 与 $A'$ 在点 $O$ 的同侧时,$k > 0$,此时 $O$ 为外分点,此种变换称为正位似(或顺位似);$A$ 与 $A'$ 在点 $O$ 的两侧时,$k < 0$,此时 $O$ 为内分点,此种变换为反位似(或逆位似);在 $k = \pm 1$ 时是恒等变换和中心对称变换.点 $A$ 集及其像点 $A'$ 集称为位似变换下的位似形.

显然,位似变换是相似变换的特殊情形.平移变换可以看做是位似中心在无穷远点的位似变换.不难发现,一个反应似是一个中心对称与一个正位似的

① 沈文选.位似变换及其应用[J].中等数学,1994(2):1-3.

复合(或称乘积).

位似变换有如下一些有趣的性质.

**性质 1** 一对位似对应点与位似中心共直线.

**性质 2** 位似变换的逆变换仍是位似变换,其位似系数与原位似系数互为倒数.

**性质 3** 在位似变换下,一条线(直或曲)上的点变到一条线(直或曲)上,且保持顺序,即共线点变为共线点,共点线变为共点线.

**性质 4** 在位似变换下,一条直线变到与它平行的直线;任何两条直线的平行、相交的位置关系保持不变;圆变成圆,且两圆心是其对应点.除内含非同心圆外,任何两圆都是位似形,两圆相切时切点为位似中心,两圆外离时外(内)公切线的交点为其正(反)位似中心,两非等圆相交时外公切线交点为正位似中心.

**性质 5** 在位似变换下,对应线段的比等于位似比的绝对值,对应图形面积的比等于位似比的平方.



**性质 6** 在位似变换下,圆和圆、圆和直线、直线和直线的交角均保持不变.

**性质 7** 分别以 $k_1$ 和 $k_2(k_1k_2\neq 1)$ 为位似比的两个位似变换的复合(乘积)是一个以 $k_1k_2$ 为位似比的位似变换,它的中心在已知的两个位似中心的连线上.特别地,两个正(反)位似变换之积是正位似,两个位似变换中有且仅有一个反位似时,其积也是反位似.

下面仅给出性质 7 的略证.

设 $A$、$B$ 是平面 $\alpha$ 上任两点,在 $H(O_1,k_1)$ 下的像为 $A'$、$B'$;$A'$、$B'$ 在 $H(O_2,k_2)$ 下的像是 $A''$、$B''$.因 $\overrightarrow{A'B'}=k_1\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{A''B''}=k_2\overrightarrow{A'B'}$,所以 $\overrightarrow{A''B''}=k_1k_2\overrightarrow{AB}$.因 $k_1k_2\neq 1$,所以直线 $AA''$ 与 $BB''$ 必相交于某一点 $O$.否则,四边形 $ABB''A''$ 是平行四边形,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A''B''}$.由于 $\triangle AOB$ 和 $\triangle A''OB''$ 的相似比为 $k_1k_2$,故 $\overrightarrow{OA''}=k_1k_2\overrightarrow{OA}$,点 $O$ 是这种变换下的不变点.这表明,当 $k_1k_2\neq 1$ 时,位似变换 $H(O_1,k_1)$ 与 $H(O_2,k_2)$ 的积是位似变换 $H(O,k_1k_2)$.

下面证 $O$ 在直线 $O_1O_2$ 上.因

$$\overrightarrow{O_1A'}=k_1\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_2A''}=k_2\overrightarrow{O_2A'}$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_2A''}&=k_2(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1A'})=k_2(\overrightarrow{O_2O_1}+k_1\overrightarrow{OA})=\\&k_2\overrightarrow{O_2O_1}+k_1k_2\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2A}=\\&(k_1k_2-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2A}\end{aligned}$$

这表明在位似变换 $H(O,k_1k_2)$ 下，任一点 $A$ 和它的像 $A''$ 与两个定点 $O_1$、$O_2$ 之间的关系．对于不变点 $O$，也应有 $\overrightarrow{O_2O}=(k_1k_2-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2O}$，即 $\overrightarrow{O_2O}=\frac{k_1k_2-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$．此式表明点 $O$ 在直线 $O_1O_2$ 上．

**注**　当 $k_1k_2=1$ 时，若把位似中心看做无穷远点，性质7是成立的，且可改写成任何三个互相位似的图形的位似中心共线．

合理运用位似变换解题，是一种重要的解题思路．下面我们从八个方面列举一些例子．

*1．证明点共直线*

**例1**　三个全等的圆有一个公共点 $Q$，且都在一个已知三角形内，每一个圆与三角形的两条边相切．求证：三角形的内心 $I$、外心 $O$ 与点 $Q$ 共线．

（1981年第22届IMO第5题）

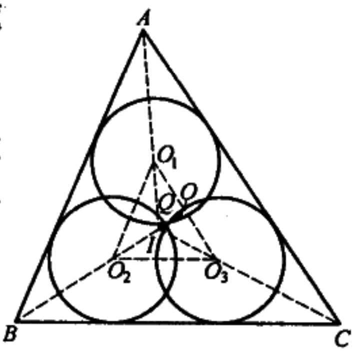


图16.16

**分析**　要证三点共线，若能证其中两点是以第三点为位似中心的一双对应点即可．如图16.16所示，易知 $\triangle O_1O_2O_3\backsim\triangle ABC$，又 $AO_1$、$BO_2$、$CO_3$ 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，应交于 $\triangle ABC$ 的内心 $I$．因此，$I$ 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle O_1O_2O_3$ 的位似中心．又 $QO_1=QO_2=QO_3$，即 $Q$ 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外心，且 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心．由此即证．

*2．证明点共圆*

**例2**　如图16.17，设 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，$L$、$M$、$N$ 分别是 $BC$、$CA$、$AB$ 边的中点，$D$、$E$、$F$ 分别是三条高的垂足，$P$、$Q$、$R$ 分别是 $HA$、$HB$、$HC$ 的中点．求证：$L$、$M$、$N$、$D$、$E$、$F$、$P$、$Q$、$R$ 共圆．

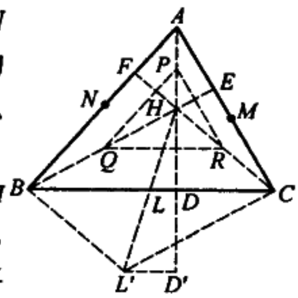


图16.17

**分析**　由于 $P$、$Q$、$R$ 分别是 $HA$、$HB$、$HC$ 的中点，故以 $H$ 为位似中心、位似比为2的位似变换把圆 $PQR$ 变成圆 $ABC$．因此，要证明 $L$、$M$、$N$、$D$、$E$、$F$ 在圆 $PQR$ 上，只要证明这些点在上述位似变换下的像点均在圆 $ABC$ 上即可．联结 $HL$ 并延长至 $L'$，使 $LL'=HL$．则 $L'B\parallel CF$，$L'C\parallel BE$．从而，$\angle L'BA=\angle L'CA=90°$，即知 $L'$ 在圆 $ABC$ 上．同理，$M$、$N$ 的像 $M'$、$N'$ 也在圆 $ABC$ 上．延长 $HD$ 至 $D'$，使 $DD'=HD$，$L'D'\parallel LD$．有 $\angle DD'L'=90°$，即知 $D'$ 在圆 $ABC$ 上．同理，$E$、$F$ 的像 $E'$、$F'$ 也在圆 $ABC$ 上．再由上述位似变换之逆即证．

*3．证明直线共点*

**例3**　如图16.18，$\triangle A_1A_2A_3$ 是一个非等腰三角形，它的边分别为 $a_1$、$a_2$、$a_3$，其中 $a_i$ 是 $\angle A_i$ 的对边（$i=1,2,3$），$M_i$ 是边 $a_i$ 的中点．$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆

圆 $I$ 切边 $a_i$ 于点 $T_i$，$S_i$ 是 $T_i$ 关于 $\angle A_i$ 平分线的对称点.求证:$M_1S_1$、$M_2S_2$、$M_3S_3$ 三线共点.

(1982年第23届IMO第2题)

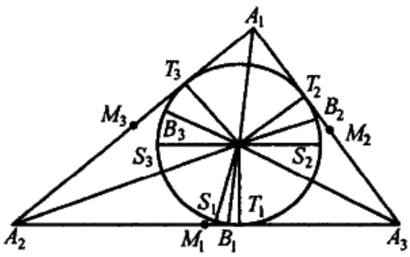



图 16.18

**分析** 由 $M_1M_2 /\!/ A_2A_1$，我们希望 $S_1S_2 /\!/ A_2A_1$.由题设，$T_1$ 与 $S_1$，$T_2$ 与 $T_3$ 都关于 $A_1B_1$ 对称，则 $\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_1}$.又 $T_2$ 与 $S_2$，$T_3$ 与 $T_1$ 关于 $A_2B_2$ 对称，则 $\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_2}$.有 $T_3I \perp S_1S_2$，故 $S_1S_2 /\!/ A_2A_1$.同理 $S_2S_3 /\!/ A_3A_2$，$S_3S_1 /\!/ A_1A_3$，又 $M_1M_2 /\!/ A_2A_1$，$M_2M_3 /\!/ A_3A_2$，$M_3M_1 /\!/ A_1A_3$，于是，$\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行，故这两三角形或全等或位似.

由于 $\triangle S_1S_2S_3$ 内接于内切圆 $I$，而 $\triangle M_1M_2M_3$ 内接于九点圆，且 $\triangle A_1A_2A_3$ 为不规则三角形，故内切圆与九点圆不重合.所以 $\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 位似.可证 $M_1S_1$、$M_2S_2$、$M_3S_3$ 共点，即共点于位似中心.



### 4.证明角相等

**例4** 如图16.19，四边形 $ABCD$ 中，以一双对边的比 $AB:CD$ 内分另一双对边 $AD$、$BC$ 于 $E$、$F$，延长 $BA$、$CD$ 与 $FE$ 的延长线分别相交于 $G$、$Q$.试证:$\angle BGF=\angle FQC$.

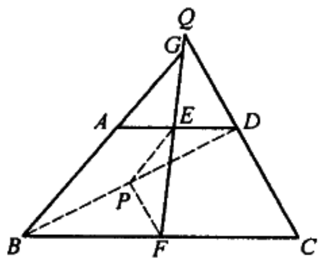



图 16.19

**分析** 由于要证明的两角在两个三角形中，且题设中有线段的比内分不在一条直线上两线段，条件较分散，需要作辅助线将条件集中.不妨联结 $BD$，则

$$C \xrightarrow{H\left(B,\frac{CD}{AB+CD}\right)} F,\ A \xrightarrow{H\left(D,\frac{CD}{AB+CD}\right)} E$$

假设

$$D \xrightarrow{H\left(B,\frac{AB}{AB+CD}\right)} P$$

即

$$\frac{BP}{BD}=\frac{AB}{AB+CD}$$

则

$$\frac{DP}{DB}=\frac{CD}{AB+CD}$$

故

$$B \xrightarrow{H\left(D,\frac{CD}{AB+CD}\right)} P$$

因为在位似变换下，直线变成与它平行的直线，则 $PF /\!/ CD$，$PE /\!/ AB$.从而

$$\angle PEF=\angle BGF,\angle PFE=\angle FQC$$

又

$$\frac{BF}{BC}=\frac{BP}{BD}=\frac{PF}{CD},\frac{DE}{DA}=\frac{DP}{DB}=\frac{PE}{AB}$$

由上两式相除得
$$\frac{AB}{CD}\cdot\frac{PF}{PE}=\frac{BP}{DP}$$
又
$$\frac{BP}{PD}=\frac{AE}{ED}=\frac{AB}{CD}$$
则
$$\frac{PF}{PE}=1$$
从而
$$\angle PEF=\angle PFE$$
故
$$\angle BGF=\angle FQC$$

### 5.求解线段关系式

**例5** 如图16.20,四边形 $ABCD$ 的对边 $AD$、$BC$ 的延长线交于点 $E$,$AB$、$CD$ 的延长线交于点 $F$,$O$ 为其对角线交点,过 $O$ 作 $AB$ 的平行线 $OQ$ 交 $DF$ 于点 $G$,交 $EF$ 于点 $Q$.求证:$OG=GQ$.

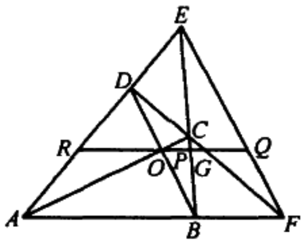


图16.20

**分析** 设 $QGO$ 交 $AD$ 于 $R$,交 $EB$ 于 $P$.作位似变换
$$A,B,F\xrightarrow{H(E,\frac{ER}{EA})}R,P,Q$$
$$A,B,F\xrightarrow{H(C,\frac{CO}{CA})}O,P,G$$
$$A,B,F\xrightarrow{H(D,\frac{DR}{DA})}R,O,G$$
则
$$\frac{RQ}{AF}=\frac{RP}{AB},\frac{RO}{AB}=\frac{RG}{AF},\frac{OP}{AB}=\frac{OG}{AF}$$
由
$$\frac{GQ}{AF}=\frac{RQ-RG}{AF}=\frac{RQ}{AF}-\frac{RG}{AF}=\frac{RP}{AB}-\frac{RO}{AB}=\frac{OP}{AB}=\frac{OG}{AF}$$
即证得
$$GQ=OG$$

### 6.求解一类轨迹问题

联结不在二次曲线 $C$ 上的定点 $P$ 与曲线 $C$ 上的动点 $Q$,点 $M$ 分 $PQ$ 成定比 $\lambda$ 时,则点 $M$ 的轨迹是与曲线 $C$ 位似的曲线 $C'$.定点 $P$ 为位似中心,定值 $\frac{\lambda}{1+\lambda}$(或 $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 或 $\frac{\lambda}{\lambda-1}$)为位似比.

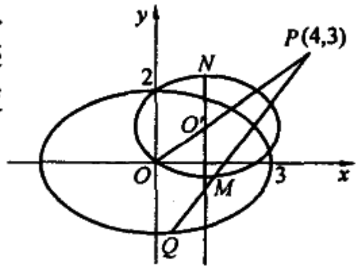


图16.21

**例6** 如图16.21,从 $P(4,3)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上任一点 $Q$ 作线段,点 $M$ 内分 $PQ$ 成 $2:1$.求点 $M$ 的轨迹方程,并问点 $M$ 在何处时,它与椭圆两焦点 $F_1$、$F_2$ 所成的三角形面积最大?

**分析** 由题设,位似中心为 $P(4,3)$,位似比 $\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{2}{3}$. 由位似变换的性质 5,曲线 $C'$ 的有关数据均为 $C$ 的对应数据与位似比的乘积,可知所求轨迹是椭圆,且长、短半轴为 $2$, $\frac{4}{3}$,中心为 $O'(\frac{4}{3},1)$.

欲使 $S_{\triangle MF_1F_2}$ 最大,$M$ 应在轨迹椭圆中纵坐标最大的顶点 $N(\frac{4}{3},\frac{7}{3})$ 处.

**7. 位似旋转变换**

具有共同中心的位似变换 $H(O,k)$ 和旋转变换 $r(O,\theta)$ 的复合,便得位似旋转变换 $S(O,\theta,k)$,即

$$S(O,\theta,k)=H(O,k)\circ r(O,\theta)=r(O,\theta)\circ H(O,k)$$

**例 7** $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形. 现固定 $\triangle ABC$,而将 $\triangle ADE$ 绕点 $A$ 在平面上旋转. 试证:不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置,线段 $EC$ 上必存在点 $M$,使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

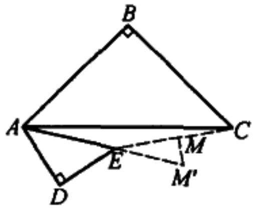


图 16.22

(1987 全国高中联赛)



**分析** 设 $\triangle ADE$ 在旋转过程中的任一位置如图 16.22 所示. 考虑这样两个位似旋转变换:$S(E,45^\circ,\sqrt{2})$ 和 $S(C,45^\circ,\frac{\sqrt{2}}{2})$. 在前一个变换下,点 $D$ 变到点 $A$, $BC$ 的中点 $M$ 变到 $M'$;在第二个变换下,点 $A$ 变到点 $B$,点 $M'$ 变到点 $M$. 因此,$M$ 是两个变换的复合的不变点. 由于 $S(E,45^\circ,\sqrt{2})\circ S(M,45^\circ,\frac{\sqrt{2}}{2})=S(M,90^\circ,1)$. 在这个复合变换下点 $D$ 变到 $B$,所以 $\angle DMB=90^\circ$. 又 $DM=BM$,由此证得命题成立.

# 第 17 章　1995 ~ 1996 年度试题的诠释

**试题 A**　菱形 $ABCD$ 的内切圆 $O$ 与各边的切点依次为 $E$、$F$、$G$、$H$，在 $\overset{\frown}{EF}$ 和 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作圆 $O$ 的切线交 $AB$ 于点 $M$，交 $BC$ 于点 $N$，交 $CD$ 于点 $P$，交 $DA$ 于点 $Q$，求证：$MQ \parallel NP$.

**证法 1**　如图 17.1，联结 $AC$、$BD$ 交于内切圆的圆心 $O$，记 $MN$ 与圆 $O$ 的切点为 $L$，联结 $OE$、$OF$、$OM$、$ON$、$OL$，于是有

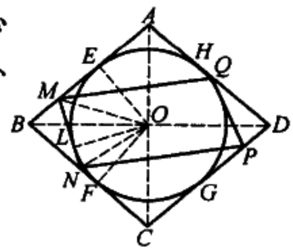



图 17.1

$$OE \perp AB, OF \perp BC, OL \perp MN$$

记　$\angle MOE = \alpha, \angle NOF = \beta, \angle ABO = \varphi$

于是由　$\angle BMN = 2\alpha, \angle BNM = 2\beta$

知　$2\varphi + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

即　$\varphi + \alpha + \beta = 90^\circ$

从而　$\angle AOM = \varphi + \alpha = \angle CNO$

$\angle CON = \varphi + \beta = \angle AMO$

于是　$\triangle AMO \backsim \triangle CON$

即　$AM \cdot CN = AO \cdot OC$

同理　$AO \cdot OC = AQ \cdot CP$

则　$AM \cdot CN = AQ \cdot CP$

从而　$\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$

即　$\angle CNP = \angle AQM$

则　$\angle AMQ + \angle CNP = \angle AMQ + \angle AQM = 180^\circ - \angle A = 2\varphi$

于是　$\angle QMN + \angle MNP = 180^\circ$

故　$MQ \parallel NP$

**注**　或者由

$$\angle EOF = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\varphi$$

知　$\angle BON = 90^\circ - \varphi - \beta = \alpha$

$$\angle CNO = \angle NBO + \angle BON = \varphi + \alpha = \angle AOM$$

又 $\angle OCN = \angle MAO$

则 $\triangle OCN \backsim \triangle MAO$

于是 $AM \cdot CN = CO \cdot AO$

同理 $AQ \cdot CP = CO \cdot AO$

从而 $AM \cdot CN = AQ \cdot CP$

又 $\angle MAQ = \angle PCN$

则 $\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$

即 $\angle AMQ = \angle CPN$

从而 $MQ \parallel NP$

**证法2** 作辅助线同证法1,于是有 $\varphi + \alpha + \beta = 90°$,记圆 $O$ 半径为 $R$.因

$$\angle AOB = 90° = \angle AEO$$

则 $\angle AOE = \varphi$

同理 $\angle COF = \varphi$



于是 $AM = AE + EM = R\tan\varphi + R\tan\alpha = R(\tan\varphi + \tan\alpha)$

$$CN = CF + FN = R(\tan\varphi + \tan\beta)$$

则

$$AM \cdot CN = R^2(\tan\varphi + \tan\alpha)(\tan\varphi + \tan\beta) =$$

$$R^2 \cdot \frac{\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha}{\cos\varphi\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\beta}{\cos\varphi\cos\beta} =$$

$$R^2 \cdot \frac{\sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \beta)}{\cos^2\varphi\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$R^2 \cdot \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\cos^2\varphi\cos\alpha\cos\beta} = \frac{R^2}{\cos^2\varphi}$$

同理 $AQ \cdot CP = \dfrac{R^2}{\cos^2\varphi}$

从而 $AQ \cdot CP = AM \cdot CN$

则 $\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$

即 $\angle AQM = \angle CNP$

故 $\angle AMQ + \angle CNP = \angle AMQ + \angle AQM = 180° - \angle A = 2\varphi$

即 $\angle QMN + \angle MNP = 360° - (\angle AMQ - \angle BMN - \angle BNM - \angle CNP) = 180°$

所以 $MQ \parallel NP$

**证法3** 先证明下述引理:如图17.2所示,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,半圆 $O$ 分别切 $AB$、$AC$ 点于 $E$、$F$,在 $\overset{\frown}{EF}$ 上任作半圆 $O$ 的切线 $MN$,交 $AB$、$AC$ 于 $M$、$N$.

则

$$BM \cdot CN = OB^2$$

联结 $OM$、$ON$,则

$$\angle BMO = \angle NMO = \frac{1}{2}(\angle A + \angle 2)$$

$$\angle CNO = \angle MNO = \frac{1}{2}(\angle A + \angle 1)$$

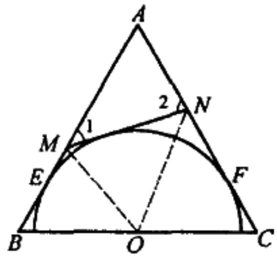



图 17.2

从而　$\angle MON = 180^\circ - (\angle MNO + \angle NMO) =$

$$90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle B = \angle C$$

于是

$$\triangle BMO \backsim \triangle OMN \backsim \triangle CON$$

则

$$\frac{BM}{OB} = \frac{CO}{NC}$$

即

$$BM \cdot CN = OB^2$$

下面来证原题,在图 17.1 中,联结 $AC$.对 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$ 用前述引理,得

$$AM \cdot CN = OA^2 = AQ \cdot CP$$

即

$$AM : AQ = CP : CN$$

又 $\angle MAQ = \angle PCN$,$\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$,则

$$\angle AMQ = \angle CPN$$

从而

$$MQ \parallel NP$$



下述证法 4、5 由江苏茹双林给出.

**分析**　设内切圆半径为 1,建立坐标系,则可引进适当角后,用复数表示各点,从而用复数表示 $\overrightarrow{MQ}$ 与 $\overrightarrow{NP}$.

**证法 4**　如图 17.3,设 $\angle DOH = \theta$(定值),$\angle DOQ = \theta_1$,$\angle DOM = \pi - \theta_2$. 而 $\angle POQ = \theta$,则 $\angle DOP = \theta - \theta_1$.同理,$\angle BON = \theta - \theta_2$.则

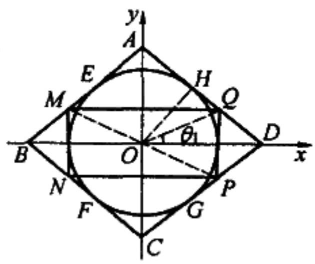



图 17.3

$$z_Q = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_1)}(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$$

$$z_M = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_2)}[\cos(\pi - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\pi - \theta_2)] =$$

$$\frac{1}{\cos(\theta - \theta_2)}(-\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

$$z_P=\frac{1}{\cos\theta_1}[\cos(\theta-\theta_1)-\mathrm{i}\sin(\theta-\theta_1)]$$

$$z_N=\frac{1}{\cos\theta_2}[-\cos(\theta-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta-\theta_2)]$$

故

$$z_{MQ}=\frac{1}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)}\{[\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2)+\cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]+\mathrm{i}[\sin\theta_1\cos(\theta-\theta_2)-\sin\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]\}=\cdots$$

上式虚部 $=\sin\theta_1\cos\theta\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta\sin\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta_2\sin\theta\sin\theta_1=\cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)$

同理 $$z_{NP}=\frac{1}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\{[\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2)+\cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1)+\mathrm{i}\cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)]\}$$

则 $$\frac{z_{MQ}}{z_{NP}}=\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)}\in\mathbf{R}$$



故 $$MQ\ /\!/\ NP$$

**分析** 建立如图17.3所示的直角坐标系,设切线 $PQ$、$MN$ 的切点分别为 $I$、$J$.因 $M$、$Q$ 的坐标分别依赖于 $I$、$J$ 的位置,故可引进 $I$、$J$ 的某圆心角作为参数表示 $k_{MQ}$,也可表示 $k_{PN}$,然后证明 $k_{MQ}=k_{PN}$.

**证法5** 设 $\angle DOH=\alpha$(定值),$\angle DOI=\alpha_1$,$\angle DOJ=\alpha_2+\pi$.其中,$-\alpha<\alpha_1$、$\alpha_2<\alpha$,圆 $O$ 的方程为 $x^2+y^2=r^2$.则 $AD$ 的方程为

$$\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y=r$$

$AB$ 的方程为 $$-\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y=r$$

$BC$ 的方程为 $$-\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y=r$$

$CD$ 的方程为 $$\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y=r$$

$PQ$ 的方程为 $$\cos\alpha_1\cdot x+\sin\alpha_1\cdot y=r$$

$MN$ 的方程为 $$\cos\alpha_2\cdot x+\sin\alpha_2\cdot y=-r$$

由 $AD$ 和 $PQ$ 的方程解得点 $Q$ 的坐标为

$$Q\left(\frac{\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cdot r}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}},\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cdot r}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}\right)$$

由 $AB$ 和 $MN$ 的方程解得点 $M$ 的坐标为

$$M\left(\frac{-\cos\frac{\alpha-\alpha_2}{2}\cdot r}{\cos\frac{\alpha+\alpha_2}{2}},\frac{\sin\frac{\alpha-\alpha_2}{2}\cdot r}{\cos\frac{\alpha+\alpha_2}{2}}\right)$$

则
$$k_{QM}=\frac{y_M-y_Q}{x_M-x_Q}=\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}$$

同理
$$k_{PN}=k_{QM}$$

故
$$QM\ /\!/\ PN$$

**证法 6** （由安徽李彪、汪春杰给出）如图 17.4，设 $AE=a,BE=b,ME=m,NF=n,GP=s,QH=t$．则

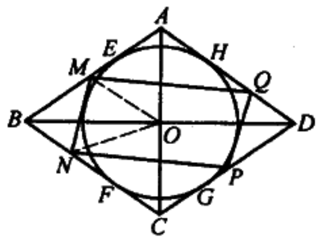



图 17.4

$$CF=CG=AH=AE=a$$
$$DG=DH=BF=BE=b$$
$$MN=ME+NF=m+n$$
$$PQ=PG+QH=s+t$$
$$BM=BE-ME=b-m$$
$$BN=BF-NF=b-n$$

$$MQ\ /\!/\ NP\Leftrightarrow\angle AMQ=\angle CPN\Leftrightarrow\triangle AMQ\backsim\triangle CPN\Leftrightarrow\frac{AM}{AQ}=\frac{CP}{CN}\Leftrightarrow$$
$$(a+m)(a+n)=(a+s)(a+t)\Leftrightarrow$$
$$a(m+n)+mn=a(s+t)+st \qquad ①$$

另一方面，设圆 $O$ 的半径为 $r$，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b)^2\sin\angle ABC=r(a+b)$$

即
$$\sin\angle ABC=\frac{2r}{a+b}$$

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMO}+S_{\triangle MNO}+S_{\triangle NCO}+S_{\triangle BMN}=$$
$$\frac{r}{2}(a+m)+\frac{r}{2}(m+n)+\frac{r}{2}(a+n)+$$
$$\frac{1}{2}(b-m)(b-n)\sin\angle ABC=$$
$$r\left[(a+m+n)+\frac{(b-m)(b-n)}{a+b}\right]$$

同理 $$S_{\triangle CDA}=r[(a+s+t)+\frac{(b-s)(b-t)}{a+b}]$$

从而 $$(a+m+n)+\frac{b^2-bm-bn+mn}{a+b}=$$

$$(a+s+t)+\frac{b^2-bs-bt+st}{a+b}\Leftrightarrow$$

$$a(m+n)+b(m+n)+b^2-bm-bn-mn=$$

$$a(s+t)+b(s+t)+b^2-bs-bt+st\Leftrightarrow$$

$$a(m+n)+mn=a(s+t)+st$$

式 ① 成立,故原命题成立.

下面的证法 7 由天津李宝毅、直笔,陕西王杨,福建张鹏程给出.

**证法 7** 建立点 $O$ 为原点,以对角线 $AC$、$BD$ 分别为 $y$ 轴和 $x$ 轴的坐标系,如图 17.5 所示.设圆 $O$ 半径为 1,点 $H$ 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$.于是点 $A$ 和 $D$ 的坐标分别为 $(0,\frac{1}{\sin\theta})$ 和 $(\frac{1}{\cos\theta},0)$,直线 $AD$ 的方程为



$$x\cos\theta+y\sin\theta=1 \quad ①$$

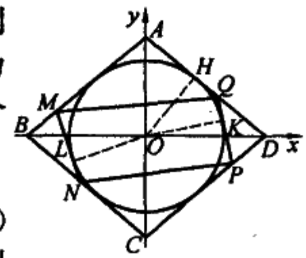



图 17.5

由对称性知菱形的另外三边所在直线的方程分别为

$$AB:-x\cos\theta+y\sin\theta=1 \quad ②$$

$$BC:-x\cos\theta-y\sin\theta=1 \quad ③$$

$$CD:x\cos\theta-y\sin\theta=1 \quad ④$$

设 $PQ$ 与圆 $O$ 切点 $K$ 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$MN$ 与圆 $O$ 切点 $L$ 的坐标为 $(\cos\beta,\sin\beta)$.于是直线 $PQ$ 的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1 \quad ⑤$$

将 ④ 与 ⑤ 联立并解出点 $P$ 的坐标为

$$x_P=\frac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}},y_P=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}} \quad ⑥$$

完全平行地可以求得

$$x_Q=\frac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}},y_Q=\frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}} \quad ⑦$$

$$x_M=\frac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}},y_M=\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}} \quad ⑧$$

$$x_N=\frac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}},y_N=\frac{-\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}} \quad ⑨$$

由 ⑥ ~ ⑨ 即可求得直线 $MQ$、$NP$ 的斜率为

$$k_{MQ}=\frac{\dfrac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$$

$$k_{NP}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}+\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

从而

$$K_{MQ}=K_{NP}$$

故

$$MQ\ /\!/\ NP$$

**注**　此届联赛由广西承办.①

命题小组在研究本题的过程中发现:菱形 $ABCD$ 不仅是 $MQ\ /\!/\ NP$ 的充分

① 曾晓新,袁绍唐,宣泽永.1995 年全国高中联赛命题工作回顾及试题解答[J].数学通讯,1996(2):39-44.

条件,也是 $MQ // NP$ 的必要条件.由于此题难度相对偏低,因而有人提议改证充分条件为证充要条件.后来考虑到二试的平几题一贯偏难,以致很多考生干脆放弃,失去了平几题的考查作用,改证充分条件为证充要条件的提议未被采纳.此次平几题难度相对偏低,就是想消除多数考生对平几题的畏难心理.下面关于其必要条件的证明由广西师范大学汤服成老师给出.

**问题1** 如图17.6,四边形 $ABCD$ 外切于圆 $O$,$E$、$F$、$G$、$H$ 为切点.如果过 $\overset{\frown}{EF}$ 上的任一点 $L$ 作圆 $O$ 的切线交 $AB$、$BC$ 于 $M$、$N$,过 $\overset{\frown}{GH}$ 上的任一点 $K$ 作圆 $O$ 的切线交 $AD$、$CD$ 于 $Q$、$P$,总有 $MQ // NP$ 成立,则必有 $AB = AD$,$CB = CD$.

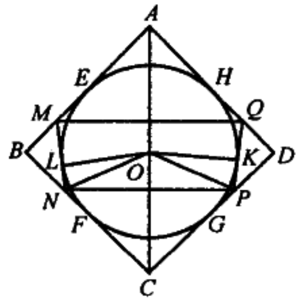



图 17.6

**证明** 联结 $OA$、$OC$,易知 $\angle BAO = \angle DAO$,$\angle BCO = \angle DCO$.在 $BF$、$DG$ 上各取一点,不妨设为 $N$、$P$,使 $FN = GP$.过点 $N$ 作圆 $O$ 的切线切圆 $O$ 于 $L$ 交 $AB$ 于点 $M$,过 $G$ 作圆 $O$ 的切线切圆 $O$ 于点 $K$ 交 $AD$ 于点 $Q$.由问题假设,知

$$NP // MQ$$

由
$$CN = CF + FN = CG + GP = CP$$
有
$$OC \perp NP$$
则
$$ON = OP, \angle ONP = \angle OPN$$
易证
$$\text{Rt}\triangle OLN \cong \text{Rt}\triangle OKP$$
即
$$\angle ONL = \angle OPK, \angle LNP = \angle KPN$$
因此 $MNPQ$ 为等腰梯形.即
$$MN = QP$$
进而
$$ML = QK, ME = HQ, AM = AQ$$
则
$$OA \perp MQ$$
但
$$MQ // NP$$
则 $A$、$O$、$C$ 共线.故
$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$
得
$$AB = AD, CB = CD$$

**问题2** 如图17.7,四边形 $ABCD$ 外切于圆 $O$,$E$、$F$、$G$、$H$ 为切点.如果过 $\overset{\frown}{EH}$ 上的任一点 $L'$ 作圆 $O$ 的切线交 $AB$、$AD$ 于点 $M'$、$Q'$,过 $\overset{\frown}{FG}$ 上任一点 $K'$ 作圆 $O$ 的切线交 $CB$、$CD$ 于点 $N'$、$P'$,总有 $M'N' // Q'P'$ 成立,则必有 $BA = BC$,$DA = DC$.

证明完全类似问题1.

根据以上两问题的证明,立即可以知道:如果一个外切于圆 $O$ 的四边形 $ABCD$ 同时满足问题1和问题2的条件,那么 $ABCD$ 一定是菱形.这也就是说原问题的逆命题成立.

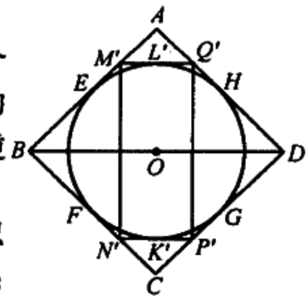



图 17.7

**试题 B1**　设 $H$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,由 $A$ 向以 $BC$ 为直径的圆作切线 $AP$、$AQ$,切点分别为 $P$、$Q$,求证:$P$、$H$、$Q$ 三点共线.

**证法 1**　记 $BC$ 中点为 $O$,联结 $PQ$、$AO$ 交于点 $G$,于是 $AO \perp PQ$.设 $AD$、$BE$ 是 $\triangle ABC$ 的两条高,于是点 $E$ 在圆 $O$ 上.因

$$\angle HEC = 90^\circ = \angle HDC$$

则 $H$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆.即

$$AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$$

联结 $OQ$,于是 $OQ \perp AQ$.由射影定理有

$$AG \cdot AO = AQ^2 = AH \cdot AD$$

则 $G$、$O$、$D$、$H$ 四点共圆.

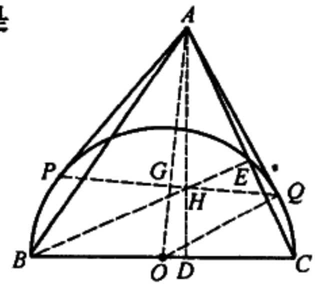



图 17.8

联结 $HG$,于是有

$$\angle HGO = 180^\circ - \angle HDO = 90^\circ = \angle QGO$$

故直线 $HG$ 与 $PQ$ 重合,即 $P$、$H$、$Q$ 三点共线.

**证法 2**　如图17.9,记 $BC$ 中点为 $O$,联结 $PH$、$QH$、$PD$、$QD$、$AO$、$OP$、$OQ$,并设 $AD$、$BE$ 为 $\triangle ABC$ 的两条高,于是点 $E$ 在圆 $O$ 上且有

$$OP \perp AP, OQ \perp AQ$$

由

$$\angle APO = 90^\circ = \angle AQO = \angle ADO$$

知 $A$、$P$、$O$、$D$、$Q$ 五点共圆,则

$$\angle APD + \angle AQD = 180^\circ$$

又

$$\angle HEC = 90^\circ = \angle HDC$$

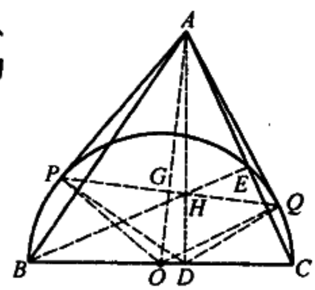



图 17.9

有 $H$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆,则

$$AP^2 = AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$$

即过 $H$、$D$、$Q$ 三点的圆与 $AQ$ 切于点 $Q$,过 $H$、$D$、$P$ 三点的圆与 $AP$ 切于点 $P$.从而

$$\angle AHP = \angle APD, \angle AHQ = \angle AQD$$

则 $$\angle AHP + \angle AHQ = \angle APD + \angle AQD = 180°$$

故 $P$、$H$、$Q$ 三点共线.

**证法 3** (由苏州大学朱汉林给出) 如图 17.10,若设 $BC$ 边上的高线为 $AE$,再设 $PQ$ 与 $AE$ 交于 $H_0$. 于是,要证 $P$、$H$、$Q$ 三点共线,现可改证 $H_0$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

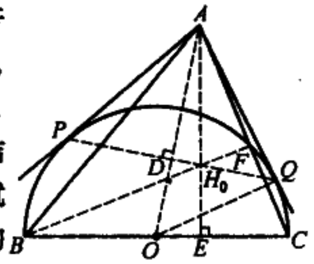


图 17.10

设以 $BC$ 为直径的圆 $O$ 与 $AC$ 的另一交点为 $F$,联结 $BF$,则 $BF \perp AC$. 于是,若能证得 $H_0F \perp AC$,则 $H_0$ 就在 $BF$ 上,又因为 $H_0$ 在 $AE$ 上,从而 $H_0$ 就是 $\triangle ABC$ 的垂心了.

而要证 $H_0F \perp AC$,现只须证 $H_0$、$E$、$C$、$F$ 四点共圆.

事实上,如图 17.10 所示,联结 $OQ$、$OA$,则 $OQ \perp AQ$,且 $PQ \perp AO$,垂足记为 $D$. 于是,由射影定理,有

$$AQ^2 = AD \cdot AO \quad ①$$

由 $D$、$O$、$E$、$H_0$ 四点共圆,得

$$AD \cdot AO = AH_0 \cdot AE \quad ②$$

又由切割线定理,有

$$AQ^2 = AF \cdot AC \quad ③$$

因此,由①、②、③得 $AF \cdot AC = AH_0 \cdot AE$,从而可得 $H_0$、$E$、$C$、$F$ 四点共圆.

**证法 4** (由江苏兴化中学蔡玉书给出) 如图 17.11,以 $BC$ 为 $x$ 轴,$BC$ 的中垂线为 $y$ 轴建立直角坐标系,设 $B(-1,0)$、$C(1,0)$、$A(x_0,y_0)$($x_0^2+y_0^2>1$),则以 $BC$ 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$.

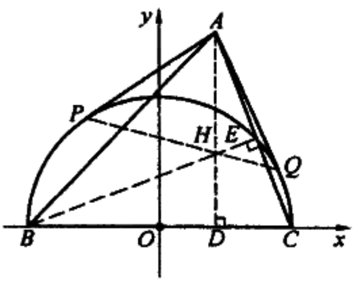


图 17.11

由解析几何知识得直线 $PQ$ 的方程是

$$x_0x + y_0y = 1 \quad ①$$

直线 $AD$ 的方程是

$$x = x_0 \quad ②$$

直线 $BE$ 的方程是

$$y = -\frac{x_0 - 1}{y_0}(x + 1) \qquad ③$$

由②、③得垂心 $H(x_0, \frac{1 - x_0^2}{y_0})$，显见点 $H$ 在直线 $PQ$ 上.

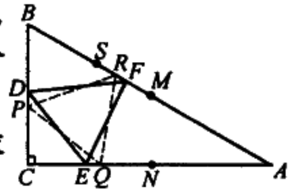



图 17.12

**试题 B2**　如图 17.12，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$BC = 1$. 求 $\triangle ABC$ 的内接三角形(三顶点分别在三边上的三角形)的最长边的最小值.

**解**　首先在 $\triangle ABC$ 的内接正三角形的范围内，求边长的最小值.

在 $BC$ 上任取一点 $D$，记 $BD = x$.

然后，分别在 $CA$、$AB$ 上取点 $E$ 和 $F$，使

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}x, BF = 1 - \frac{x}{2}$$

由余弦定理有

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF\cos 60° =$$

$$x^2 + (1 - \frac{x}{2})^2 - 2x(1 - \frac{x}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

$$DE^2 = (1 - x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

$$EF^2 = (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (1 + \frac{x}{2})^2 - 2\sqrt{3}(1 - \frac{x}{2})(1 + \frac{x}{2})\cos 30° =$$

$$\frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

于是

$$DE = EF = FD$$

即 $\triangle DEF$ 是正三角形.

这表明，对于 $BC$ 上任一点 $D$，都可以作出一个内接正三角形.

记 $CA$、$AB$ 的中点分别为 $N$、$M$，$BM$ 的中点为 $S$，则当点 $D$ 从点 $B$ 变到点 $C$ 时，点 $E$ 从点 $C$ 变到点 $N$，点 $F$ 从点 $M$ 变到点 $S$.

记 $\triangle DEF$ 的边长为 $a$，则

$$a^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1 = \frac{7}{4}(x - \frac{4}{7})^2 + \frac{3}{7}$$

于是当 $x = \frac{7}{4}$ 时，边长 $a$ 取得最小值 $\sqrt{\frac{3}{7}}$，如图 17.12 中点 $P$、$Q$、$R$ 的位置.

下面证明,任何内接三角形的最大边的边长都不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

为方便计,引入以 $C$ 为原点,$CA$ 为正半 $x$ 轴、$CB$ 为正半 $y$ 轴的直角坐标系.

设 $\triangle XYZ$ 为 $\triangle ABC$ 的任一内接三角形,其中点 $X$、$Y$、$Z$ 分别位于 $BC$、$CA$、$AB$ 上.

在 $BM$ 上取点 $R_1$,使 $MR_1=\frac{1}{3}MB$,取点 $R_2$,使 $MR_2=\frac{3}{14}MB$,于是

$$AR_1=\frac{2}{3}AB,BR_2=\frac{11}{14}BM$$

从而有

$$y_{R_1}=\frac{2}{3}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$x_{R_2}=\frac{11}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{10}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$

(1) 若点 $Z$ 位于线段 $BR_1$ 上,则

$$y_Z\geqslant y_{R_1}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$



若点 $Z$ 位于线段 $R_2A$ 上,则

$$x_Z\geqslant x_{R_2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$

可见,$XZ$ 长大于$\sqrt{\frac{3}{7}}$,于是自然有 $\triangle XYZ$ 的最长边的边长大于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(2) 设点 $Z$ 位于线段 $R_1R_2$ 内部,则将 $Z$ 作为 $F$,作正 $\triangle DEF$,不难验证,$x_E<x_F,y_D<y_F$.

因而,若点 $X$ 位于线段 $DC$ 上,则

$$ZX\geqslant ZD=FD$$

若点 $Y$ 位于线段 $CE$ 上,则

$$ZY\geqslant ZE=FE$$

若点 $X$ 位于线段 $BD$ 上,且点 $Y$ 位于线段 $EA$ 上,则由勾股定理知

$$XY\geqslant DE$$

所以 $\triangle XYZ$ 的最长边的边长不小于 $\triangle DEF$ 的边长,从而不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

综上可知,所求最长边的最小值为$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

**试题 C** 以 $\triangle ABC$ 的底边 $BC$ 为直径作半圆,分别交 $AB$、$AC$ 于点 $D$ 和 $E$,过点 $D$ 和 $E$ 分别作 $BC$ 的垂线,垂足分别为点 $F$、$G$,线段 $DG$ 和 $EF$ 交于点 $M$.求

证：$AM \perp BC$.

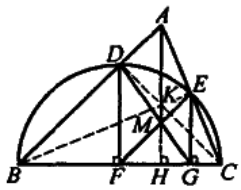


图 17.13

**证法1**　作高 $AH$ 并联结 $BE$、$CD$，于是

$$BE \perp AC, CD \perp AB$$

因
$$DF \perp BC, EG \perp BC$$

则
$$DF \parallel EG$$

即

$$\frac{DM}{MG}=\frac{DF}{EG}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{BD\cdot CD}{BE\cdot CE}=\frac{BD\cdot CD}{CE\cdot BE} \quad ①$$

又
$$\triangle ACD \backsim \triangle ABE$$

有

$$\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE} \quad ②$$

由 $DF \parallel AH \parallel EG$，知

$$\frac{AD}{FH}=\frac{BD}{BF},\frac{AE}{HG}=\frac{CE}{CG}$$

则

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD\cdot FH\cdot CG}{BF\cdot HG\cdot CE} \quad ③$$

由①～③得到

$$\frac{DM}{MG}=\frac{BD^2\cdot FH\cdot CG}{CE^2\cdot HG\cdot BF}=\frac{BC\cdot BF\cdot FH\cdot CG}{CG\cdot BC\cdot HG\cdot BF}=\frac{FH}{HG}$$

从而 $MH \parallel DF$，又 $DF \perp BC$，则 $MH \perp BC$，又由 $AH \perp BC$，有直线 $MH$ 与 $AH$ 重合，故 $AM \perp BC$.

**证法2**　作辅助线同证法1.因

$$DF \perp BC, EG \perp BC$$

则
$$DF = BD\sin B = BC\cos B\sin B, EG = BC\cos C\sin C$$

即
$$\frac{DM}{MG}=\frac{DF}{EG}=\frac{\cos B\sin B}{\cos C\sin C}=\frac{AC\cos B}{AB\cos C}$$

由
$$\triangle ACD \backsim \triangle ABE$$

有
$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}$$

即
$$\frac{DM}{MG}=\frac{AD\cos B}{AE\cos C}=\frac{FH}{HG}$$

故
$$MH \parallel DF$$

因 $DF \perp BC$,则 $MH \perp BC$,又由 $AH \perp BC$,有直线 $MH$ 与 $AH$ 重合,故

$$AM \perp BC$$

**证法3** 作辅助线同证法1,于是 $BE \perp AC$, $CD \perp AB$,记 $\triangle ABC$ 的垂心为 $K$.因

$$DF \perp BC, EG \perp BC, AH \perp BC$$

则

$$DF \parallel AH \parallel EG$$

即

$$\frac{FH}{FC} = \frac{DK}{DC}, \frac{HG}{BG} = \frac{KE}{BE}$$

从而

$$\frac{FH}{HG} = \frac{FC \cdot DK}{DC} \cdot \frac{BE}{BG \cdot KE} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CF}{BG} \cdot \frac{DK}{KE}$$

由

$$\triangle BKD \backsim \triangle CKE$$

知

$$\frac{KD}{KE} = \frac{BD}{CE}$$

又由

$$CD^2 = CF \cdot CB, BE^2 = BG \cdot BC$$



有

$$\frac{FH}{HG} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CF \cdot CB}{BG \cdot BC} \cdot \frac{KD}{KE} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CD^2}{BE^2} \cdot \frac{BD}{CE} =$$

$$\frac{CD \cdot BD}{BE \cdot CE} = \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}$$

则

$$MH \parallel DF$$

因 $DF \perp BC$,则 $MH \perp BC$,又由 $AH \perp BC$,知直线 $AH$ 与 $MH$ 重合,故

$$AM \perp BC$$

**证法4** 作辅助线同证法1,于是 $AH$、$BE$、$CD$ 交于一点,即垂心.由塞瓦定理,有

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad ①$$

由 $EG \perp BC$, $DF \perp BC$,则 $EG \parallel DF$,即

$$\frac{GM}{MD} = \frac{EG}{DF} = \frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{BE \cdot CE}{BD \cdot CD} \quad ②$$

又 $AH \parallel EG$,有

$$\frac{HG}{AE} = \frac{CH}{CA}$$

$$HG = \frac{AE \cdot CH}{AC} \quad ③$$

又由

$$AB \cdot CD = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BE \quad ④$$

由①～④得到

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BH \cdot AC}{AE \cdot CH} \cdot \frac{BE \cdot CE}{BD \cdot CD} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 $A$、$M$、$H$ 三点共线．故

$$AM \perp BC$$

**证法 5**　作高 $AH$，联结 $BE$、$CD$，于是 $BE \perp AC$，$CD \perp AB$．设 $AH$、$BE$、$CD$ 交于垂心 $K$，联结 $DE$ 交 $AH$ 于点 $N$．直线 $ANK$ 与 $\triangle DBE$ 相截，由梅涅劳斯定理有

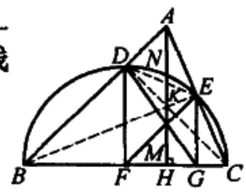



图 17.14

$$\frac{DA}{BA} \cdot \frac{BK}{KE} \cdot \frac{EN}{DN} = 1$$

由 $$\triangle BHK \backsim \triangle BEC \backsim \triangle AEK$$

有 $$BK = \frac{BC \cdot KH}{CE}, KE = \frac{KH \cdot AE}{BH}$$

则 $$\frac{DN}{NE} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BK}{KE} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{BH}{AE} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{BH}{AB} \cdot \frac{BC}{CE}$$

因 $$\triangle ACD \backsim \triangle ABE$$

则 $$\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$$

又 $$DF \parallel AH$$

则 $$\frac{BH}{AB} = \frac{BF}{BD}$$

又由 $$BD^2 = BF \cdot BC$$

知 $$\frac{DN}{NE} = \frac{CD}{BE} \cdot \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BC}{CE} = \frac{CD \cdot BD}{BE \cdot CE} = \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}$$

即 $$NM \parallel EG$$

因 $EG \perp BC$，则 $NM \perp BC$，由 $NH \perp BC$，知直线 $NM$ 与 $NH$ 重合，则点 $M$ 在 $AH$ 上，故

$$AM \perp BC$$

**证法 6**　以圆心为原点，如图 17.15 所示，建立坐标系，不妨设 $BC = 2$，$\angle EBC = \alpha$，$\angle DCB = \beta$．则 $BD$ 的直线方程为

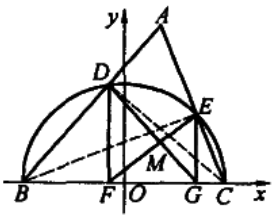



图 17.15

$$y = \cot \beta(x + 1)$$

$CE$ 的直线方程为

$$y = -\cot \alpha(x - 1)$$

故交点 $A$ 的横坐标为

$$x_A = \frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

而 $E(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha), D(-\cos 2\beta, \sin 2\beta), G(\cos 2\alpha, 0), F(-\cos 2\beta, 0)$

则 $DG$ 的直线方程为

$$y = \frac{\sin 2\beta}{-(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)}(x - \cos 2\alpha)$$

$EF$ 的直线方程为

$$y = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}(x + \cos 2\beta)$$

从而点 $M$ 的横坐标为

$$x_M = \frac{\sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = x_A\text{(点 }A\text{ 的横坐标)}$$



故

$$AM \perp BC$$

以下证法 7 ~ 9 由南开大学杨桂芝给出.

**证法 7** 记直线 $AM$ 与 $BC$ 交于点 $H$,联结 $BE$、$CD$.有 $\angle BEC = \angle BDC = 90°$.直线 $FME$ 与 $\triangle AHC$ 相截,直线 $GMD$ 与 $\triangle ABH$ 相截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AM}{MH} \cdot \frac{HF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \frac{AM}{MH} \cdot \frac{HG}{GB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$$

所以

$$\frac{FH}{HG} = \frac{CF \cdot AE \cdot BD}{CE \cdot BG \cdot AD} \quad ①$$

在 Rt$\triangle DBC$ 与 Rt$\triangle EBC$ 中,应用射影定理有

$$CD^2 = BC \cdot FC, BE^2 = BC \cdot BG$$

则

$$\frac{CF}{BG} = \frac{CD^2}{BE^2} \quad ②$$

将②代入①,得

$$\frac{FH}{HG} = \frac{CD^2 \cdot AE \cdot BD}{BE^2 \cdot CE \cdot AD} \quad ③$$

由 $\triangle ACD \backsim \triangle ABE$,知

$$\frac{CD}{BE}=\frac{AD}{AE} \quad ④$$

将④代入③,得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG}$$

则
$$MH /\!/ DF$$

又 $DF\perp BC$,则 $MH\perp BC$,即

$$AM\perp BC$$

**证法8**　作高 $AH$,联结 $BE$、$CD$.于是 $\angle BDC=90^\circ=\angle BEC$,则

$$DF=BD\sin B=BC\cos B\sin B$$

$$EG=BC\cos C\sin C$$

即
$$\frac{GM}{MD}=\frac{EG}{FD}=\frac{\cos C\sin C}{\cos B\sin B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos C}{\cos B}$$

因
$$BH=AB\cos B,HG=AE\cos C$$

则
$$\frac{BH}{HG}=\frac{AB\cos B}{AE\cos C}=\frac{AC\cos B}{AD\cos C}$$

即
$$\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AB}{AD}$$

从而
$$\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}\cdot\frac{DA}{AB}=1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 $H$、$M$、$A$ 三点共线.又 $AH\perp BC$,故

$$AM\perp BC$$

**证法9**　作高 $AH$,联结 $BE$、$CD$.则 $AH$、$BE$、$CD$ 交于一点,即 $\triangle ABC$ 的垂心.由塞瓦定理有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

因 $EG /\!/ DF$,则 $\triangle MGE\backsim\triangle MDF$,即

$$\frac{GM}{MD}=\frac{EG}{DF}=\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$$

由
$$AH /\!/ EG$$

知
$$\frac{HG}{AE}=\frac{CH}{AC}$$

则
$$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH\cdot AC}{AE\cdot CH}\cdot\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$$

因 $$AB \cdot CD = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BE$$

则 $$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{GM}{MD} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 $A$、$M$、$H$ 三点共线.故

$$AM \perp BC$$

**证法 10** (由南开大学李成章教授给出)如图 17.16,作 $\triangle ABC$ 的高 $AH$,联结 $BE$、$CD$、$DE$.则 $BE$、$CD$ 为 $\triangle ABC$ 的两条高线.记垂心为 $O$,$DE$ 与 $AH$ 交于点 $K$.于是有

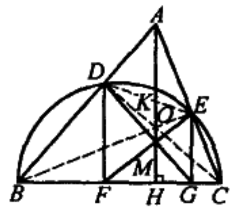


图 17.16

$$DK : KE = S_{\triangle ADO} : S_{\triangle AEO}$$

因 $$\triangle AEO \backsim \triangle BEC, \triangle ADO \backsim \triangle CDB$$

则 $$\frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{AO^2}{BC^2} = \frac{S_{\triangle AEO}}{S_{\triangle BEC}}$$

故 $$\frac{DK}{KE} = \frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle AEO}} = \frac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}$$



则 $$KM \parallel EG$$

又 $EG \perp BC$,则 $KM \perp BC$,因 $KH \perp BC$,则点 $M$ 在 $AH$ 上,故

$$AM \perp BC$$

**证法 11** (由江苏茹双林给出)如图 17.17,设 $z_C = 1$.则 $z_B = -1$,圆 $O : |z| = 1$.由题设知 $|z_D| = |z_E| = 1$ 及 $z_F = \mathrm{Re}\, z_D$,$z_G = \mathrm{Re}\, z_E$.过点 $M$ 作 $MN \perp BC$ 于点 $N$,则 $FD \parallel NM \parallel GE$.有

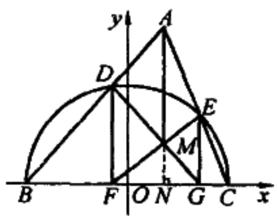


图 17.17

$$\frac{\mathrm{Re}\, z_M - \mathrm{Re}\, z_D}{\mathrm{Im}\, z_D} = \frac{\mathrm{Re}\, z_E - \mathrm{Re}\, z_M}{\mathrm{Im}\, z_E}$$

故 $$\mathrm{Re}\, z_M = \frac{\mathrm{Im}\, z_D \mathrm{Re}\, z_E + \mathrm{Im}\, z_E \mathrm{Re}\, z_D}{\mathrm{Im}\, z_D + \mathrm{Im}\, z_E}$$

同样,过 $A$ 作 $AN' \perp BC$ 于 $N'$,则 $FD \parallel N'A \parallel GE$.有

$$\frac{\mathrm{Im}\, z_A}{\mathrm{Im}\, z_D} = \frac{\mathrm{Re}\, z_A - \mathrm{Re}\, z_B}{\mathrm{Re}\, z_D - \mathrm{Re}\, z_B} = \frac{\mathrm{Re}\, z_A + 1}{\mathrm{Re}\, z_D + 1}$$

及 $$\frac{\mathrm{Im}\, z_A}{\mathrm{Im}\, z_E} = \frac{\mathrm{Re}\, z_E - \mathrm{Re}\, z_A}{\mathrm{Re}\, z_C - \mathrm{Re}\, z_E} = \frac{\mathrm{Re}\, z_A - 1}{\mathrm{Re}\, z_E - 1}$$

两式除得 $$\frac{\mathrm{Re}\, z_A + 1}{\mathrm{Re}\, z_A - 1} = \frac{\mathrm{Im}\, z_E(\mathrm{Re}\, z_D + 1)}{\mathrm{Im}\, z_D(\mathrm{Re}\, z_E - 1)}$$

由合分比定理可得

$$\mathrm{Re}\ z_A=\frac{\mathrm{Im}\ z_E(\mathrm{Re}\ z_D+1)+\mathrm{Im}\ z_D(\mathrm{Re}\ z_E-1)}{\mathrm{Im}\ z_E(\mathrm{Re}\ z_D+1)-\mathrm{Im}\ z_D(\mathrm{Re}\ z_E-1)}$$

因
$$\mathrm{Im}^2 z_D+\mathrm{Re}^2 z_D=\mathrm{Im}^2 z_E+\mathrm{Re}^2 z_E=1$$

则可用分析法可以证明 $\mathrm{Re}\ z_A=\mathrm{Re}\ z_M$.

事实上,若 $\mathrm{Re}\ z_M=\mathrm{Re}\ z_A$ 成立,即

$$\frac{\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E+\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D}{\mathrm{Im}\ z_D+\mathrm{Im}\ z_E}=\frac{\mathrm{Im}\ z_E\cdot(\mathrm{Re}\ z_D+1)+\mathrm{Im}\ z_D\cdot(\mathrm{Re}\ z_E-1)}{\mathrm{Im}\ z_E\cdot(\mathrm{Re}\ z_D+1)-\mathrm{Im}\ z_D\cdot(\mathrm{Re}\ z_E-1)}\Leftrightarrow$$

$\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E\cdot\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D+\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E\cdot\mathrm{Im}\ z_E-$
$\mathrm{Im}^2 z_D\cdot\mathrm{Re}^2 z_E+\mathrm{Im}^2 z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E+\mathrm{Im}^2 z_E\cdot\mathrm{Re}^2 z_D+$
$\mathrm{Im}^2 z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D-\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D\cdot\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E+$
$\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D\cdot\mathrm{Im}\ z_D=\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D+\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Im}\ z_E+\mathrm{Im}^2 z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E-$
$\mathrm{Im}^2 z_D+\mathrm{Im}^2 z_E\cdot\mathrm{Re}\ z_D+\mathrm{Im}^2 z_E+\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Im}\ z_D\cdot\mathrm{Re}\ z_E-$
$\mathrm{Im}\ z_E\cdot\mathrm{Im}\ z_D\Leftrightarrow\mathrm{Im}^2 z_E\cdot\mathrm{Re}^2 z_D-\mathrm{Im}^2 z_D\cdot\mathrm{Re}^2 z_E=\mathrm{Im}^2 z_E-\mathrm{Im}^2 z_D$

而
$$\mathrm{Re}^2 z_D=1-\mathrm{Im}^2 z_D$$
及
$$\mathrm{Re}^2 z_E=1-\mathrm{Im}^2 z_E$$
故 $\mathrm{Re}\ z_M=\mathrm{Re}\ z_A$ 成立.从而

$$AM\perp BC$$

## 第 1 节　梯形中位线定理推广及应用

我们知道:梯形中位线之长,等于梯形上下底之和的一半,进一步可推广得到如下的结论.

**定理 1**　如图 17.18,在梯形 $ABCD$ 中,平行于底的直线与腰 $AB$、$DC$ 分别相交于点 $P$、$Q$.若 $AP:PB=m:n$,则有

$$PQ=\frac{mBC+nAD}{m+n}$$

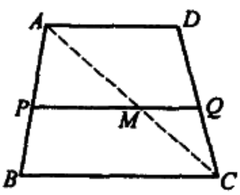


图 17.18

**证明**　联结 $AC$,与 $PQ$ 相交于点 $M$,由于 $PQ\parallel BC\parallel AD$,则可得到

$$\frac{PM}{BC}=\frac{AP}{AB}\Rightarrow PM=\frac{m}{m+n}BC$$

$$\frac{MQ}{AD}=\frac{CQ}{CD}\Rightarrow MQ=\frac{n}{m+n}AD$$

将以上两式相加,即得结论.

显然,当 $m:n=1$ 时,即为梯形中位线定理.

**定理2** 若 $E$、$F$ 分别为四边形 $ABCD$ 的边 $AB$、$CD$ 上的点,且 $\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}=\frac{m}{n}$,$AD=b$,$BC=a$.设 $AD$ 与 $BC$ 所在直线的夹角为 $\alpha$,则

$$EF^2=\frac{(am)^2+(bn)^2+2ambn\cos\alpha}{(m+n)^2}$$

**证明** 如图 17.19,联结 $BD$,过 $E$ 作 $EO\parallel AD$ 交 $BD$ 于 $O$,联结 $OF$,则 $OF\parallel BC$,且有

$$\angle OFE=\angle FEO,\angle FEO=\angle FQD$$

(其中点 $Q$ 为直线 $EF$ 与直线 $AD$ 的交点)

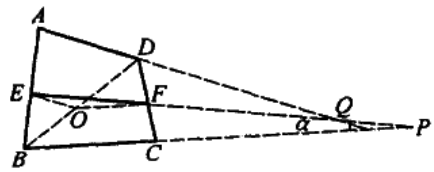



图 17.19

从而

$$\angle OFE+\angle FEO=\angle FPC+\angle DQF=\alpha$$



(其中点 $P$ 为直线 $EF$ 与直线 $BC$ 的交点)

因

$$OE=\frac{bn}{m+n},OF=\frac{am}{m+n}$$

在 $\triangle EOF$ 中,依余弦定理,有

$$EF^2=\left(\frac{bn}{m+n}\right)^2+\left(\frac{am}{m+n}\right)^2-2\cdot\frac{bn}{m+n}\cdot\frac{am}{m+n}\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$$

即

$$EF^2=\frac{(am)^2+(bn)^2+2ambn\cos\alpha}{(m+n)^2}$$

特别地,若令 $EF=l$,且

(1) $\frac{m}{n}=1$,则 $l=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$ 为任何四边形对边中点连线长公式.

(2) $\frac{m}{n}=1$,$b=0$,得 $l=\frac{a}{2}$ 为三角位中位线定理.

(3) $\frac{m}{n}=1$,$\alpha=0^\circ$,得 $l=\frac{a+b}{2}$ 为梯形中位线定理.

(4) $\frac{m}{n}=1$,$\alpha=180^\circ$,得 $l=\frac{a-b}{2}$ 为梯形两对角线中点连线长公式.

(5) $\alpha=0$,得 $l=\frac{am+bn}{m+n}$ 即为定理1分梯形两腰长为 $\frac{m}{n}$ 的线段长公式.

(6) $\alpha=180^\circ$,得 $l=\frac{am-bn}{m+n}$ 为分梯形两对角线为 $\frac{m}{n}$ 的线段长公式.

……

下面看一些应用例子①.

**例 1**　在 $\triangle ABC$ 中，$BD$ 和 $CE$ 分别为 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线，$F$ 为 $DE$ 上的任意一点，过点 $F$ 分别作 $BC$、$AB$、$AC$ 的垂线，垂足为 $H$、$M$、$N$，如图 17.20 所示．求证：$FH = FM + FN$.

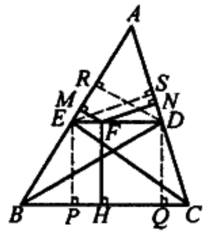


图 17.20

**证明**　作 $DQ \perp BC$ 于点 $Q$，$EP \perp BC$ 于点 $P$，$DR \perp AB$ 于点 $R$，$ES \perp AC$ 于点 $S$，由条件即知 $DR = DQ$，$ES = EP$. 设 $DF : FE = m : n$，从而在梯形 $DQPE$ 中，有

$$FH = \frac{mEP + nDQ}{m + n}$$

又由于

$$\triangle DFN \backsim \triangle DES, \triangle EFM \backsim \triangle EDR$$

则

$$FN = \frac{DF}{DE} \cdot ES = \frac{m}{m + n}EP$$

$$FM = \frac{EF}{DE} \cdot DR = \frac{n}{m + n}DQ$$

故

$$FN + FM = \frac{mEP + nDQ}{m + n} = FH$$

**例 2**　在凸四边形 $ABCD$ 的边 $AB$、$CD$ 上各有一动点 $E$、$F$. 如果 $AE : EB = CF : FD$，求证：$S_{ABCD} = S_{\triangle ECD} + S_{\triangle FAB}$.

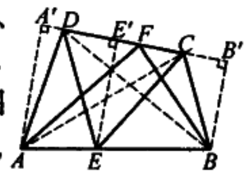


图 17.21

**证明**　作 $AA'$、$EE'$、$BB'$ 与 $DC$ 所在直线垂直，如图 17.21 所示，垂足分别为点 $A'$、$E'$、$B'$. 令 $AE : EB = m : n$，则在梯形 $AA'B'B$ 中，有

$$EE' = \frac{m \cdot BB' + n \cdot AA'}{m + n}$$

则

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}DC \cdot EE' = \frac{m \cdot \frac{1}{2}DC \cdot BB' + n \cdot \frac{1}{2}DC \cdot AA'}{m + n} = \frac{mS_{\triangle BDC} + nS_{\triangle ADC}}{m + n}$$

显然 $CF : FD = m : n$，类似地必然有

$$S_{\triangle AFB} = \frac{mS_{\triangle ABD} + nS_{\triangle ABC}}{m + n}$$

① 陈万龙．梯形中位线定理的推广和应用[J]．中学数学，2001(12)：32-34.

故 $$S_{\triangle DEC}+S_{\triangle AFB}=\frac{m(S_{\triangle BDC}+S_{\triangle ABD})+n(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC})}{m+n}=\frac{(m+n)S_{ABCD}}{m+n}=S_{ABCD}$$

**例3** 如图17.22,梯形 $ABCD$ 的对角线 $AC$、$BD$ 相交于点 $G$,$EF$ 平行于底边 $BC$ 且过点 $G$,又 $EC$ 和 $FB$ 相交于点 $H$,$MN$ 平行于底边 $BC$ 且过点 $H$,求证:$\frac{1}{AD}+\frac{2}{BC}=\frac{1}{EF}+\frac{2}{MN}$.

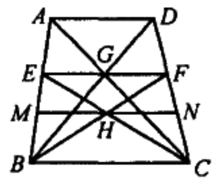


图17.22

**证明** 由已知条件即知

$$AE:EB=AG:GC=AD:BC$$

从而便知在梯形 $ABCD$ 中,有

$$EF=\frac{AD\cdot BC+BC\cdot AD}{AD+BC}=\frac{2AD\cdot BC}{AD+BC}$$

由此即得

$$\frac{2}{EF}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC} \quad ①$$



同理在梯形 $EBCF$ 中,有

$$\frac{1}{EF}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{MN} \quad ②$$

由①、②得 $$\frac{1}{AD}+\frac{2}{BC}=\frac{1}{EF}+\frac{2}{MN}$$

**例4** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,外心 $O$ 到三边距离之和记为 $d_{外}$,重心 $G$ 到三边距离之和记为 $d_{重}$,垂心 $H$ 到三边距离之和记为 $d_{垂}$,求证:$d_{垂}+2d_{外}=3d_{重}$.

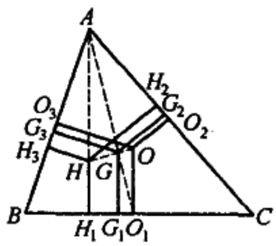


图17.23

**证明** 如图17.23,我们知道,三角形外心、重心和垂心是共线的,即 $O$、$G$、$H$ 三点共线,并且有

$$\frac{OG}{GH}=\frac{O_1G}{GA}=\frac{1}{2}$$

其中

$$d_{垂}=HH_1+HH_2+HH_3$$
$$d_{重}=GG_1+GG_2+GG_3$$
$$d_{外}=OO_1+OO_2+OO_3$$

在梯形 $O_1OHH_1$ 中,则有

$$GG_1=\frac{1\cdot HH_1+2\cdot OO_1}{1+2}=\frac{HH_1+2OO_1}{3}$$

则 $$HH_1+2OO_1=3GG_1$$

同理,在梯形 $OO_2H_2H$ 和梯形 $OO_3H_3H$ 中,分别有

$$HH_2 + 2OO_2 = 3GG_2$$

$$HH_3 + 2OO_3 = 3GG_3$$

故 $$d_{垂} + 2d_{外} = 3d_{重}$$

**例 5** $\triangle ABC$ 中,$h_a$、$h_b$、$h_c$,$r_a$、$r_b$、$r_c$ 分别表示三条高和三个旁切圆半径的长.求证:$h_a + h_b + h_c \leqslant r_a + r_b + r_c$.

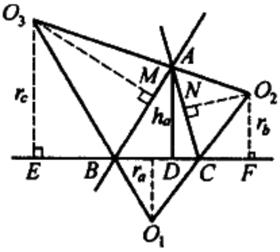


图 17.24

**证明** 如图 17.24,设 $O_1$、$O_2$、$O_3$ 是 $\triangle ABC$ 的三个旁心,易知 $O_1$、$C$、$O_2$;$O_2$、$A$、$O_3$;$O_3$、$B$、$O_1$ 分别共线.从 $O_1$、$O_2$、$O_3$ 分别作垂线,$E$、$F$、$M$、$N$ 皆为垂足,显然有

$$O_2N = O_2F = r_b, O_3M = O_3E = r_c$$

又易证 $$\text{Rt}\triangle AO_3M \backsim \text{Rt}\triangle AO_2N$$

则有 $$\frac{AO_3}{AO_2} = \frac{O_3M}{O_2N} = \frac{r_c}{r_b}$$

在梯形 $O_3EFO_2$ 中,则有

$$AD = \frac{r_c \cdot O_2F + r_b \cdot O_3E}{r_c + r_b}$$

即 $$h_a = \frac{r_cr_b + r_br_c}{r_c + r_b} = \frac{2r_br_c}{r_b + r_c} \leqslant \frac{1}{2}(r_b + r_c)$$

同理 $$h_b \leqslant \frac{1}{2}(r_c + r_a)$$

$$h_c \leqslant \frac{1}{2}(r_a + r_b)$$

三式相加,则有 $$h_a + h_b + h_c \leqslant r_a + r_b + r_c$$

**例 6** 设 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 分别为正 $\triangle ABC$ 三边 $AB$、$BC$、$CA$ 上的点,且 $AP_1 = BP_2 = CP_3$,直线 $l$ 为过正 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点 $P$ 的切线,试证:$P_1$、$P_2$、$P_3$ 三点到直线 $l$ 距离之和为定值.

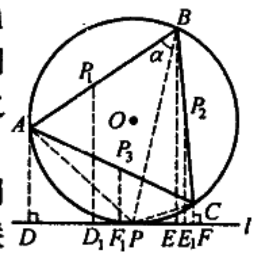


图 17.25

**证明** 如图 17.25,设正 $\triangle ABC$ 的边长为 $a$,其外接圆半径为 $R$,过 $A$、$B$、$C$ 分别作切线 $l$ 的垂线 $AD$、$BE$、$CF$,联结 $AP$、$BP$、$CP$.令 $\angle ABP = \alpha$,则

$$\angle APD = \alpha$$

$$\angle PBC = \angle CPF = 60° - \alpha$$

$$\angle BAP = \angle BPF = 120^\circ - \alpha$$

于是由正弦定理可得

$$AP = 2R\sin\alpha$$

$$BP = 2R\sin(120^\circ - \alpha)$$

$$CP = 2R\sin(60^\circ - \alpha)$$

又分别在 Rt△$APD$、Rt△$BPE$、Rt△$CPF$ 中

$$AD = AP\sin\alpha, BE = BP\sin(120^\circ - \alpha), CF = CP\sin(60^\circ - \alpha)$$

则 $$AD = 2R\sin^2\alpha, BE = 2R\sin^2(120^\circ - \alpha), CF = 2R\sin^2(60^\circ - \alpha)$$

即 $$AD + BE + CF = 2R[\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha)] =$$

$$2R\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos(240^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ - \alpha)]\right\} =$$

$$2R\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + 2\cos(180^\circ - 2\alpha)\cos 60^\circ]\right\} = 3R$$

又 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,则



$$AD + BE + CF = \sqrt{3}a$$

又过 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 分别作切线 $l$ 的垂线 $P_1D_1$、$P_2E_1$、$P_3F_1$,由于 $AP_1 = BP_2 = CP_3$,且

$$AB = BC = CA$$

则 $$\frac{AP_1}{AB} = \frac{BP_2}{BC} = \frac{CP_3}{CA}$$

从而 $$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{BP_2}{P_2C} = \frac{CP_3}{P_3A}$$

设其比值为 $\frac{m}{n}$,在梯形 $ADEB$ 中,则有

$$P_1D_1 = \frac{nAD + mBE}{n + m}$$

同理 $$P_2E_1 = \frac{nBE + mCF}{n + m}$$

$$P_3F_1 = \frac{nCF + mAD}{m + n}$$

故 $$P_1D_1 + P_2E_1 + P_3F_1 = \frac{(m+n)AD + (m+n)BE + (m+n)CF}{m+n} =$$

$$AD + BE + CF = \sqrt{3}a\text{(定值)}$$

## 第 2 节　从平面解析几何问题到平面几何竞赛题[①]

这里介绍的是罗增儒教授根据一道平面解析几何题改造的 1996 年中国数学奥林匹克的一道平面几何题.

**例 1**　如图 17.26,设 $H$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,由 $A$ 向以 $BC$ 为直径的圆作切线 $AP$、$AQ$,切点分别为 $P$、$Q$.求证:$P$、$H$、$Q$ 三点共线.

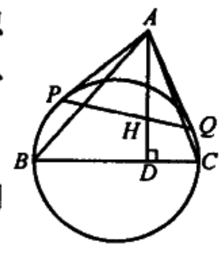


图 17.26

编拟这道题首先源于解析几何中的一个熟知结论.

**例 2**　设点 $A(a,b)$ 是圆 $x^2+y^2=R^2$ 外一点,过 $A$ 作圆的切线 $AP$、$AQ$,则直线 $PQ$ 的方程为

$$ax+by=R^2 \quad ①$$

**证法 1**　如图 17.26,设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$,则过点 $P$、$Q$ 的切线 $AP$、$AQ$ 的方程分别为

$$x_1x+y_1y=R^2$$

$$x_2x+y_2y=R^2$$

因为点 $A$ 在两直线上,则有

$$x_1a+y_1b=R^2$$

$$x_2a+y_2b=R^2$$

这表明 $P$、$Q$ 均在直线 $ax+by=R^2$ 上.但两点决定唯一的直线,故这就是直线 $PQ$ 的方程(切点弦方程).

**证法 2**　如图 17.27,则有 $B(-R,0)$,$C(R,0)$.

一方面,点 $P$、$Q$ 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上;

另一方面,点 $P$、$Q$ 又在以 $OA$ 为直径的圆 $x^2-ax+y^2-by=0$ 上.

两圆方程相减(曲线系的思想),便得过两圆交点 $P$、$Q$ 的曲线方程为

$$ax+by=R^2$$

这是一个直线方程,即直线 $PQ$ 的方程.

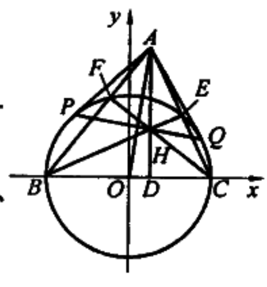


图 17.27

① 罗增儒.成题改编——移植转换[J].中等数学,2005(10):14-17.

在这个结论的基础上,可进一步看到有一个 $\triangle ABC$($\angle A$ 必为锐角).

如图 17.27,当作高线 $AD$ 时,必与直线 $PQ$ 相交,记交点为 $H$.再观察 $H$ 的位置特征时发现,$BH \perp AC$,$CH \perp AB$,这就得到了 $H$ 应为垂心.从而猜想:

**例 3** 设点 $A(a,b)$ 是圆 $x^2+y^2=R^2$ 外一点,$B$、$C$ 为圆与 $x$ 轴的交点,联结 $AB$、$AC$ 顺次交圆于点 $F$、$E$.过 $A$ 作圆的切线 $AP$、$AQ$,则 $PQ$、$BE$、$CF$ 三线共点.

这一猜想是成立的,下面给出证明.

**证明** 如图 17.27,由例 2 知直线 $PQ$ 的方程为

$$ax+by=R^2$$

又由于 $BE \perp AC$,$CF \perp AB$,于是,直线 $BE$、$CF$ 的方程分别为

$$(a-R)(x+R)+by=0$$

$$(a+R)(x-R)+by=0$$

即

$$(a-R)x+by=R^2-aR$$

$$(a+R)x+by=R^2+aR$$



相加得过 $BE$、$CF$ 交点(垂心 $H$)的直线方程为

$$ax+by=R^2$$

这正是直线 $PQ$ 的方程.故直线 $PQ$、$BE$、$CF$ 三线共点(垂心 $H$).

这就得到一道解析几何题,并且把圆改为椭圆也成立.但作为数学竞赛题挑战性情境稍显不足,因而转换呈现方式,移植为综合几何题(例 1).问题是能找到纯几何解法吗?学生能找到吗?为此,作者找了几个学生试做,反馈的信息是乐观的.

为了保证点 $A$ 在圆外,$\angle A$ 应为锐角.而 $\angle B$、$\angle C$ 中有直角时,结论显然;$\angle B$、$\angle C$ 中有锐角时,证法类似.为了阅卷方便,供题只证锐角三角形.

1995 年 12 月,罗教授将题目寄给裘宗沪老师,附有几个证法,并注明考查内容是平面几何的"四点共圆"或解析几何的"曲线系",挺有趣的.

**证法 1** 如图 17.28,设 $BC$ 的中点为 $O$,联结 $AO$、$PQ$ 相交于点 $G$,则有

$$PQ \perp AO \quad ①$$

联结 $AH$ 并延长交 $BC$ 于点 $D$,联结 $BH$ 并延长交 $AC$ 于点 $E$,则 $AD$、$BE$ 为 $\triangle ABC$ 的两条高线,点 $E$ 必在半圆上.于是,有

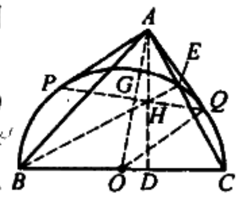


图 17.28

$$\angle HEC = 90^\circ = \angle HDC$$

从而，$H$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆. 据圆的切割线定理得

$$AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD \qquad ②$$

联结 $OQ$，则 $OQ \perp AQ$. 在 Rt$\triangle AOQ$ 中，由射影定理有

$$AQ^2 = AG \cdot AO \qquad ③$$

由式 ②、③ 得

$$AG \cdot AO = AH \cdot AD$$

于是，$G$、$O$、$D$、$H$ 四点共圆.

联结 $HG$，由 $\angle HDO = 90°$，得 $\angle HGO = 90°$，故

$$HG \perp AO \qquad ④$$

由于过 $AO$ 上一点 $G$ 的垂线是唯一的，由式 ①、④ 知 $GH$ 与 $PQ$ 重合. 因此，$P$、$H$、$Q$ 三点共线.

**证法 2**　如图 17.29，记 $BC$ 的中点为 $O$，联结 $PH$、$QH$、$AO$、$OP$、$OQ$，并联结 $AH$、$BH$ 分别交 $BC$、$AC$ 于 $D$、$E$. 则 $AD$、$BE$ 是 $\triangle ABC$ 的两条高线. 从而，点 $E$ 在圆 $O$ 上.

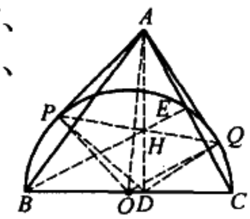


图 17.29

联结 $PD$、$QD$，有

$$OP \perp AP, OQ \perp AQ, OD \perp AD$$

故 $A$、$P$、$O$、$D$、$Q$ 五点共圆. 从而

$$\angle APD + \angle AQD = 180°$$

又由 $HE \perp EC$，$HD \perp DC$，知 $D$、$C$、$E$、$H$ 四点共圆. 从而

$$AP^2 = AQ^2 = AE \cdot AC = AH \cdot AD$$

于是，过点 $H$、$D$、$Q$ 的圆与 $AQ$ 切于点 $Q$，过点 $H$、$D$、$P$ 的圆与 $AP$ 切于点 $P$. 所以

$$\angle AHP = \angle APD, \angle AHQ = \angle AQD$$

故

$$\angle AHP + \angle AHQ = \angle APD + \angle AQD = 180°$$

因此，$P$、$H$、$Q$ 三点共线.

本例可以认为是 1997 年中国数学奥林匹克第 4 题的特例，并能找出射影几何背景以及完全四边形的一种特殊情形(参见第 18 章第 1 节中的性质 7).

# 第18章 1996 ~ 1997年度试题的诠释

**试题A** 如图18.1,圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切,$E$、$F$、$G$、$H$ 为切点,并且 $EG$、$FH$ 的延长线交于点 $P$.求证:直线 $PA$ 与 $BC$ 垂直.

**证法1** 设 $PA$ 交 $BC$ 于点 $D$,联结 $O_1A$、$O_1E$、$O_1G$、$O_2A$、$O_2F$、$O_2H$.如图18.1所示,则

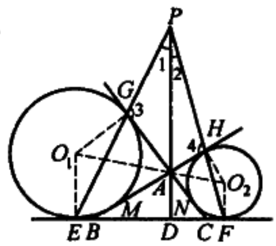



图18.1

$$\frac{ED}{DF}=\frac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PDF}}=\frac{\frac{1}{2}PE\cdot PD\sin\angle 1}{\frac{1}{2}PF\cdot PD\sin\angle 2}=\frac{PE}{PF}\cdot\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}$$



在 $\triangle PEF$ 中,由正弦定理

$$\frac{PE}{PF}=\frac{\sin\angle PFE}{\sin\angle PEF}$$

因 $FE$、$CG$ 是圆 $O_1$ 的切线,则

$$\angle PEF=\angle CGE=180^\circ-\angle 3$$

$$\sin\angle PEF=\sin\angle 3$$

同理

$$\sin\angle PFE=\sin\angle 4$$

故

$$\frac{ED}{DF}=\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 3}\cdot\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$$

在 $\triangle PHA$ 及 $\triangle PGA$ 中,由正弦定理

$$\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 2}=\frac{PA}{AH},\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}=\frac{AG}{PA}$$

有

$$\frac{ED}{DF}=\frac{PA}{AH}\cdot\frac{AG}{PA}=\frac{AG}{AH}$$

易知

$$\text{Rt}\triangle AGO_1\backsim\text{Rt}\triangle AHO_2$$

于是

$$\frac{ED}{DF}=\frac{AG}{AH}=\frac{AO_1}{AO_2}$$

易知 $O_1EFO_2$ 是直角梯形,由 $\frac{ED}{DF}=\frac{AO_1}{AO_2}$,有 $AD\parallel O_1E$,故

$$AD\perp BC$$

即 $$PA \perp BC$$

注 在上述证法中，我们可得到结论：过外离两圆两内公切线交点引外公切线的垂线，则垂足内分外公切线所得两线之比等于两圆半径之比.

**证法 2** （由四川方廷刚给出）记 $\angle ABC = \angle B$，$\angle ACB = \angle C$，$\angle BAC = \angle A$，作 $AD \perp BC$ 于点 $D$，反向延长 $AD$ 分别交直线 $EG$、$FH$ 于点 $P_1$、$P_2$. 需要证 $P_1$ 与 $P_2$ 重合，即要证 $P_1D = P_2D$. 这只须证

$$DE\tan\angle GEC = DF\tan\angle HFB$$

又只须证 $$DE\cot\frac{C}{2} = DF\cot\frac{B}{2}$$

即只须证 $$DE : DF = \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2}$$

但 $$EC = GC = BH = BF$$

故 $$\cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2} = \frac{BF}{O_2F} : \frac{CE}{O_1E} = O_1E : O_2F = r_1 : r_2$$

（$r_1$、$r_2$ 分别为两圆半径）

而由证法 1 后的注中结论，知

$$DE : DF = r_1 : r_2$$

故结论获证.

**证法 3** （由安徽对外经贸学校杨付珍给出）如图 18.1，设 $PA$ 交 $BC$ 于点 $D$，联结 $O_1E$、$O_2F$、$O_1O_2$，则 $O_1O_2$ 过点 $A$，注意到 $O_1E \perp BC$，$O_2F \perp BC$，要证 $PA \perp BC$，只要证 $PA \parallel O_1E \parallel O_2F$，即只要证 $\frac{ED}{DF} = \frac{O_1A}{AO_2}$.

由中直线束截直线分线段比定理，知

$$\frac{ED}{DF} = \frac{PE\sin\angle 1}{PF\sin\angle 2}$$

在 $\triangle PEF$ 中，由正弦定理

$$\frac{PE}{PF} = \frac{\sin\angle PFE}{\sin\angle PEF}$$

则 $$\frac{ED}{DF} = \frac{\sin\angle PFE\sin\angle 1}{\sin\angle PEF\sin\angle 2}$$

又显然 $$\triangle O_1GA \backsim \triangle O_2HA$$

则
$$\frac{O_1A}{AO_2}=\frac{AG}{AH}=\frac{\dfrac{PA}{\sin\angle 3}\sin\angle 1}{\dfrac{PA}{\sin\angle 4}\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle 4\sin\angle 1}{\sin\angle 3\sin\angle 2}$$

再注意到
$$\angle 3+\angle PEF=\angle 3+\angle CGE=180^\circ$$
$$\angle PFE+\angle 4=\angle BHF+\angle 4=180^\circ$$

即
$$\frac{O_1A}{AO_2}=\frac{\sin\angle PFE\sin\angle 1}{\sin\angle PEF\sin\angle 2}$$

则
$$\frac{ED}{DF}=\frac{O_1A}{AO_2}$$

故命题得证.

**证法4** (由四川熊福州、江苏嵇国平等人给出)如图18.2,由已知可有$\triangle ABC$的周长等于$2BF=2CE$,则$BF=CE$,即$EB=CF$.



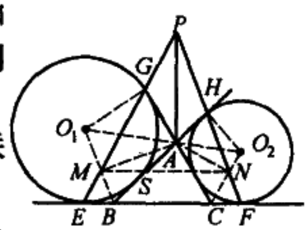



图 18.2

联结$O_1B$交$PE$于点$M$,联结$O_2C$交$PF$于点$N$,联结$MN$、$O_1G$、$AM$、$O_2H$、$AN$、$O_1O_2$.

由已知有$O_1B$是等腰$\triangle BHF$的顶角的外角平分线,则
$$O_1B\ /\!/\ HF$$

同理
$$O_2C\ /\!/\ GE$$

则
$$\triangle MEB\cong\triangle NCF(\text{ASA})$$

即
$$ME=NC$$

从而四边形$MECN$为平行四边形,故
$$MN\ /\!/\ EF$$

又由已知,若设圆$O_1$切$AB$于$S$,则
$$\angle AO_1B=\angle AO_1S+\angle BO_1S=\frac{1}{2}\angle EO_1G=90^\circ-\frac{1}{2}\angle GCE=\angle EGC$$

则$O_1$、$M$、$A$、$G$四点共圆,即
$$\angle O_1MA+\angle O_1GA=180^\circ$$

又$\angle O_1GA=90^\circ$,于是$\angle O_1MA=90^\circ$,则
$$AM\perp O_1B$$

即
$$AM\perp PN$$

同理可证　　　　　　　　　$AN \perp PM$

从而 $A$ 为 $\triangle PMN$ 的垂心,则

$$PA \perp MN$$

即　　　　　　　　　　　　$PA \perp BC$

下面的证法 5、6 由安徽省数学会普委会给出.

**证法 5**　用同一法证明本题:如图 18.3,作 $PP_1 \perp BC$ 于 $P_1$,作 $AA_1 \perp BC$,我们证明 $P_1$ 与 $A_1$ 重合,易知 $\angle PEP_1 = \angle EO_1C$,则

$$\text{Rt}\triangle P_1EP \backsim \text{Rt}\triangle EO_1C$$

即

$$\frac{EP_1}{O_1E} = \frac{PP_1}{CE}$$

同理,由 $\text{Rt}\triangle P_1FP \backsim \text{Rt}\triangle FO_2B$,得

$$\frac{FP_1}{O_2F} = \frac{PP_1}{BF}$$

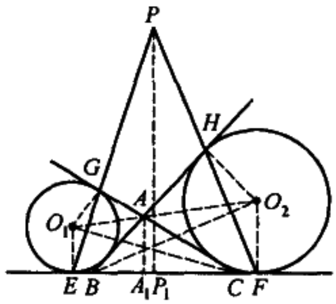



图 18.3



注意到证法 4 中结论,有 $CE = BF$,于是

$$\frac{EP_1}{FP_1} = \frac{O_1E}{O_2F} = \frac{O_1G}{O_2H} = \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{EA_1}{FA_1}$$

(因 $\triangle AGO_1 \backsim \triangle AHO_2$)

由此可知 $P_1$ 与 $A_1$ 重合,故

$$PA \perp BC$$

**证法 6**　仍用同一法(参看图 18.3). 为方便起见,用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 表示 $\triangle ABC$ 的三内角. 由 $\text{Rt}\triangle PP_1E$ 及 $\text{Rt}\triangle PP_1F$,并注意到 $\angle PEP_1 + \frac{\angle C}{2} = 90°$, $EP_1 = PP_1\cot\angle PEP_1 = PP_1\tan\frac{C}{2}$,同理 $FP_1 = PP_1\tan\frac{B}{2}$.

再由 $\text{Rt}\triangle CO_1E$ 及 $\text{Rt}\triangle BO_2F$,有

$$O_1E = CE\tan\frac{C}{2}, O_2F = BF\tan\frac{B}{2}$$

由上面 4 个式子,即得

$$\frac{EP_1}{FP_1} = \frac{O_1E}{O_2F}$$

以下与证法 5 相同.

**证法7** (由湖南湘潭杨晓辉给出)如图18.1,记 $BC=a,CA=b,AB=c$, $s$ 是 $\triangle ABC$ 的半周长.由题设,易知 $BE=CF=s-a,\angle PEF=90^\circ-\frac{\angle C}{2}$, $\angle PFE=90^\circ-\frac{\angle B}{2}$.

联结 $PB$、$PC$,在 $\triangle PBE$ 与 $\triangle PCF$ 中

$$PB^2=PE^2+BE^2-2PE\cdot BE\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

$$PC^2=PF^2+CF^2-2PE\cdot CF\cos\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)$$

又在 $\triangle PEF$ 中,由正弦定理知

$$\frac{PE}{\sin\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)}=\frac{EF}{\sin\angle EPF}=\frac{b+c}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{PF}{\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}$$

故
$$PE^2-PF^2=\frac{(b+c)^2}{\sin^2\frac{B+C}{2}}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\right)=$$
$$\frac{(b+c)^2}{\sin\frac{B+C}{2}}\sin\frac{C-B}{2}$$

(因 $\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}$)

故
$$PB^2-PC^2=\frac{(b+c)^2}{\sin\frac{B+C}{2}}\sin\frac{C-B}{2}-$$
$$\frac{2(b+c)(s-a)}{\sin\frac{B+C}{2}}\left(\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=$$
$$\frac{(b+c)\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}[(b+c)-2(s-a)]=$$
$$\frac{a(b+c)\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=c^2-b^2$$

(因$\frac{c-b}{a}=\frac{\sin C-\sin B}{\sin A}=\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=AB^2-AC^2$)

故 $$PA\perp BC$$

**证法 8**　(由南开大学李成章教授给出)设 $PA$ 交 $BC$ 于点 $D$. 直线 $PHF$ 与 $\triangle ABD$ 的三边延长线都相交. 直线 $PGE$ 与 $\triangle ADC$ 的三边延长线都相交,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP}{AP}=1=\frac{DP}{AP}\cdot\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}$$

则 $$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}=\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}$$

因 $CG$、$CE$ 为圆 $O_1$ 的两条切线,$BF$、$BH$ 为圆 $O_2$ 的两条切线. 则

$$CG=CE,BF=BH$$

即 $$\frac{AH}{DF}=\frac{AG}{DE}$$



联结 $O_1G$、$O_1E$、$O_1A$、$O_2A$、$O_2F$、$O_2H$,于是 $O_1AO_2$ 为一条直线,且

$$O_1G\perp GC,O_2H\perp BH$$

由 $$\triangle O_1AG\backsim\triangle O_2AH$$

知 $$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AG}{AH}=\frac{DE}{DF}$$

因 $$O_1E\perp EF,O_2F\perp EF$$

则 $$O_1E\parallel O_2F$$

从而 $$O_1E\parallel AD\parallel O_2F$$

则 $$AD\perp EF$$

故 $$PA\perp BC$$

**证法 9**　过 $A$ 作 $AD\perp BC$,延长 $DA$ 交直线 $HF$ 于点 $P'$,直线 $P'HF$ 与 $\triangle ABD$ 的三边延长线都相交. 由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=1$$

因 $BH=BF$,则

$$\frac{AH}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=1 \quad ①$$

联结 $O_1A$、$O_1E$、$O_1G$、$O_2A$、$O_2F$、$O_2H$. 于是 $O_1AO_2$ 为一条直线,且

$$O_1E \perp EF, O_1G \perp CG, O_2F \perp EF, O_2H \perp BH$$

则
$$O_1E \parallel AD \parallel O_2F$$

又由
$$\triangle AGO_1 \backsim \triangle AHO_2$$

有
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AG}{AH}$$

则
$$\frac{AH}{DF} = \frac{AG}{DE} \qquad ②$$

由 ① 和 ② 得

$$1 = \frac{AH}{DF} \cdot \frac{DP'}{AP'} = \frac{AG}{DE} \cdot \frac{DP'}{AP'} = \frac{DP'}{AP'} \cdot \frac{AG}{CG} \cdot \frac{CE}{DE}$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 $P'$、$G$、$E$ 三点共线,即 $P'$ 为 $EG$ 与 $FH$ 的交点. 从而点 $P'$ 与 $P$ 重合. 故

$$AP \perp BC$$



**证法 10** (由天津一中安金鹏给出) 如图 18.4,因为圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的两个旁切圆,故连心线 $O_1O_2$ 必过点 $A$. 记 $O_1O_2$ 与 $EG$ 的交点为 $D$,联结 $O_1E$、$O_1B$、$BD$、$DH$、$O_2H$、$O_2F$,于是 $O_1E \perp EF$, $O_2F \perp EF$, $O_2H \perp BH$.

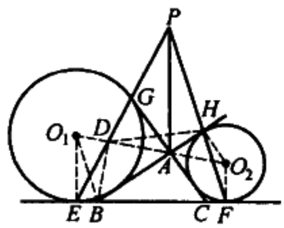



图 18.4

因圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 都是 $\triangle ABC$ 的旁切圆. 则

$$CG = CE, BF = BH$$

即
$$\angle CEG = \angle CGE = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$$

$$\angle BFH = \angle BHF = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$$

从而

$$\angle O_1DE = 180° - \angle ADE = 180° - (360° - \angle DAB - \angle ABE - \angle BED) =$$
$$-180° + (90° - \frac{1}{2}\angle BAC) + (180° - \angle ABC) + (90° - \frac{1}{2}\angle ACB) =$$
$$90° - \frac{1}{2}\angle ABC = \angle O_1BE$$

则 $O_1$、$E$、$B$、$D$ 四点共圆,即

$$\angle O_1DB = 180° - \angle O_1EB = 90°$$

于是 $$\angle PDA = \angle O_1DE = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC = \angle BHF$$

则 $D$、$A$、$H$、$P$ 四点共圆，即

$$\angle APH = \angle ADH$$

因 $$\angle O_2HB = 90° = \angle O_2DB = \angle O_2FB$$

则 $B$、$F$、$O_2$、$H$、$D$ 五点共圆，即

$$\angle O_2FH = \angle O_2DH = \angle ADH = \angle APH$$

于是 $$AP \parallel FO_2$$

因 $$O_2F \perp BC$$

故 $$AP \perp BC$$

**证法 11**　（由天津师大李宝毅、李直给出）如图 18.5，作 $PM \perp BC$，$AN \perp BC$，$M$、$N$ 分别为垂足，则原命题等价于 $M$、$N$ 两点重合，记 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，三边长分别为 $a$、$b$、$c$.

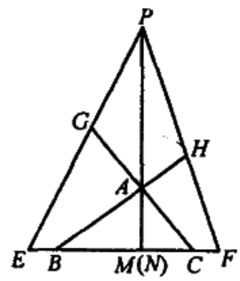



图 18.5

圆 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，故

$$CE = CG = \frac{a+b+c}{2}, \angle E = 90° - \frac{\angle C}{2}$$

同理 $$BF = BH = \frac{a+b+c}{2}, \angle F = 90° - \frac{\angle B}{2}$$

$\triangle PEF$ 中，$\angle EPF = 180° - \angle E - \angle F = 90° - \frac{\angle A}{2}$，且

$$EF = EC + BF - BC = b + c$$

由正弦定理得

$$\frac{PE}{\sin F} = \frac{EF}{\sin \angle EPF}$$

故 $$EM = PE\cos E = (b+c)\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

设 $R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$BM = EM - EB = EM - (EC - BC) =$

$$2R(\sin B+\sin C)\frac{\sin\dfrac{C+B}{2}+\sin\dfrac{C-B}{2}}{2\cos\dfrac{A}{2}}-\frac{b+c-a}{2}=$$

$$2R\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{C+B}{2}+\sin\dfrac{C-B}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}}-\frac{b+c-a}{2}=$$

$$R[\sin B+\sin C+\sin(C-B)]-\frac{b+c-a}{2}=$$

$$R[\sin(C-B)-\sin(C+B)]=2R\sin C\cos B=c\cos B=BN$$

故 $M$、$N$ 两点重合,$PA\perp BC$.



**证法 12** (由安徽省数学会普委会给出)如图 18.1,圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切,$E$、$F$、$G$、$H$、$M$、$N$ 为切点.作 $AD\perp BC$ 于 $D$.延长 $EG$、$FH$,分别交 $DA$ 的延长线于点 $P$、$P'$.记 $\triangle ABC$ 的三个内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,它们所对的边分别为 $a$、$b$、$c$.

因 $CG$、$CE$ 为切线,$CG=CE$.则

$$\angle CGE=\angle CEG=90^\circ-\angle C/2$$

$$\angle PGA=180^\circ-\angle CGE=180^\circ-(90^\circ-\angle C/2)=90^\circ+\angle C/2$$

$$\angle GPA=90^\circ-\angle CEG=90^\circ-(90^\circ-\angle C/2)=\angle C/2$$

$$AG=CG-CA=CE-b=EB+a-b=BM+a-b=c-AM+a-b$$

又
$$AG=AM$$

则
$$AG=(a-b+c)/2$$

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理知

$$PA=AG\sin\angle PGA/\sin\angle GPA=$$

$$AG\sin\left(90^\circ+\frac{C}{2}\right)/\sin\frac{C}{2}=$$

$$AG\cot\frac{C}{2}=\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2r}$$

(其中 $r$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径)

同理
$$P'A=AH\cot\frac{B}{2}=\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2r}$$

则 $PA=P'A$,即 $P=P'$,亦即 $EG$、$FH$ 的延长线交于点 $P$,所以 $PA\perp BC$.

**证法 13**　(由天津实验中学曾钢、张骅给出)如图 18.6,作 $AD \perp BC$,设直线 $DA$ 分别与 $EG$、$FH$ 交于点 $P_1$、$P_2$,联结 $O_1C$,$O_1C$ 与 $EG$ 交于点 $M$,则我们只要证明 $P_1$、$P_2$ 两点重合,即 $DP_1 = DP_2$.

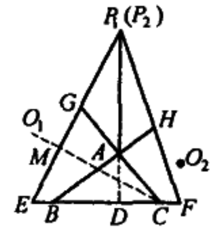


图 18.6

$CE$、$CG$ 是圆 $O_1$ 的两条切线,$\angle CMG = 90° = \angle CDP_1$,故 $C$、$D$、$M$、$P_1$ 四点共圆,则

$$\angle DP_1E = \angle DCO_1 = \frac{1}{2}\angle ACB$$

另一方面,设 $\triangle ABC$ 的三边长为 $a$、$b$、$c$,圆 $O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆,故

$$CE = \frac{a+b+c}{2} = s$$

$$DE = CE - CD = s - b\cos C = s - b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(s-b)(b+c)}{a}$$

因此 $DP_1 = \dfrac{DE}{\tan\angle DP_1E} = \dfrac{\dfrac{(s-b)(b+c)}{a}}{\tan\dfrac{\angle ACB}{2}} = \dfrac{b+c}{a}\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

同理　$DP_2 = \dfrac{DE}{\tan\angle DP_2E} = \dfrac{\dfrac{(s-c)(b+c)}{a}}{\tan\dfrac{\angle ABC}{2}} =$

$$\frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{a}}$$

故 $DP_1 = DP_2$,$P_1$、$P_2$ 两点重合,有 $PA \perp BC$.

**证法 14**　(由黑龙江教育学院张杰民给出)如图 18.7,作 $AD \perp EF$,$AD$ 交直线 $EP$ 于 $Q$,交直线 $FP$ 于 $R$.

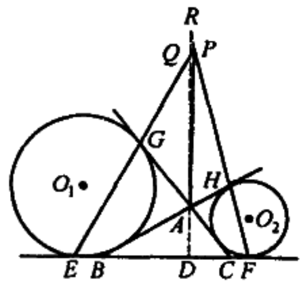


图 18.7

在 $Rt\triangle ABD$ 中,$BD = c\cos\angle ABC = c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.(其中 $a$、$b$、$c$ 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边)

同样,求得 $CD = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$,易知

$$BE = CF = \frac{b+c-a}{2}$$

$$GA=\frac{a-b+c}{2}$$

$$HA=\frac{a+b-c}{2}$$

从而
$$ED=BD+BE=\frac{(b+c)(a+c-b)}{2a}$$

$$DF=CF+CD=\frac{(b+c)(a+b-c)}{2a}$$

因直线 $EGQ$ 截 $\triangle ADC$,直线 $FHR$ 截 $\triangle ABD$,由梅涅劳斯定理,得

$$\frac{DE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AQ}{QD}=1$$

$$\frac{DF}{FB}\cdot\frac{BH}{HA}\cdot\frac{AR}{RD}=1$$

则
$$\frac{AQ}{QD}=\frac{GA}{DE}=\frac{a}{b+c},\frac{AR}{RD}=\frac{HA}{DF}=\frac{a}{b+c}$$

有
$$\frac{QD}{AQ}=\frac{RD}{AR},\frac{QD-AQ}{AQ}=\frac{RD-AR}{AR}$$



即
$$\frac{AD}{AQ}=\frac{AD}{AR}$$

于是
$$AQ=AR$$

因此,$Q$、$R$ 重合.从而,$R$、$Q$、$P$ 重合,故

$$PA\perp BC$$

**证法 15** (由江苏茹双林给出)如图 18.1,设$\angle B=2\alpha$,$\angle C=2\beta$,过 $A$ 作 $AD\perp EF$,设 $D$ 为原点,$AD$ 所在直线为 $y$ 轴,$EF$ 所在直线为 $x$ 轴,则 $x_B=-b$,$x_C=c$.因 $A$ 在 $y$ 轴上,故有

$$b\tan 2\alpha=c\tan 2\beta \qquad (*)$$

而 $BO_2$ 的方程为
$$y=\tan\alpha(x+b)$$

$CO_2$ 的方程为
$$y=\cot\beta(x-c)$$

于是,它们交点坐标为

$$O_2\left(\frac{b\tan\alpha+c\cot\beta}{\cot\beta-\tan\alpha},\frac{b+c}{\cot\beta-\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right)$$

则
$$F\left(\frac{b\tan\alpha+c\cot\beta}{\cot\beta-\tan\alpha},0\right)$$

又
$$k_{HF}=-\frac{1}{k_{BO_2}}=-\cot\alpha$$

因此，$HF$ 的方程为

$$y = -\cot\alpha\left(x - \frac{b\tan\alpha + c\cot\beta}{\cot\beta - \tan\alpha}\right)$$

同理，$EG$ 的方程为

$$y = \cot\beta\left(x - \frac{b\cot\alpha + c\tan\beta}{\tan\beta - \cot\alpha}\right)$$

解 $HF$ 和 $EG$ 的方程得

$$x_P = \frac{b\tan\alpha\tan^2\beta + c\tan\beta - b\tan\alpha - c\tan^2\alpha\tan\beta}{(1 + \tan\alpha\tan\beta)(\tan\alpha + \tan\beta)}$$

$$分子 = 2b\tan\alpha\tan\beta\cdot\frac{\tan^2\beta - 1}{2\tan\beta} + 2c\tan\alpha\tan\beta\cdot\frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha} =$$

$$-2b\tan\alpha\tan\beta\cot 2\beta + 2c\tan\alpha\tan\beta\cot 2\alpha = 0(条件(*))$$

则 $x_P = 0$；即点 $P$ 在 $y$ 轴上，因此 $PA \perp BC$.

**证法 16**　（由天津师大李建泉给出）这里用解析法证明，注意到下面事实：

(1) 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a$、$b$、$c$，且顶点坐标分别为 $(x_A, y_A)$、$(x_B, y_B)$、$(x_C, y_C)$. 则 $\angle A$ 内旁切圆的圆心坐标为 

$$\left(\frac{-ax_A + bx_B + cx_C}{-a + b + c}, \frac{-ay_A + by_B + cy_C}{-a + b + c}\right)$$

(2) 设圆 $O$ 的方程为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$，则过圆外一点 $P(x_1, y_1)$ 向圆所引两切线之切点的连线方程为

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = R^2$$

取 $BC$ 为 $x$ 轴，$BC$ 上的高 $DA$ 为 $y$ 轴，建立平面直角坐标系. 设 $A(0, y_A)$，$B(x_B, 0)$，$C(x_C, 0)$，且 $\triangle ABC$ 的三边长为 $a$、$b$、$c$，面积为 $S$，$p = \frac{a + b + c}{2}$，则

$$x_C - x_B = a, y_A^2 = c^2 - x_B^2 = b^2 - x_C^2$$

由

$$\begin{cases} x_C - x_B = a \\ x_C^2 - x_B^2 = b^2 - c^2 \end{cases}$$

可得

$$x_B = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2a}, x_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

对于圆 $O_1$，其圆心坐标为 $\left(\frac{bx_B - cx_C}{a + b - c}, \frac{ay_A}{a + b - c}\right)$，半径为 $\frac{S}{p - c}$，故 $EG$ 的直线方程为

$$\frac{ax_C + bx_C - bx_B}{a + b - c}\left(x - \frac{bx_B - cx_C}{a + b - c}\right) - \frac{ay_A}{a + b - c}\left(y - \frac{ay_A}{a + b - c}\right) = \frac{S^2}{(p - c)^2}$$

即

$$(ax_C+bx_C-bx_B)\left(x-\frac{bx_B-cx_C}{a+b-c}\right)-ay_A\left(y-\frac{ay_A}{a+b-c}\right)=2p(p-a)(p-b)$$

对于圆 $O_2$,其圆心坐标为$\left(\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c},\frac{ay_A}{a-b+c}\right)$,半径为$\frac{S}{p-b}$,故 $FH$ 的直线方程为

$$\frac{ax_B+cx_B-cx_C}{a-b+c}\left(x-\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c}\right)-\frac{ay_A}{a-b+c}\left(y-\frac{ay_A}{a-b+c}\right)=\frac{S^2}{(p-b)^2}$$

即

$$(ax_B+cx_B-cx_C)\left(x-\frac{-bx_B+cx_C}{a-b+c}\right)-ay_A\left(y-\frac{ay_A}{a-b+c}\right)=2p(p-a)(p-c)$$

$EG$、$FH$ 的两直线方程相减,得

$$(a+b+c)(x_C-x_B)x-(bx_B-cx_C)\left(\frac{ax_C+ab}{a+b-c}+\frac{ax_B-ac}{a-b+c}\right)+$$
$$a^2y_A^2\left(\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{a-b+c}\right)=2p(p-a)(c-b)\quad(*)$$



注意到

$$\frac{x_C+b}{a+b-c}+\frac{x_B-c}{a-b+c}=\frac{a(x_B+x_C)-b(x_C-x_B)+c(x_C-x_B)+ab-b^2-ac+c^2}{(a+b-c)(a-b+c)}=$$
$$\frac{b^2-c^2-ab+ac+ab-b^2-ac+c^2}{(a+b-c)(a-b+c)}=0$$

$$a^2y_A^2\left(\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{a-b+c}\right)=4S^2\left[\frac{1}{2(p-c)}-\frac{1}{2(p-b)}\right]=$$
$$2p(p-a)[(p-b)-(p-c)]=$$
$$2p(p-a)(c-b)$$

故由(*)可得 $x=0$,即点 $P$ 横坐标为 0,$PA\perp BC$.

**证法 17** (由吉林油田高中朱雅春给出)以 $E$ 为原点、$EF$ 所在直线为 $x$ 轴,建立直角坐标系.如图 18.8 所示,由题意可得

$$BC+CF=BS+SH$$
$$BC+EB=CK+KG$$

因 $SH=KG$,则两式相减得

$$EB-CF=CK-BS$$

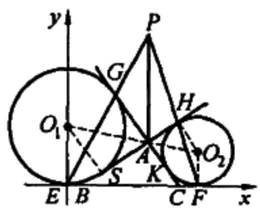



图 18.8

又由
$$BE = BS, CK = CF$$
有
$$EB = CF$$

设圆 $O_1$ 的半径为 $r_1$,圆 $O_2$ 的半径为 $r_2$,设点 $B$ 的坐标为 $(b,0)$,点 $C$ 的坐标为 $(c,0)$.则点 $F$ 的坐标为 $(b+c,0)$, $O_1$ 的坐标为 $(0,r_1)$, $O_2$ 的坐标为 $(b+c,r_2)$.于是,圆 $O_1$ 的方程为
$$x^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2$$
即
$$x^2 + y^2 - 2r_1 y = 0 \quad ①$$
圆 $O_2$ 的方程为
$$[x - (b + c)]^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2$$
即
$$x^2 + y^2 - 2(b + c)x - 2r_2 y + (b + c)^2 = 0 \quad ②$$

$EG$ 是圆 $O_1$ 关于点 $C$ 的切点弦,其方程为
$$cx + 0 \cdot y - 2r_1 \cdot \frac{y + 0}{2} = 0$$
即
$$cx - r_1 y = 0 \quad ③$$

$FH$ 是圆 $O_2$ 关于点 $B$ 的切点弦,其方程为
$$bx + 0 \cdot y - 2(b + c)\frac{x + b}{2} - 2r_2 \cdot \frac{y + 0}{2} + (b + c)^2 = 0$$
即
$$cx + r_2 y - c(b + c) = 0 \quad ④$$

由③、④得交点 $P$ 的横坐标为
$$x_P = \frac{r_1(b + c)}{r_1 + r_2}$$

联结 $O_1O_2$ 必过点 $A$,联结 $O_1S$、$O_2H$.则有
$$\triangle AO_1S \backsim \triangle AO_2H$$
故
$$\frac{O_1A}{AO_2} = \frac{O_1S}{O_2H} = \frac{r_1}{r_2}$$

由定比分点坐标公式得点 $A$ 的横坐标为
$$x_A = \frac{0 + \frac{r_1}{r_2}(b + c)}{1 + \frac{r_1}{r_2}} = \frac{r_1(b + c)}{r_1 + r_2}$$

由 $x_P = x_A$ 知 $PA$ 垂直于 $x$ 轴,即 $PA$ 与 $BC$ 垂直.

**试题 B1** 设 $A_1B_1C_1D_1$ 是任意凸四边形,$P$ 是形内一点,且 $P$ 到各顶点的连线与四边形过该顶点的两条边的夹角均为锐角.递推定义 $A_k$、$B_k$、$C_k$ 和 $D_k$ 分别为 $P$ 关于直线 $A_{k-1}B_{k-1}$、$B_{k-1}C_{k-1}$、$C_{k-1}D_{k-1}$ 和 $D_{k-1}A_{k-1}$ 的对称点($k = 2, 3, \cdots$).考察四边形序列 $A_jB_jC_jD_j$($j = 1,2,\cdots$).试问:

(1) 前 12 个四边形中,哪些必定与第 1 997 个相似,哪些未必?

(2) 假设第 1 997 个是圆内接四边形,那么在前 12 个四边形中,哪些必定是圆内接四边形,哪些未必?

对以上问题的回答,肯定的要给出证明,未必的要举例说明.

**解** 首先记

$$A'_1 = A_1, B'_1 = B_1, C'_1 = C_1, D'_1 = D_1$$

约定将 $P$ 到直线 $A'_{k-1}B'_{k-1}$、$B'_{k-1}C'_{k-1}$、$C'_{k-1}D'_{k-1}$ 和 $D'_{k-1}A'_{k-1}$ 的垂线足记为 $A'_k$、$B'_k$、$C'_k$、$D'_k$($k = 2,3,\cdots$).显然有

$$A'_kB'_kC'_kD'_k \backsim A_kB_kC_kD_k$$



只须对四边形序列 $A'_jB'_jC'_jD'_j$($j = 1,2,\cdots$)讨论相应的问题.

分别将 $\angle D'_jA'_jP$、$\angle A'_jB'_jP$、$\angle B'_jC'_jP$、$\angle C'_jD'_jP$ 记为 $\alpha_j$、$\beta_j$、$\gamma_j$、$\delta_j$;将 $\angle PA'_jB'_j$、$\angle PB'_jC'_j$、$\angle PC'_jD'_j$、$\angle PD'_jA'_j$ 记为 $\overline{\alpha_j}$、$\overline{\beta_j}$、$\overline{\gamma_j}$、$\overline{\delta_j}$.

由于 $A'_{j+1}$、$B'_{j+1}$、$C'_{j+1}$、$D'_{j+1}$ 是垂线足,利用由此产生的四点共圆关系可知

$$(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, \gamma_{j+1}, \delta_{j+1}) = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$$
$$(\overline{\alpha_{j+1}}, \overline{\beta_{j+1}}, \overline{\gamma_{j+1}}, \overline{\delta_{j+1}}) = (\overline{\alpha_j}, \overline{\beta_j}, \overline{\gamma_j}, \overline{\delta_j})$$

据此得到

$$(\alpha_{j+4}, \beta_{j+4}, \gamma_{j+4}, \delta_{j+4}) = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$$
$$(\overline{\alpha_{j+4}}, \overline{\beta_{j+4}}, \overline{\gamma_{j+4}}, \overline{\delta_{j+4}}) = (\overline{\alpha_j}, \overline{\beta_j}, \overline{\gamma_j}, \overline{\delta_j})$$

因而 $A'_{j+4}B'_{j+4}C'_{j+4}D'_{j+4} \backsim A'_jB'_jC'_jD'_j$(这是以 $P$ 为中心的旋转位似).

又因为

$$(\alpha_{j+2} + \overline{\alpha_{j+2}}) + (\gamma_{j+2} + \overline{\gamma_{j+2}}) = \alpha_j + \overline{\gamma_j} + \gamma_j + \overline{\alpha_j} = (\alpha_j + \overline{\alpha_j}) + (\gamma_j + \overline{\gamma_j})$$

所以四边形 $A'_{j+2}B'_{j+2}C'_{j+2}D'_{j+2}$ 与 $A'_jB'_jC'_jD'_j$ 的相应对角和相同.

根据以上讨论,我们断定:

(1) 在序列的前 12 个四边形之中,第 1、第 5 和第 9 个四边形与序列的第 1 997 个四边形相似,其余的未必(反例见后).

(2) 若第 1 997 个四边形为圆内接四边形,则在序列的前 12 个四边形中,第 1、3、5、7、9、11 这六个四边形必定是圆内接四边形,其余未必(反例见后).

下面举例说明(1)和(2)中关于"未必"的论断.

若四边形有一条且仅有一条对角线(称中分线)能够垂直平分另一条对角线(称被分线),则称该四边形为非平凡筝形,以下简称为筝形(相等的对象为锐角的筝形被称为"胖筝形",相等的对角为钝角的筝形被称为"瘦筝形").以一个胖筝形作为 $A_1B_1C_1D_1$,则第二、第三、第四个四边形分别为梯形、瘦筝形、梯形,第五个才又成为胖筝形,因此所产生的四边形序列以 4 为最小相似周期,前 12 个四边形中除了第 1、5、9 外,其余的都不与第 1 997 个四边形相似.

考察刚才所举例子中的序列,将该序列中的第 2 个,第 3 个,…,第 1 998 个重新编号为第 1 个,第 2 个,…,第 1 997 个,作为我们的新的四边形序列,因为胖筝形不能内接于圆,所以在新四边形序列的前 12 项中,只有第 1、3、5、7、9、11 四边形才是圆内接四边形,其余均不是.

**试题 B2**　如图 18.9,四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$,其边 $AB$ 与 $DC$ 的延长线交于点 $P$,$AD$ 与 $BC$ 的延长线交于点 $Q$,过 $Q$ 作圆 $O$ 的两条切线,切点分别为 $E$、$F$,求证:$P$、$E$、$F$ 三点共线.

**证法 1**　联结 $OP$、$OQ$、$OE$、$PQ$,联结 $EF$ 交 $OQ$ 于点 $H$,于是 $EF \perp OQ$.因为 $\angle PCQ = 180° - \angle A = \angle APQ + \angle AQP$,所以可在 $\angle PCQ$ 内作 $CG$ 交 $PQ$ 于点 $G$,使得

$$\angle QCG = \angle BPG$$

则 $B$、$P$、$G$、$C$ 和 $C$、$G$、$Q$、$D$ 都四点共圆.即

$$PQ^2 = PG \cdot PQ + GQ \cdot PQ = PC \cdot PD + QC \cdot QB = PO^2 - r^2 + QE^2$$

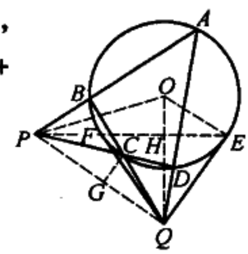



图 18.9

其中 $r$ 为圆 $O$ 的半径.从而

$$PQ^2 - QE^2 = PO^2 - OE^2$$

则

$$PQ^2 - QH^2 = PO^2 - OH^2$$

即

$$PQ^2 - PO^2 = QH^2 - OH^2 = OQ(QH - OH) \qquad ①$$

另一方面,过点 $P$ 作 $PH' \perp OQ$ 于点 $H'$,由勾股定理有

$$PQ^2 - PO^2 = QH'^2 - OH'^2 = OQ(QH' - OH') \qquad ②$$

将 ① 与 ② 比较即得

$$QH - OH = QH' - OH'$$

从而点 $H'$ 与 $H$ 重合.故 $P$、$E$、$F$ 三点共线.

**证法 2**　如图 18.10(a),联结 $AC$、$BD$ 交于点 $R$,联结 $PR$ 并延长,分别交

$AD$、$BC$ 于点 $M$、$N$. 由塞瓦定理有

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{AM}=1 \quad ①$$

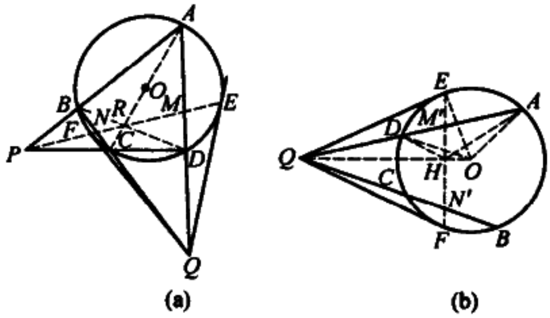



图 18.10

直线 $QCB$ 与 $\triangle APD$ 相截, 由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{AQ}=1 \quad ②$$



比较 ① 和 ②, 得到

$$\frac{DM}{AM}=\frac{DQ}{AQ} \quad ③$$

另一方面, 如图 18.10(b) 所示, 联结 $QO$、$EF$ 交于点 $H$, $EF$ 交 $AD$ 于点 $M'$, 交 $BC$ 于点 $N'$. 联结 $DH$、$AH$、$OA$、$OD$、$OE$. 由切割线定理和射影定理有

$$QD\cdot QA=QE^2=QH\cdot QO$$

则 $D$、$H$、$O$、$A$ 四点共圆, 即

$$\angle QHD=\angle DAO=\angle ODA=\angle OHA$$

于是 $OQ$ 平分 $\triangle HAD$ 的顶角 $\angle AHD$ 的外角.

因 $EH\perp QO$, 则 $HM'$ 平分 $\angle AHD$, 即

$$\frac{AM'}{DM'}=\frac{AH}{DH}=\frac{QA}{QD} \quad ④$$

比较 ③ 和 ④, 得到

$$\frac{DM}{AM}=\frac{DM'}{AM'}$$

则点 $M'$ 与 $M$ 重合, 即点 $M$ 在 $EF$ 上.

同理点 $N$ 在 $EF$ 上, 故直线 $PNM$ 与 $EF$ 重合. 故 $P$、$E$、$F$ 三点共线.

**证法 3** (由南开大学李成章教授给出) 联结 $AE$、$CE$、$DE$、$DF$, 如图 18.11

所示.

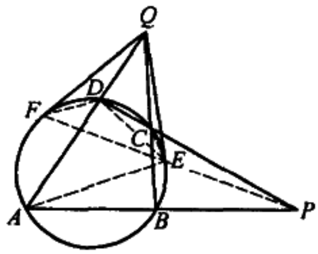


图 18.11

因为 $QE$、$QF$ 都是圆 $O$ 的切线,所以

$$\angle AEF = \angle ADF = 180° - \angle QDF$$
$$\angle FED = \angle QFD$$

又
$$\angle PDA = 180° - \angle PDQ$$
$$\angle DAP = \angle DCQ, \angle EDP = \angle QEC$$
$$\angle PAE = \angle ECB = 180° - \angle QCE$$

则
$$\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle FED} = \frac{\sin\angle QDF}{\sin\angle QFD} = \frac{QF}{QD}$$
$$\frac{\sin\angle EDP}{\sin\angle PAE} = \frac{\sin\angle QEC}{\sin\angle QCE} = \frac{QC}{QE}$$
$$\frac{\sin\angle DAP}{\sin\angle PDA} = \frac{\sin\angle DCQ}{\sin\angle QDC} = \frac{QD}{QC}$$

故
$$\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle FED}\cdot\frac{\sin\angle EDP}{\sin\angle PDA}\cdot\frac{\sin\angle DAP}{\sin\angle PAE} =$$
$$\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle FED}\cdot\frac{\sin\angle EDP}{\sin\angle PAE}\cdot\frac{\sin\angle DAP}{\sin\angle PDA} =$$
$$\frac{QF}{QD}\cdot\frac{QC}{QE}\cdot\frac{QD}{QC} = 1$$

对 $\triangle EDA$ 和点 $P$ 应用角元塞瓦定理的逆定理知 $AB$、$CD$、$EF$ 三线共点.从而 $P$、$E$、$F$ 三点共线.

**证法 4**　(由长春第 11 中学邢志峰给出)如图 18.12,设四边形 $ABCD$ 内接圆圆心为 $O$,半径为 $r$,联结 $PQ$,过 $D$、$Q$、$C$ 作圆交 $PQ$ 于 $M$,则 $\angle CMQ = \angle CDA = \angle PBC$,故 $C$、$B$、$P$、$M$ 共圆,从而

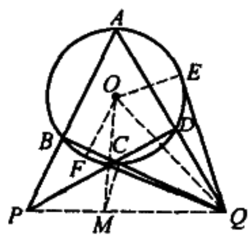


图 18.12

$$QO^2 - r^2 = (QO + r)(QO - r) = QC \cdot QB = QM \cdot PQ \quad ①$$

同理
$$PO^2 - r^2 = PQ \cdot PM \quad ②$$

② - ① 得
$$PO^2 - QO^2 = PQ(PM - QM) = (PM + MQ)(PM - QM) = PM^2 - QM^2$$
从而 $OM \perp PQ$,故 $O$、$E$、$Q$、$M$、$F$ 共圆,该圆以 $OQ$ 为直径,$OQ$ 中点 $O_1$ 为圆心,$EF$ 是圆 $O$ 与圆 $O_1$ 的公共弦,联结 $PE$,交圆 $O$ 于 $F_1$,交圆 $O_1$ 于 $F_2$,则

$$PE \cdot PF_1 = PO^2 - r^2 = PQ \cdot PM = PE \cdot PF_2$$

即 $$PF_1 = PF_2$$

推得 $$F_1 = F_2 = F$$

故 $P$、$E$、$F$ 共线.

**注** 此题(1996 ~ 1997 年度试题 B2,简称命题 2)与 1995 ~ 1996 年度试题 B1(简称命题 1)都属于证三点共线问题.事实上,命题 1 与命题 2 是可以统一的,更确切地说命题 1 是命题 2 的特殊情况,并且它们还可以引申到高等几何的问题中.①②

首先,命题 1 中若条件 $\triangle ABC$ 为任意的三角形,半圆变为圆,结论仍成立,即变为:

**命题 3** 设 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,由 $A$ 向以 $BC$ 为直径的圆 $O$ 作切线 $AP$、$AQ$,切点分别为 $P$、$Q$,求证:$P$、$H$、$Q$ 三点共线.

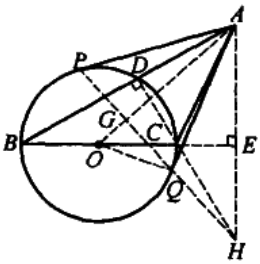


图 18.13

**证明** (1) 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时证明即为命题 1 前面的证明.



(2) 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时,垂心 $H$ 与直角三角形的直角顶点重合,结论显然成立.

(3) 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,如图 18.13 所示,设 $\triangle ABC$ 的 $AB$、$BC$ 边上的高线 $CD$ 与 $AE$ 交于点 $H$,则 $H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心,联结 $OQ$、$PQ$、$OA$,$PQ$ 与 $OA$ 交于点 $G$.因 $AQ$ 为圆 $O$ 的切线,则

$$AQ^2 = AD \cdot AB$$

又由射影定理知 $$AQ^2 = AG \cdot AO$$

及 $$AD \cdot AB = AE \cdot AH$$

则 $$AG \cdot AO = AE \cdot AH$$

即 $G$、$O$、$H$、$E$ 四点共圆.联结 $GH$,则

$$\angle HGO = \angle OEH = 90^\circ$$

但 $$\angle QGO = 90^\circ$$

即 $$\angle HGO = \angle QGO$$

则 $G$、$Q$、$H$ 三点共线,故 $P$、$Q$、$H$ 三点共线.

其次,命题 3 可推广为:

① 冯德雄.两道竞赛题的联系及引申[J].中学数学,1998(5):45-46.
② 邢志峰.由一道赛题想到的[J].中学数学,2003(2):45.

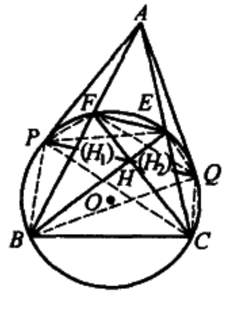


图 18.14

**命题 4**　$A$ 是圆 $O$ 外一点，过 $A$ 作直线 $AB$、$AC$ 分别交圆 $O$ 于 $F$、$B$、$E$、$C$，由 $A$ 向圆 $O$ 作切线 $AP$、$AQ$，切点分别为 $P$、$Q$，$BE$ 与 $CF$ 交于点 $H$，则 $P$、$H$、$Q$ 三点共线.

当 $BC$ 是圆 $O$ 的直径时，$H$ 正好是 $\triangle ABC$ 的垂心，即命题 3.

到此命题 4 正好是 1997 年中国数学奥林匹克竞赛第四题即命题 2 的变式. 换言之，如果命题 2 中联结 $AC$、$BD$ 交于点 $H$，则 $H$、$E$、$F$、$P$ 共线. 下面给出命题 4 的证明.

**证明**　如图 18.14，联结 $BP$、$BQ$、$CP$、$CQ$、$EP$、$EQ$、$FP$、$FQ$. 设 $BE$ 交 $PQ$ 于点 $H_1$，则 $H_1$ 分 $PQ$ 所成的比为

$$\frac{PH_1}{H_1Q}=\frac{S_{\triangle BPH_1}}{S_{\triangle BQH_1}}=\frac{\frac{1}{2}BP\cdot BH_1\sin\angle PBH_1}{\frac{1}{2}BQ\cdot BH_1\sin\angle QBH_1}=$$

$$\frac{BP}{BQ}\cdot\frac{\sin\angle PBH_1}{\sin\angle QBH_1}$$

因

$$\frac{PE}{\sin\angle PBH_1}=2R$$

$$\frac{QE}{\sin\angle QBH_1}=2R\text{（}R\text{ 为圆 }O\text{ 半径）}$$

则

$$\frac{PH_1}{H_1Q}=\frac{BP}{BQ}\cdot\frac{PE}{QE}$$

设 $CF$ 交 $PQ$ 于点 $H_2$，同理，$H_2$ 分 $PQ$ 所成的比为

$$\frac{PH_2}{H_2Q}=\frac{CP}{CQ}\cdot\frac{PF}{QF}$$

由 $\triangle APB\backsim\triangle AFP$，得

$$\frac{BP}{PF}=\frac{AP}{AF}\qquad①$$

由 $\triangle AQB\backsim\triangle AFQ$，得

$$\frac{BQ}{QF}=\frac{AQ}{AF}\qquad②$$

由 ①，② 及 $AP=AQ$ 得

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{PF}{QF}\qquad③$$

同理

$$\frac{CP}{CQ}=\frac{PE}{QE} \qquad ④$$

由 ③,④ 可得
$$\frac{PH_1}{H_1Q}=\frac{PH_2}{H_2Q}$$

故 $H_1$、$H_2$ 分 $PQ$ 所成的比相等,从而 $H_1$ 与 $H_2$ 重合.故 $PQ$、$BE$、$CF$ 交于一点 $H$.即 $P$、$H$、$Q$ 三点共线.

命题 4 还可引申为下面更一般的命题.

**命题 5** 点 $A$ 是二次曲线 $\Gamma$ 外一点,过 $A$ 作直线 $AB$、$AC$ 分别交 $\Gamma$ 于点 $D$、$B$、$E$、$C$,由 $A$ 向 $\Gamma$ 作切线 $AP$、$AQ$ 切点分别为 $P$、$Q$,$BE$ 与 $CD$ 交于点 $H$,$DE$、$BC$ 交于点 $F$,则 $P$、$H$、$Q$、$F$ 共线.

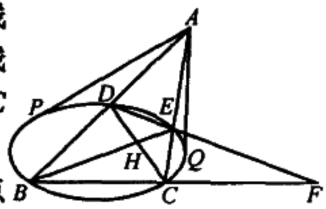


图 18.15

**证明** 如图 18.15,因 $AP$、$AQ$ 是 $\Gamma$ 的切线,切点分别为 $P$、$Q$,则由高等几何知识知 $PQ$ 是极点 $A$ 关于 $\Gamma$ 的极线,又 $D$、$B$、$C$、$E$ 是内接于 $\Gamma$ 的完全四点形,从而 $A$、$H$ 关于 $\Gamma$ 成调合共轭,$A$、$F$ 关于 $\Gamma$ 成调合共轭.于是 $H$、$F$ 在 $A$ 关于 $\Gamma$ 的极线 $PQ$ 上,故 $P$、$Q$、$H$、$F$ 共线.



此证明也适合原来两赛题,命题 5 也是已知极点作极线的方法.

**试题 C** 如图 18.16,给定 $\lambda>1$,设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{BAC}$ 上的一个动点.在射线 $BP$ 和 $CP$ 上分别取点 $U$ 和 $V$,使得 $BU=\lambda BA$,$CV=\lambda CA$,在射线 $UV$ 上取点 $Q$,使得 $UQ=\lambda UV$,求点 $Q$ 的轨迹.

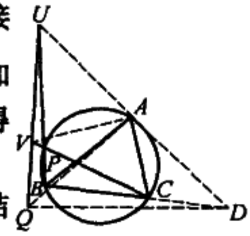


图 18.16

**解法 1** 在 $BC$ 延长线上取点 $D$,使 $BD=\lambda BC$.联结 $AD$、$AU$、$AV$、$AQ$.

因 $BU=\lambda BA$,$CV=\lambda CA$,$\angle ACV=\angle ABU$,则
$$\triangle AUB \backsim \triangle AVC$$

即
$$\frac{AU}{AV}=\frac{AB}{AC},\angle VAC=\angle UAB$$

从而
$$\angle UAV=\angle BAC$$

即
$$\triangle AUV \backsim \triangle ABC$$

因
$$UQ=\lambda UV,BD=\lambda BC$$

则
$$\triangle AUQ \backsim \triangle ABD,\triangle AVQ \backsim \triangle ACD$$

即
$$\triangle AQD \backsim \triangle AVC$$

有
$$\frac{QD}{VC}=\frac{AD}{AC}$$

即
$$QD=\frac{VC\cdot AD}{AC}=\lambda AD$$
故点 $Q$ 位于以 $D$ 为心，$\lambda AD$ 为半径的圆上.

当点 $P$ 运动到点 $B$ 时，$BP$ 化为过点 $B$ 的切线，$CP$ 化为 $CB$. 与此对应地可得到点 $Q'$. 类似地，当点 $P$ 运动到点 $C$ 时又可得到点 $Q''$. 易知，点 $Q$ 的轨迹即为上述圆的以 $Q'$ 和 $Q''$ 为端点的圆弧.

**解法2**　将图形所在的平面视为复平面，仍用表示点的字母来表示相应的复数. 因
$$\angle ACV=\angle ABU$$
则
$$\frac{U-B}{A-B}=\frac{V-C}{A-C}=W,\ |W|=\lambda$$
即
$$U=(A-B)W+B,V=(A-C)W+C$$
又
$$Q-U=\lambda(V-U)$$
则
$$\begin{aligned}Q=\lambda(V-U)+U=\lambda V+(1-\lambda)U=\\ \lambda[(A-C)W+C]+(1-\lambda)[(A-B)W+B]=\\ \lambda C+(1-\lambda)B+W[\lambda(A-C)+(1-\lambda)(A-B)]\end{aligned}$$
即
$$Q-[\lambda C+(1-\lambda)B]=W[\lambda(A-C)+(1-\lambda)(A-B)]$$
故
$$|Q-[\lambda C+(1-\lambda)B]|=\lambda|A-B+\lambda(B-C)|$$
易见，这是一个圆的方程，圆心为 $\lambda C+(1-\lambda)B$，即为 $BC$ 延长线上的点 $D$，使得 $BD=\lambda BC$，半径为
$$\lambda|A-B+\lambda(B-C)|=\lambda|A-[B+\lambda(C-B)]|=\lambda|A-D|$$
即为 $\lambda AD$. 这表明点 $Q$ 的轨迹是以点 $D$ 为心，$\lambda AD$ 为半径的圆上的一段弧，端点的确定同解法1.

**解法3**　（由山东青岛二中邹明给出）设 $BA$、$CA$ 分别对应复数 $a$、$b$，$\angle ABU=\angle ACV=\alpha$，则
$$BU=\lambda a(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha),CV=\lambda b(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$$
因为
$$\begin{aligned}BQ=UQ-UB=\lambda UV-UB=\lambda(UB+BC+CV)-UB=\\ (\lambda-1)UB+\lambda BC+\lambda CV\end{aligned}$$
所以
$$\begin{aligned}QB+\lambda BC=(1-\lambda)UB-\lambda CV=\\ \lambda(\lambda-1)a(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)-\lambda^2 b(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\end{aligned}$$
$$|QB+\lambda BC|=\lambda|\lambda(a-b)-a|=\lambda|\lambda BC+AB|$$

令 $$\lambda BC = BD$$
从而 $$|QD| = \lambda|AD|$$

故点 $Q$ 的轨迹是以 $D$ 为圆心、$\lambda|AD|$ 为半径的圆弧.

当点 $P$ 与点 $B$、$C$ 重合时,割线 $BP$、$CP$ 变为过 $B$、$C$ 的切线,此时的点 $Q_1$、$Q_2$ 即为轨迹弧的端点.

## 第1节 完全四边形的优美性质(二)

对于1996年全国高中联赛题:

如图18.17,圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在直线均相切,$E$、$F$、$G$、$H$ 为切点,并且 $EG$、$FH$ 的延长线交于点 $P$.求证:直线 $PA$ 与 $BC$ 垂直.

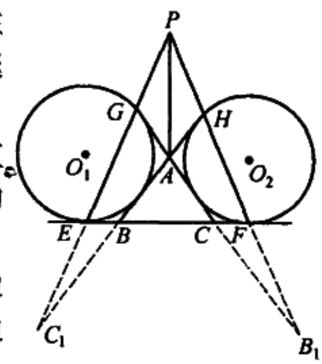


图18.17

由这道试题,如果设直线 $PE$ 与 $HB$ 交于点 $C_1$,直线 $GC$ 与 $PF$ 交于点 $B_1$,则可得到如下完全四边形的一条性质.



**性质6** 在完全四边形 $PGC_1AB_1H$ 中,若与边 $HC_1$ 相切且与边 $GB_1$ 切于点 $G$ 的圆为圆 $O_1$,与边 $GB_1$ 相切且与边 $HC_1$ 切于点 $H$ 的圆为圆 $O_2$,则对角线 $PA$ 垂直于离点 $P$ 较远的这两圆的外公切线.

运用这条性质,我们可推证如下问题①.

**例1** 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形,$\angle A$ 内的旁切圆分别与边 $AB$ 和 $AC$ 切于 $A_3$ 和 $A_4$,直线 $A_3A_4$ 与直线 $BC$ 交于点 $A_1$,相仿地可定义 $B_3$、$B_4$、$B_1$ 和 $C_3$、$C_4$、$C_1$.又设直线 $A_3A_4$ 与 $B_3B_4$ 交于点 $C_2$,$B_3B_4$ 与 $C_3C_4$ 交于点 $A_2$,$C_3C_4$ 与 $A_3A_4$ 交于点 $B_2$,如图18.18所示,求证:

(1) 点 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 共线.

(2) $\triangle A_2B_2C_2$ 的外心是 $\triangle ABC$ 的垂心.

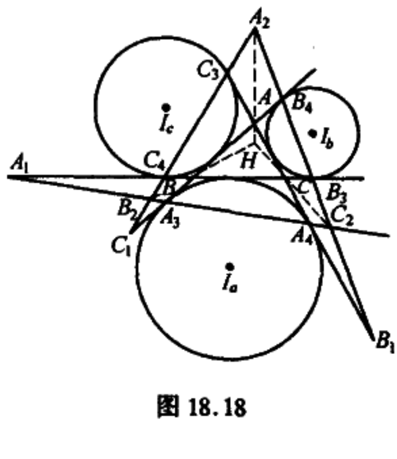


图18.18

**证明** (1) 由完全四边形性质可知,$A_2A\perp BC$,$B_2B\perp CA$,$C_2C\perp AB$,即 $A_2A$、

① 方廷刚.由一道竞赛题引出的两个新结论[J].中等数学,2002(6):15.

$B_2B$、$C_2C$ 为 $\triangle ABC$ 的三高所在直线. 故 $A_2A$、$B_2B$、$C_2C$ 共点于垂心 $H$, 亦即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三组对应点的连线共点. 故由笛沙格三角形定理知 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 三点共线.

(2) 需要证 $HA_2 = HB_2 = HC_2$. 为证 $HB_2 = HC_2$, 需要证 $\angle HB_2C_2 = \angle HC_2B_2$. 但由 $H$ 为 $\triangle ABC$ 垂心知 $\angle HBA = \angle HCA$, 即 $\angle B_2BA_3 = \angle C_2CA_4$. 再由 $\angle AA_3A_4 = \angle AA_4A_3$(切线长定理) 便得 $\angle HB_2C_2 = \angle HC_2B_2$, 故结论成立.

**性质 7**　如图 18.19, 在完全四边形 $ABCDEF$ 中, 过 $B$、$F$ 作与对角线 $AD$ 平行的线分别交对角线 $CE$ 于 $G$、$H$, 联结 $BH$、$FG$ 相交于点 $P$, 则点 $P$ 在直线 $AD$ 上.

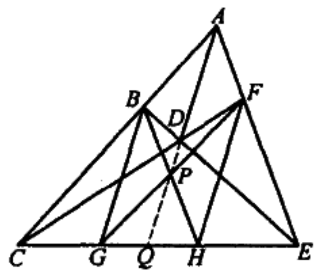



图 18.19

**证法 1**　延长 $AD$ 交 $CE$ 于 $Q$, 对 $\triangle ACE$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理, 有

$$\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AB}{BC}=1 \quad ①$$

由 $BG\parallel AD\parallel FH$ 得

$$CQ=\frac{AQ}{BG}\cdot CG \quad ②$$



$$EF=\frac{FH}{AQ}\cdot EA \quad ③$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{GQ}{CG} \quad ④$$

将 ②、③、④ 代入 ①, 得

$$\frac{GQ}{QE}\cdot\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FH}{BG}=1$$

又

$$\frac{FH}{BG}=\frac{FP}{PG}$$

则上式变为

$$\frac{GQ}{QE}\cdot\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FP}{PG}=1$$

对 $\triangle EFG$ 应用梅涅劳斯定理, 知 $A$、$P$、$Q$ 共线, 即点 $P$ 在直线 $AD$ 上.

**证法 2**　由证法 1 知, 要证 $A$、$P$、$Q$ 共线, 即证对 $\triangle BCH$, 有

$$\frac{CQ}{QH}\cdot\frac{HP}{PB}\cdot\frac{BA}{AC}=1 \quad ①$$

因

$$BG\parallel AD\parallel FH$$

有

$$\frac{EF}{FA}=\frac{EH}{QH}$$

$$QE = \frac{AQ}{FH} \cdot HE$$

$$BC = \frac{BG}{AQ} \cdot AC$$

由上述三式得
$$\frac{CQ}{QH} \cdot \frac{FH}{BG} \cdot \frac{AB}{AC} = 1$$

又
$$\frac{FH}{BG} = \frac{HP}{PH}$$

则式①成立.

**例2** 以 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 为直径作半圆,与 $AB$、$AC$ 分别交于点 $D$、$E$.过 $D$、$E$ 作 $BC$ 的垂线,垂足分别是 $F$、$G$.线段 $DG$、$EF$ 交于点 $M$.求证:$AM \perp BC$.

(1996年第37届IMO中国国家队选拔赛试题)

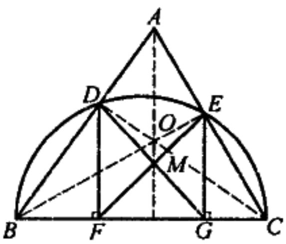



图 18.20

**证明**[①] 如图18.20,联结 $BE$ 与 $CD$,设它们相交于点 $O$.因

$$BE \perp AC, CD \perp AB$$

则 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心,于是 $AO \perp BC$,又 $DF \perp BC$,$EG \perp BC$,则

$$DF \parallel AO \parallel EG$$

由性质2,得点 $M$ 在 $AO$ 上.于是

$$AM \perp BC$$

**例3** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,在 $BC$ 边的高 $AH$ 上取界于 $A$、$H$ 之间点 $D$,联结 $BD$、$CD$ 并延长各交 $AC$ 于点 $E$,交 $AB$ 于点 $F$.联结 $EH$、$FH$.证明:$\angle AHE = \angle AHF$.

(1993年第三届澳门数学奥林匹克第三轮,第18届美国普特南数学竞赛试题)

**证明** 如图18.21,作 $EM \perp BC$ 于点 $M$,$FN \perp BC$ 于点 $N$.则

$$EM \parallel AH \parallel FN$$

由性质2,知 $EN$ 与 $FM$ 的交点 $P$ 在 $AH$ 上.又

$$\frac{EM}{FN} = \frac{EP}{NP} = \frac{MH}{NH}$$

则
$$Rt\triangle EMH \backsim Rt\triangle FNH$$

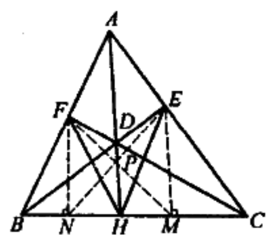



图 18.21

① 万喜人.三角形的一条性质及其应用[J].中学数学月刊,1997(9):42-43.

即　　$\angle EHM = \angle FHN$

从而　　$\angle AHE = \angle AHF$

**例 4**　如图 18.22，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$G$ 为 $AB$ 上给定的一点（$G$ 不是线段 $AB$ 的中点），设 $D$ 为直线 $CG$ 上与 $C$、$G$ 都不相同的任意一点，并且直线 $AD$、$BC$ 交于 $E$，直线 $BD$、$AC$ 交于 $F$，直线 $EF$、$AB$ 交于 $H$．试证明交点 $H$ 与 $D$ 在直线 $CG$ 上的位置无关．

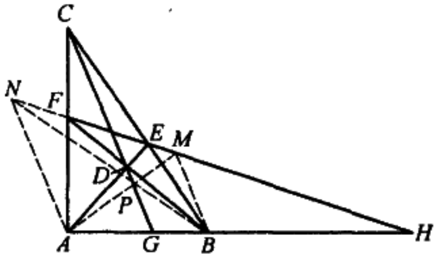


图 18.22

（1990 年苏州市高中数学竞赛试题）

**证明**　作 $BM \parallel CG \parallel AN$，点 $M$、$N$ 均在直线 $EF$ 上．联结 $AM$、$BN$．对 $\triangle CEF$，由性质 2，知 $AM$ 与 $BN$ 的交点 $P$ 在 $CG$ 上．则

$$\frac{HB}{HA} = \frac{BM}{AN} = \frac{PB}{PN} = \frac{GB}{GA}$$

这说明点 $H$ 由 $G$ 唯一确定．即点 $H$ 与 $D$ 在直线 $CG$ 上的位置无关．

**注**　例 4 中条件 $\angle BAC = 90°$ 是多余的．



## 第 2 节　一道擂台题与高中联赛题[①]

《中学数学教学》数学竞赛专栏中的第 28 号擂台题为：

如图 18.23(a)，$\triangle ABC$ 在 $\triangle A'B'C'$ 内部，$AB$ 的延长线分别交 $A'C'$、$B'C'$ 于 $P_5$、$P_1$，$AC$ 的延长线分别交 $B'A'$、$B'C'$ 于 $P_3$、$P_4$，$BC$ 的延长线分别交 $A'B'$、$A'C'$ 于 $P_6$、$P_2$．且 $AP_1 = AP_4 = BP_2 = BP_5 = CP_3 = CP_6 = BP_1 + CP_2 + AP_3$，求证：三线段 $AA'$、$BB'$、$CC'$ 所在直线相交于一点．

运用 1996 年全国高中联赛题结论可推证如上擂台题．该联赛题为：

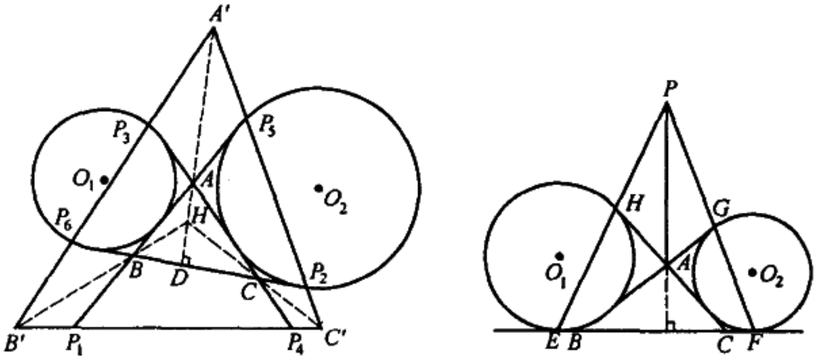
如图 18.23(b)，圆 $O_1$、圆 $O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在直线都相切，$E$、$F$、$G$、$H$ 为切点，且 $EH$、$FG$ 的延长线交于 $P$，求证：$PA$ 和 $BC$ 垂直．

下面进行推证．

由题设

$$AP_1 = AP_4, BC = BP_1 + CP_4 \qquad ①$$

① 丁一鸣，洪喜德．擂台题(28)的评注及其它[J]．中学数学教学，1998(4)：37-39．




(a) (b)

图 18.23

(事实上 $BC + CP_2 = AP_3 + BP_1 + CP_2$)

则 $P_1P_4$ 是 $\triangle ABC$ 的顶点 $A$ 所对的旁切圆切点弦(事实上不妨设切点弦为 $PQ$),则

$$AP = AQ, BC = BP + CQ \qquad ②$$



即有

$$BP + CQ = BP_1 + CP_4 (= BC)$$

$$BP_1 - CP_4 = BP - CQ (= b - c)$$

于是

$$BP = BP_1, CQ = CP_4$$

同理 $P_3P_6$ 是 $\triangle ABC$ 的顶点 $C$ 所对的旁切圆切点弦,由赛题知 $P_3P_6$、$P_1P_4$ 的交点 $B'$ 和 $B$ 的连线垂直 $AC$,即 $B'B \perp AC$,同理 $A'A \perp BC$,$C'C \perp AB$,故 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 交于一点.

从如上证法可知,这道联赛题与擂台题关系密切.

下面,我们再介绍擂台题的其他证法①.

(1) 比例线段法

**证明** (由山东泰安教育学院岳荣给出)如图 18.24,设 $BP_1 = m, CP_2 = n, AP_3 = r$,$\triangle ABC$ 的内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,由 $AP_1 = AP_4 = BP_2 = BP_5 = CP_3 = CP_6 = BP_1 + CP_2 + AP_3$ 得

$$AP_5 = m, BP_6 = n, CP_4 = r$$

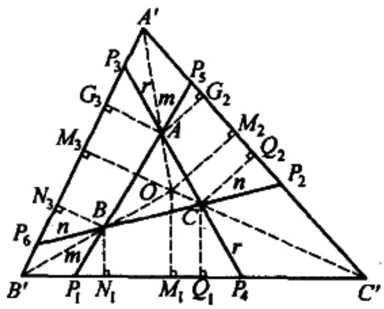



图 18.24

① 丁一鸣,洪宵德.擂台题(28)的评注及其它[J].中学数学教学,1998(4):37-39.

$$\angle P_4P_1A = \angle P_1P_4A = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\angle P_2P_5B = \angle P_5P_2B = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\angle P_3P_6C = \angle P_6P_3C = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

延长 $A'A$、$B'B$ 交于 $O$，过 $O$ 作 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$ 的垂线段 $OM_3$、$OM_1$、$OM_2$；过 $A$ 作 $A'B'$、$A'C'$ 的垂线段 $AG_3$、$AG_2$；过 $B$ 作 $A'B'$、$B'C'$ 的垂线段 $BN_3$、$BN_1$；过 $C$ 作 $B'C'$、$A'C'$ 的垂线段 $CQ_1$、$CQ_2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1N_1B$ 中，有

$$BN_1 = BP_1\sin\angle BP_1N_1 = m\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = m\cos\frac{A}{2}$$

同理
$$BN_3 = n\cos\frac{C}{2}, AG_2 = m\cos\frac{B}{2}$$

$$AG_3 = r\cos\frac{C}{2}, CQ_1 = r\cos\frac{A}{2}, CQ_2 = n\cos\frac{B}{2}$$

由 $BN_3 /\!/ OM_3$，有
$$\frac{BN_3}{BM_3} = \frac{B'B}{B'O}$$

由 $BN_1 /\!/ OM_1$，有
$$\frac{BN_1}{OM_1} = \frac{B'B}{B'O}$$

即
$$\frac{BN_3}{OM_3} = \frac{BN_1}{OM_1}$$

从而

$$\frac{OM_1}{OM_3} = \frac{BN_1}{BN_3} = m\cos\frac{A}{2}\Big/n\cos\frac{C}{2} \qquad ①$$

同理

$$\frac{OM_2}{OM_3} = \frac{AG_2}{AG_3} = m\cos\frac{B}{2}\Big/r\cos\frac{C}{2} \qquad ②$$

①、② 相除，得
$$\frac{OM_1}{OM_2} = r\cos\frac{A}{2}\Big/n\cos\frac{B}{2}$$

又由
$$\frac{CQ_1}{CQ_2} = r\cos\frac{A}{2}\Big/n\cos\frac{B}{2}$$

则有
$$\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{CQ_1}{CQ_2}$$

易证 $O$、$C$、$C'$ 三点共线，故三线段 $AA'$、$BB'$、$CC'$ 所在直线相交于一点.（本解法中也未用到 $AP_1 = \cdots = BP_1 + CP_2 + AP_3$ 的最后一等式）.

(2) 用笛沙格定理

**证明** (山东淄博市教研室朱恒杰给出)如图18.25,分别延长 $AB$ 和 $A'B'$、$CB$ 和 $C'B'$、$AC$ 和 $A'C'$ 得交点 $M$、$N$、$G$(交点可在无穷远处).

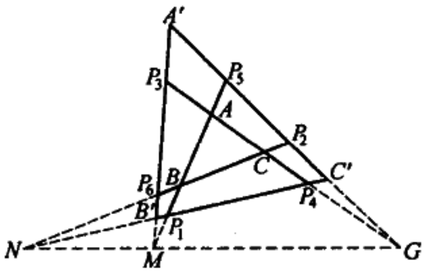



图 18.25

因 $AP_1 = BP_5$,则 $BP_1 = AP_5$,同理 $AP_3 = CP_4$,$BP_6 = CP_2$,因直线 $B'A'M$ 是 $\triangle ABC$ 的割线,由梅涅劳斯定理得

$$\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AP_3}{P_3C}\cdot\frac{CP_6}{P_6B}=-1 \qquad ①$$

同理

$$\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CP_2}{P_2B}\cdot\frac{BP_5}{P_5A}=-1 \qquad ②$$



$$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BP_1}{P_1A}\cdot\frac{AP_4}{P_4C}=-1 \qquad ③$$

令①·②·③结合已知及 $BP_1 = AP_5$,$AP_3 = CP_4$,$BP_6 = CP_2$,得

$$\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CN}{NB}=-1$$

因为点 $M$、$N$、$G$ 分别是 $\triangle ABC$ 三边延长线 $AB$、$CB$、$AC$ 上的点,由梅涅劳斯逆定理知点 $M$、$N$、$G$ 在一直线上.

又点 $M$、$N$、$G$ 分别是 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 对应边的交点,利用笛沙格逆定理可得 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的对应顶点的连线即 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 所在直线交于一点.

(3) 用塞瓦定理

**证明** (湖南师大附中高中199班黄其兴给出)先给出下列两上引理.

**引理1** 如图18.26(b),塞瓦定理的正弦形式为

$$l_1、l_2、l_3\text{ 共点}\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

**引理2** 如图18.26(c),有

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{CP_2\sin\angle CP_2C'}{CP_4\sin\angle CP_4C'}\text{(由正弦定理易证)}$$

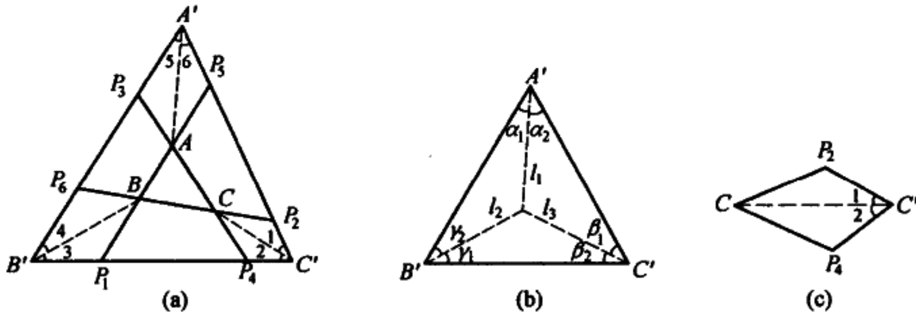



图 18.26

下证原题，如图 18.26(a)

$$AA'、BB'、CC' \text{共点} \xLeftrightarrow{\text{引理 }1} \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6}=1 \xLeftrightarrow{\text{引理 }2}$$

$$\frac{CP_2\sin\angle CP_2C'}{CP_4\sin\angle CP_4C'}\cdot\frac{BP_1\sin\angle BP_1B'}{BP_6\sin\angle BP_6B'}\cdot\frac{AP_3\sin\angle AP_3A'}{AP_5\sin\angle AP_5A'}=1 \quad ①$$

由 $$AP_1=AP_4=BP_2=BP_5=CP_3=CP_6$$

有 $$\angle CP_2C'=\angle AP_5A',\angle AP_3A'=\angle BP_6B',\angle CP_4C'=\angle BP_1B'$$

则

$$① \Leftrightarrow \frac{CP_2}{CP_4}\cdot\frac{BP_1}{BP_6}\cdot\frac{AP_3}{AP_5}=1 \quad ②$$

由条件易知 $$BP_1=AP_5,CP_2=BP_6,AP_3=CP_4$$

故式 ② 成立.

(4) 利用直线所在的特殊位置

**证明**　(由深圳育才中学杨占衡给出)如图 18.27，记 $AB=c,BC=a,CA=b,\angle ABC=\angle B,\angle BCA=\angle C,\angle CAB=\angle A$，由题设

$$c=AP_3+CP_2,b=BP_1+CP_2,a=BP_1+AP_3$$

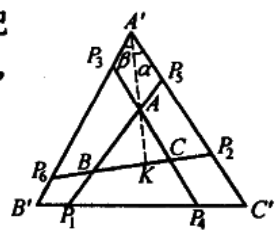



图 18.27

易得 $$AP_5=\frac{a+b-c}{2},AP_3=\frac{a+c-b}{2}$$

$$\angle AP_3A'=90^\circ+\frac{\angle C}{2},\angle AP_5A'=90^\circ+\frac{\angle B}{2}$$

故 $$\angle P_3A'P_5=360^\circ-(90^\circ+\frac{\angle C}{2}+90^\circ+\frac{\angle B}{2}+\angle A)=(\angle B+\angle C)/2$$

联结 $AA'$，设 $\angle AA'P_5=\alpha,\angle AA'P_3=\beta$(易知它们均为锐角)，则

$$\alpha+\beta=(\angle B+\angle C)/2$$

在 $\triangle AA'P_5$ 与 $\triangle AA'P_3$ 中,分别利用正弦定理有

$$\sin\alpha = \frac{(a+b-c)\sin(90^\circ+\frac{B}{2})}{2AA'}$$

$$\sin\beta = \frac{(a+c-b)\sin(90^\circ+\frac{C}{2})}{2AA'}$$

故

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{(a+b-c)\cos\frac{B}{2}}{(a+c-b)\cos\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad ①$$

如果 $\alpha > \frac{\angle B}{2}$,则由 $\alpha - \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2} - \beta$ 知 $\frac{\angle C}{2} > \beta$,由正弦函数性质易



知 $\sin\alpha > \sin\frac{B}{2} > 0, \sin\frac{C}{2} > \sin\beta > 0$,故有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > \frac{\sin(B/2)}{\sin(C/2)}$$

与式 ① 矛盾.

同样,当 $\alpha < B/2$ 时,有 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\sin(B/2)}{\sin(C/2)}$,也与式 ① 矛盾,则

$$\alpha = B/2$$

延长 $A'A$ 交 $BC$ 于 $K$,有

$$\angle A'KP_2 = \angle BP_2C' - \alpha = (90^\circ + \frac{B}{2}) - \frac{B}{2} = 90^\circ$$

则

$$AK \perp BC$$

同理

$$B'B \perp AC, CC' \perp AB$$

由三角形三条高线交于一点(垂心),本题得证.

## 第 3 节　关于三角形旁切圆的几个命题与问题

**命题 1**　三角形三个旁切圆的半径的倒数之和等于这个三角形三条高的倒数之和.

**证明**　$\triangle ABC$ 的三条高,可分别记为 $h_a$、$h_b$、$h_c$;还有三个旁切圆,它们的

半径分别记为 $r_a$、$r_b$、$r_c$.

如图 18.28,圆 $O$ 分别与 $AB$、$AC$ 的延长线切于点 $F$、$E$,与 $BC$ 切于点 $D$,则圆 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的一个旁切圆,半径为 $r_a$.

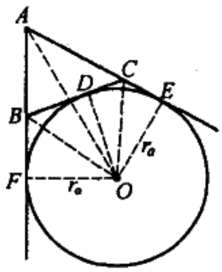



图 18.28

联结 $OF$、$OB$、$OA$、$OD$、$OC$、$OE$. 很明显

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle ACO} - S_{\triangle BCO}$$

而

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}cr_a$$

$$S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2}br_a$$

$$S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2}ar_a$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(b + c - a)r_a$$

因此

$$\frac{1}{r_a} = \frac{b + c - a}{2S_{\triangle ABC}}$$

同理

$$\frac{1}{r_b} = \frac{a + c - b}{2S_{\triangle ABC}}, \frac{1}{r_c} = \frac{a + b - c}{2S_{\triangle ABC}}$$

所以

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{a + b + c}{2S_{\triangle ABC}} \quad ①$$

又

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a$$

故

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S_{\triangle ABC}}$$

同理

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S_{\triangle ABC}}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S_{\triangle ABC}}$$

故

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2S_{\triangle ABC}} \quad ②$$

比较 ① 与 ②,得

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

为了介绍下面的命题 2,先看一条引理.

**引理 1** 若三角形的外接圆和内切圆的半径分别是 $R$ 和 $r$,圆心距为 $d$,则有 $R^2 - d^2 = 2Rr$,或 $\frac{1}{R + d} + \frac{1}{R - d} = \frac{1}{r}$.

这个引理也叫做察柏尔定理或欧拉定理.

**证明** 如图 18.29,$\triangle ABC$ 的内心为 $I$,内切圆半径为 $r$,外心为 $O$,外接圆半径为 $R$,圆心距 $OI = d$.联结 $AI$,并延长交圆 $O$ 于 $D$,联结 $DB$、$BI$,易证

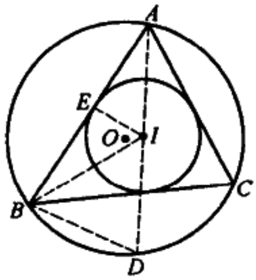


图 18.29

$$\angle DBI = \angle DIB$$

则
$$DI = DB = 2R\sin\angle BAD$$

又 $AB$ 切圆 $I$ 于 $E$,联结 $IE$,则

$$IE \perp AB$$

则
$$\sin\angle BAD = \frac{IE}{AI} = \frac{r}{AI}$$

即
$$AI \cdot DI = 2Rr$$

又由圆幂定理,点 $I$ 对圆 $O$ 的幂为 $R^2 - d^2$,故

$$R^2 - d^2 = 2Rr$$

即
$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$$



显然,由这个引理的公式可导出 $R \geqslant 2r$,这就是欧拉不等式.有了欧拉公式,便可计算出一确定三角形外心和内心的关系.同理,亦可导出外心与旁心的关系.

**命题 2** 若三角形的外接圆和旁切圆的半径分别是 $R$ 和 $r_i(i = 1,2,3)$,圆心距为 $d_i$,则有 $d_i^2 = R^2 + 2Rr_i$.

**证明** 如图 18.30,$\triangle ABC$ 的内心为 $I$,外心为 $O$,半径为 $R$,$\angle A$ 所对的旁心为 $I_1$,旁切圆半径为 $r_1$,则有 $A$、$I$ 及 $I_1$ 三点共线.$AI_1$ 交圆 $O$ 于 $E$,联结 $BI$、$BE$、$BI_1$,易知,$\angle IBI_1 = 90°$,$IE = BE$,得 $E$ 为 $II_1$ 的中点,即 $I_1E = BE$.又 $AB$ 切圆 $I_1$ 于 $D$,联结 $I_1D$,$I_1D \perp AD$,则

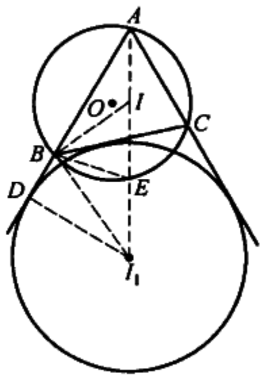


图 18.30

$$r_1 = I_1D = AI_1\sin\angle DAI_1$$

$$2R = \frac{BE}{\sin\angle DAI_1}$$

上两式相乘
$$2Rr_1 = AI_1 \cdot BE$$

即
$$2Rr_1 = AI_1 \cdot I_1E$$

又由圆幂定理,点 $I_1$ 对圆 $O$ 的幂为 $d_1^2 - R^2$,故

$$d_1^2 - R^2 = 2Rr_1$$

即
$$d_1^2 = R^2 + 2Rr_1$$

同理可证

$$d_2^2 = R^2 + 2Rr_2$$
$$d_3^2 = R^2 + 2Rr_3$$

下面讨论内心与旁心的关系.

**命题 3**　在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边的边长分别为 $a$、$b$、$c$,所对的旁心分别为 $I_1$、$I_2$、$I_3$,旁切圆的半径分别为 $r_1$、$r_2$、$r_3$,其内心为 $I$,内切圆半径为 $r$,内心 $I$ 与各旁心 $I_i(i=1,2,3)$ 的距离分别为 $d_i$,则有

$$d_1^2 = a^2 + (r_1 - r)^2$$
$$d_2^2 = b^2 + (r_2 - r)^2$$
$$d_3^2 = c^2 + (r_3 - r)^2$$

**证明**　如图 18.31,$AB$ 切圆 $I$ 于 $D$,切圆 $I_1$ 于 $E$,联结 $ID$、$I_1E$,则 $ID \perp AB$,$I_1E \perp AB$,点 $I$ 在 $I_1E$ 上的射影为 $F$,则四边形 $DEFI$ 为矩形.所以

$$IF = DE = AE - AD = \frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = a$$
$$I_1F = r_1 - r$$

由勾股定理得　$d_1^2 = a^2 + (r_1 - r)^2$

同理可证　$d_2^2 = b^2 + (r_2 - r)^2$

$$d_3^2 = c^2 + (r_3 - r)^2$$

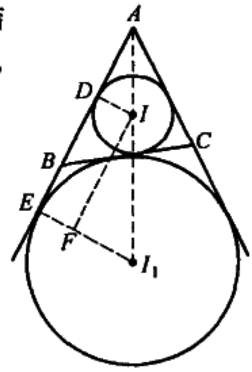



图 18.31

有了上述几个结论,很容易使人想到在四边形中是否存在与之类似的结论.

**结论**　双心四边形的外接圆和内切圆的半径分别是 $R$ 和 $r$,圆心距为 $d$,则有 $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$.

此结论与欧拉公式十分相似.有趣的是,也有一个与欧拉不等式十分相似的不等式,即 $R \geqslant \sqrt{2}r$.

为了介绍下面的命题 4,再看如下 3 条引理.

**引理 2**　(斯特瓦尔特(Stewart)定理的变形)设点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边所在直线上.令 $AP = l$,$\frac{BP}{PC} = \frac{m}{n}$,$m > 0$,$n > 0$;$BC = a$,$CA = b$,$AB = c$.

若 $P$ 在 $BC$ 边上,$m + n = 1$,则

$$l^2 = mb^2 + nc^2 - mna^2 \qquad ①$$

若 $P$ 在 $BC$ 边的延长线上,$m - n = 1$,则

$$l^2 = mb^2 - nc^2 + mna^2 \quad ②$$

若 $P$ 在 $BC$ 边的反向延长线上,$n - m = 1$,则

$$l^2 = -mb^2 + nc^2 + mna^2 \quad ③$$

**引理 3** 设 $G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,$P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任一点,则

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) = 9PG^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad ④$$

事实上,联结 $AG$ 交 $BC$ 于 $M$,由三角形中线长公式,有

$$6(PB^2 + PC^2) = 12PM^2 + 3a^2$$

及

$$9GA^2 = 4AM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

由 ① 中令 $m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}$ 得

$$6(2PM^2 + PA^2) = 6(3PG^2 + 2MG^2 + GA^2)$$

上述三式相加化简即得证.

显然,由式 ④,若点 $P$ 换为三角形外心 $O$,则有

$$9OG^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 \quad ⑤$$

其中 $R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.



设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r$,三角形半周长为 $s$,由式 ④,将 $P$ 换为内心 $I$,则有

$$9GI^2 = 3(IA^2 + IB^2 + IC^2) - (a^2 + b^2 + c^2) =$$
$$3[3r^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2] - (a^2 + b^2 + c^2)$$

化简即得

$$9GI^2 = 9r^2 - 3s^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad ⑥$$

同理,对于 $\angle A$ 内的旁切圆圆心 $I_a$,半径 $r_a$,有

$$9GI_a^2 = 9r_a^2 - 3(s-a)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad ⑦$$

**引理 4** 设 $R$、$r$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径,$s$ 为其半周长,$r_a, r_b, r_c$ 是分别位于 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆半径,令 $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)} = u$,则

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \quad ⑧$$

$$r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = s^2 \quad ⑨$$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r = 16R^2 - 2u^2 \quad ⑩$$

$$s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 = 2u^2 \quad ⑪$$

$$u^2 = s^2 - r^2 - 4Rr = (s-a)^2 - r_a^2 + 4r_aR \quad ⑫$$

事实上,由 $rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = s_\triangle$ 和 $4Rs_\triangle = abc$

代入化简易证得上述各式.

**命题 4**[①]　设 $O$、$I$、$G$、$H$、$V$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、内心、重心、垂心和九点圆圆心，$I_a$、$I_b$、$I_c$ 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的三个旁切圆的圆心，令 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)} = u$. 对于 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点 $P$，令 $f(P) = PI^2 + PI_a^2 + PI_b^2 + PI_c^2$，则

(1) $f(O) = 12R^2$；

(2) $f(A) = f(B) = f(C) = 16R^2$；

(3) $f(G) = 16R^2 - \frac{8}{9}u^2$；

(4) $f(H) = 48R^2 - 8u^2$；

(5) $f(V) = 21R^2 - 2u^2$.

**证明**　(1) 由前面的命题 2 及上述引理 4 得

$$f(O) = (R^2 - 2rR) + \sum(R^2 + 2r_aR) = 4R^2 + 2R\cdot 4R = 12R^2$$

其中 $\sum$ 表示对 $a$、$b$、$c$ 轮换求和，下同.

(2) 易知 $\triangle ABC$ 是其旁心 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂足三角形，$A$、$I$、$C$、$I_b$ 四点共圆，且 $II_b$ 为直径；$A$、$I_c$、$I_a$、$C$ 四点共圆，$I_cI_a$ 为直径，等等. 从而

$$\angle AI_aC = \frac{1}{2}\angle B, \angle AI_bC = 90° - \angle AI_aC = 90° - \frac{1}{2}\angle B$$

由勾股定理、正弦定理易得

$$f(A) = (AI^2 + AI_b^2) + (AI_c^2 + AI_a^2) = II_b^2 + I_cI_a^2 =$$

$$\left(\frac{AC}{\sin\angle AI_bC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{\sin\angle AI_cC}\right)^2 = \frac{4b^2}{\sin^2 B} = 16R^2$$

(3) 由引理 3 中的式 ⑥、⑦ 及引理 4，得

$$9f(G) = (9r^2 - 3s^2 + 4u^2) + \sum[9r_a^2 - 3(s-a)^2 + 4u^2] =$$

$$9(16R^2 - 2u^2) - 6u^2 + 16u^2 = 144R^2 - 8u^2$$

由此即证.

(4) 由欧拉定理知 $OG : VH = 2:1$ 及引理 2 中式 ①，令 $m = \frac{2}{3}$，$n = \frac{1}{3}$，得

$$2IO^2 + IH^2 = 3IG^2 + 2OG^2 + GH^2$$

① 吴康，龙开奋. 三角形内心和旁心的一种"对称性"[J]. 中学数学研究，2006(5):22-23.

又由引理3中的⑥、⑦、⑤及命题2、引理4,得

$$HI^2 = 3IG^2 + 6OG^2 - 2IO^2 =$$
$$\frac{1}{3}(9r^2 - 3s^2 + 4u^2) + \frac{2}{3}(9R^2 - 2u^2) - 2(R^2 - 2Rr) =$$
$$3r^2 - s^2 + 4R^2 + 4Rr = 2r^2 + 4R^2 - u^2$$

同理,$HI_a^2 = 2r_a^2 + 4R^2 - u^2$,等等.从而,由引理4中式⑧、⑨,得

$$f(H) = (2r^2 + 4R^2 - u^2) + \sum(2r_a^2 + 4R^2 - u^2) =$$
$$2(16R^2 - 2u^2) + 16R^2 - 4u^2 = 48R^2 - 8u^2$$

注　易证得 $f(H) = 4(HA^2 + HB^2 + HC^2)$

(5)类似于(4)的证明,由欧拉定理,三角形中线长公式(引理2特例)、引理3中式⑥、⑦、⑤及命题2,有

$$4VI^2 = 2OI^2 + 2HI^2 - OH^2 =$$
$$2(R^2 - 2Rr) + 2(2r^2 + 4R^2 - u^2) - (9R^2 - 2u^2) =$$
$$R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R - 2r)^2$$



由欧拉不等式知 $R \geqslant 2r$,故 $2VI = R - 2r$.

同理,可得 $2VI_a = R + 2r_a$,等等.

从而,由引理4中⑧、⑨,得

$$4f(V) = (R - 2r)^2 + \sum(R + 2r_a)^2 =$$
$$4R^2 + 4R^2 \cdot 4R + 4(16R^2 - 2u^2)$$

即证得结论.

注　显然,$VI + VI_a + VI_b + VI_c = 6R$.利用 $VI = \frac{R}{2} - r, VI_a = \frac{R}{2} + r_a$,易推得著名的费尔巴哈(Feuerbach)定理:

三角形的九点圆与内切圆相内切,且与三旁切圆相外切.

最后,也顺便指出:

(1)设 $M_1$、$M_2$、$M_3$ 为 $\triangle ABC$ 三边的中点,则 $f(M_1) = 16R^2 - a^2$,且 $f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 48R^2 - 2u^2$.

(2)$II_a = 4R\sin\frac{A}{2}, I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2}, f(I) = 8R(2R - r), f(I_a) = 8R(2R + r_a)$,且 $f(I) + f(I_a) + f(I_b) + f(I_c) = 96R^2$.

**命题5**[①] 设$\triangle ABC$的内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的旁切圆与三边所在直线相切的切点构成的三角形的面积依次为$\Delta_A,\Delta_B,\Delta_C$，且记$BC=a,CA=b$，$AB=c,p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle ABC$的面积、外接圆、内切圆半径分别为$\Delta$、$R$、$r$，则有

$$\sum\Delta_A=\frac{\Delta}{2R}(4R+r)$$

(其中$\sum$表示循环和，如$\sum\Delta_A$表示$\Delta_A+\Delta_B+\Delta_C$，余类推.)

**证明** 如图18.32，设$\triangle ABC$的内角$A$所对的旁切圆与三边所在直线分别相切于点$D$、$E$、$F$. 易知$BD=BF=p-c,CD=CE=p-b$.

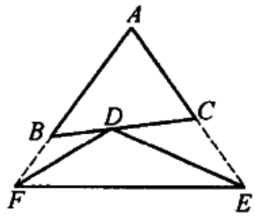



图18.32

在$\triangle BDF$中利用正弦定理，有

$$\frac{DF}{\sin\angle DBF}=\frac{BF}{\sin\angle BDF}$$

故
$$\frac{DF}{\sin(\pi-B)}=\frac{BF}{\sin\frac{B}{2}}$$

所以
$$DF=\frac{BF\sin B}{\sin\frac{B}{2}}=2(p-c)\cos\frac{B}{2}$$

同理
$$DE=2(p-b)\cos\frac{C}{2}$$

所以
$$\Delta_A=\frac{1}{2}DF\cdot DE\sin\angle FDE=$$
$$\frac{1}{2}\cdot 4(p-b)(p-c)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\left(\pi-\frac{B+C}{2}\right)=$$
$$2(p-b)(p-c)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

注意到$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$，因而有

$$\Delta_A=\frac{p}{2R}(p-b)(p-c)$$

同理
$$\Delta_B=\frac{p}{2R}(p-c)(p-a)$$
$$\Delta_C=\frac{p}{2R}(p-a)(p-b)$$

① 李显权.三角形的旁切圆切点三角形的一个性质[J].中学数学月刊,2006(3):26.

将以上三式相加,再利用熟知恒等式

$$\sum(p-b)(p-c)=r(4R+r),pr=\Delta$$

可得

$$\sum\Delta_A=\frac{\Delta}{2R}(4R+r)$$

**注** 以上涉及三角形的旁切圆切点三角形面积的恒等式,形式简洁优美,还有妙用——给出著名的外森比克(weitenbock)不等式的一个新隔离.

由于 $4R+r\geqslant\sqrt{3}p$,利用以上定理立得

$$\sum\Delta_A\geqslant\frac{\Delta}{2R}\cdot\sqrt{3}p=\sqrt{3}\frac{p}{2R}\Delta \qquad ①$$

又因

$$\begin{aligned}4\sum(p-b)(p-c)&=4\sum ab-4p^2=4\sum ab-(\sum a)^2=\\&2\sum ab-\sum a^2\leqslant 2\sum ab-\sum ab=\\&\sum ab\leqslant\sum a^2\end{aligned}$$

于是由定理的证明过程可知

$$\begin{aligned}\sum\Delta_A&=\frac{p}{2R}\sum(p-b)(p-c)=\frac{p}{8R}\cdot 4\sum(p-b)(p-c)\leqslant\\&\frac{p}{8R}\sum ab\leqslant\frac{p}{8R}\sum a^2\end{aligned} \qquad ②$$



综合①、②即有

$$\sum a^2\geqslant\sum ab\geqslant\frac{8R}{p}\sum\Delta_A\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

**命题6** $M$ 是 $\triangle ABC$ 边 $AB$ 上的任意一点:$r_1$、$r_2$、$r$ 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 内切圆的半径,$q_1$、$q_2$、$q$ 分别是上述三角形在 $\angle ACB$ 内部的旁切圆半径.证明:$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

(1970 年第 12 届 IMO 试题)

**证明** 如图 18.33,对任意 $\triangle A'B'C'$,由正弦定理可知

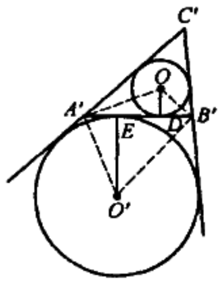


图 18.33

$$OD=OA'\sin\frac{A'}{2}=A'B'\cdot\frac{\sin\frac{B'}{2}}{\sin\angle A'OB'}\cdot\sin\frac{A'}{2}=A'B'\cdot\frac{\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}}{\sin\frac{A'+B'}{2}}$$

$$O'E = A'B' \cdot \frac{\cos\frac{A'}{2}\cos\frac{B'}{2}}{\sin\frac{A'+B'}{2}}$$

则
$$\frac{OD}{O'E} = \tan\frac{A'}{2}\tan\frac{B'}{2}$$

亦即有

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{\angle CMA}{2}\tan\frac{\angle CNB}{2}\tan\frac{B}{2} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{r}{q}$$

**命题 7**[①] $\triangle ABC$ 中,内切圆 $I$ 切 $AC$ 于 $D$,直线 $AC$ 同侧两旁切圆圆 $O_1$、圆 $O_2$ 分别切 $CB$ 延长线于 $E$,切 $AB$ 延长线于 $F$,则 $AE$、$BD$、$CF$ 交于一点 $P$.若第三旁切圆为圆 $O_3$,三角形重心为 $G$,则 $G$ 分 $\overrightarrow{PO_3}$ 之比为 $2:1$,如图18.34所示.

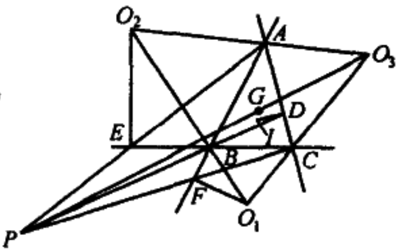



图 18.34

**证明** (同一法)延长 $O_3G$ 到 $P_1$,使 $GP_1 = 2O_3G$,只要证明 $P_1$、$E$、$A$,$P_1$、$F$、$C$,$P_1$、$B$、$D$ 三组三点共线即可.

设 $AG$ 交 $BC$ 于 $M$,$AO_3$ 交直线 $BC$ 于 $N$,$AP_1$ 交直线 $CB$ 于 $J$,先证 $J$ 为圆 $O_1$ 与 $CB$ 的切点 $E$,如图 18.35 所示.

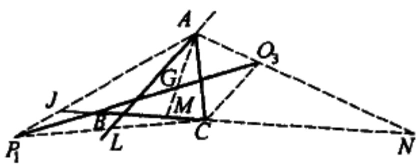



图 18.35

由 $BO_3$ 平分 $\angle ABC$ 及 $CO_3$ 平分 $\angle ACB$ 的外角有

$$\frac{BN}{BA} = \frac{NO_3}{AO_3} = \frac{NC}{AC}$$

由
$$\frac{AG}{GM} = \frac{P_1G}{GO_3} = 2$$

有
$$MO_3 \parallel AP_1$$

故
$$\frac{NO_3}{AO_3} = \frac{NM}{MJ}$$

于是有
$$\frac{NO_3}{AO_3} = \frac{BN}{BA} = \frac{NM}{MJ} = \frac{NC}{AC}$$

依等比性质
$$\frac{BN - NM}{BA - MJ} = \frac{MN - NC}{MJ - AC}$$

① 黄华松.三角形的另三条新欧拉线[J].中学数学,2005(10):38-39.

即
$$\frac{BM}{AB-MJ}=\frac{MC}{MJ-AC}$$
由 $BM=MC$,有
$$AB-MJ=MJ-AC \qquad ①$$

显然 $J$ 在 $CB$ 的延长线上,否则,$J$ 在 $BC$ 边上,则有 $2MJ<2BM=BC<AB+AC$,与 $2MJ=AB+AC$ 矛盾.依条件 $MJ=BJ+BM=CJ-CM$.故式①变成
$$AB-BJ-BM=CJ-CM-AC$$
从而
$$AB-BJ=CJ-AC \qquad ②$$

下证 $J$ 是圆 $O_1$ 与直线 $CB$ 的切点 $E$.

设圆 $O_1$ 切 $AB$ 于 $Q$,切直线 $CA$ 于 $R$,如图 18.36 所示,由切线长定理得
$$AB-BE=AQ$$
$$CE-AC=CR-AC=AR$$
$$AQ=AR$$

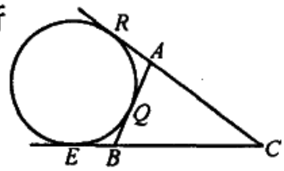


图 18.36



故 $AB-BE=CE-AC$,结合②知 $E$ 与 $J$ 重合.故 $P_1A$ 与 $BC$ 交点 $J$ 恰为圆 $O_1$ 与 $BC$ 的切点 $E$.

若 $P_1C$ 与直线 $AB$ 交于点 $L$,如图 18.35 所示.同理可证 $AL-AC=BC-BL$,进一步可证 $P_1C$ 与 $AB$ 之交点 $L$ 恰为圆 $O_2$ 与 $AB$ 延长线的切点.

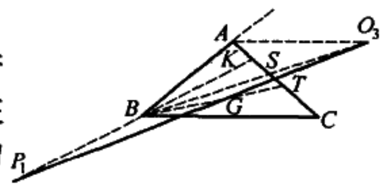


图 18.37

再证 $P_1B$ 与 $AC$ 的交点 $K$ 就是内切圆 $I$ 在 $AC$ 上的切点 $D$,如图 18.37 所示.

设 $BC>AB$,$BO_3$ 交 $AC$ 于 $S$,$BG$ 交 $AC$ 于 $T$,由 $\frac{AB}{BC}=\frac{AS}{SC}<1$,知 $S$ 一定在线段 $AT$ 上.由
$$\frac{TG}{BG}=\frac{O_3G}{GP_1}=\frac{1}{2}$$
有
$$TO_3 /\!/ P_1B$$
即
$$TO_3 /\!/ BK$$

由 $BO_3$ 平分 $\angle ABC$,有
$$\frac{SC}{BC}=\frac{AS}{AB}$$

由 $AO_3$ 平分 $\angle BAC$ 外角,有

$$\frac{AS}{AB}=\frac{SO_3}{BO_3}$$

由
$$TO_3 /\!/ BK$$

有
$$\frac{SO_3}{BO_3}=\frac{ST}{KT}$$

故
$$\frac{SC}{BC}=\frac{AS}{AB}=\frac{ST}{KT}$$

由等比性质有
$$\frac{SC-ST}{BC-KT}=\frac{AS+ST}{AB+KT}$$

即
$$\frac{CT}{BC-KT}=\frac{AT}{AB+KT}$$

由 $CT=AT$,有

$$BC-KT=AB+KT \tag{③}$$

显然 $K$ 是 $AC$ 的内分点,否则 $K$ 在 $CA$(或 $AC$) 的延长线上,$2KT>AC>BC-AB$ 与式③$2KT=BC-AB$ 矛盾.

由于 $KT=AT-AK=CK-CT$,代入式③有

$$BC-(AT-AK)=AB+CK-CT$$

即
$$BC+AK=AB+CK$$

也就是
$$BC-CK=AB-AK$$

易知,边 $AC$ 上满足 $BC-CK=AB-AK$ 的点 $K$,恰为内切圆 $I$ 与边 $AC$ 的切点 $D$.故 $P_1B$ 与 $AC$ 的交点恰为内切圆与 $AC$ 的切点 $D$.如果 $BC<AB$,式③便变为 $BC+KT=AB-KT$,上述结论依然成立.

综上所述,$P_1$、$E$、$A$,$P_1$、$F$、$C$,$P_1$、$D$、$B$ 均三点共线,即 $A$ 与旁切圆圆 $O_1$ 在 $CB$ 上的切点 $E$ 连线 $AE$,$C$ 与旁切圆圆 $O_2$ 在 $AB$ 上的切点 $F$ 连线 $CF$,$B$ 与内切圆 $I$ 在 $AC$ 上的切点 $D$ 连线 $BD$,三线交于一点 $P_1$(即命题 7 中的点 $P$),且 $G$ 分 $\overrightarrow{PO_3}$ 之比为 $2:1$,命题 7 得证.

类似地,还可得到如下结论.

**命题8**　$\triangle ABC$ 中,内切圆圆 $I$ 切 $AB$ 于 $F_1$,旁切圆圆 $O_3$ 切 $BC$ 延长线于 $E_1$,旁切圆圆 $O_2$ 切 $AC$ 延长线于 $D_1$,则直线 $CF_1$、$AE_1$、$BD_1$ 交于一点 $P_2$.设另一旁切圆为圆 $O_1$,三角形重心为 $G$,则 $G$ 分 $\overrightarrow{P_2O_1}$ 之比为 $2:1$.

**命题9**　$\triangle ABC$ 中,内切圆圆 $I$ 切 $BC$ 于 $E_2$,旁切圆圆 $O_3$ 切 $BA$ 延长线于 $F_2$,旁切圆圆 $O_1$ 切 $CA$ 延长线于 $D_2$,则 $CF_2$、$BD_2$、$AE_2$ 交于一点 $P_3$,设另一旁切圆为圆 $O_2$,三角形重心 $G$,则 $G$ 分 $\overrightarrow{P_3O_2}$ 之比为 $2:1$.

注　与"界心"的定义相似,依命题7证明过程知:位于三角形外的点 $P$ 与各顶点连线外分(或内分)对边成的两段与三角形另两边对应差的绝对值相等,故 $P$ 可称为三角形的外差界心.同样,命题8、9中 $P_2$、$P_3$ 亦可称为三角形的外差界心.

这样,就得到了三角形的类似于"内心、重心、界心"线的另三条新欧拉线.由于界心其实是三角形三个旁切圆在三边上的切点与相对顶点连线的交点,故这四条新欧拉线其实就是三角形的三个旁切圆与一个内切圆共四个圆中任选一个圆的圆心为一点,三角形的重心 $G$ 为第二点,其余三个圆在三边所在直线上的切点与相对顶点连线的交点为第三点,这三点共线而得的4条直线,且重心 $G$ 分每条直线上三角形的外差界心(或界心)与另一旁切圆的圆心(或内心)所连线段之比为 $2:1$.它们十分和谐而有序地分布在同一个三角形中,再次让我们领略到了数学的无穷魅力.

三角形的内切圆与旁切圆有许多统一的性质.下面以一些问题为例说明.



**问题1**　如图18.38,圆 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,$D$ 为 $BC$ 边上的切点,$DF$ 为圆 $O$ 的一条直径,联结 $AF$ 并延长交 $BC$ 于 $E$.求证:$CD = BE$.

(第八届美国邀请赛(AIME)试题)

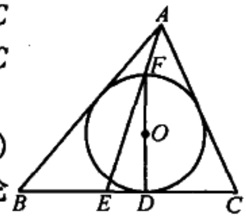


图 18.38

事实上,将条件"内切圆"改为"旁切圆",我们猜想结论仍然成立,证明如下.

如图18.39,过 $F$ 作圆 $O$ 的切线分别交 $AB$、$AC$ 的延长线于 $M$、$N$,联结 $OB$、$OM$,设圆 $O$ 的半径为 $r$,则

$$MN /\!/ BC$$

则
$$\frac{MF}{BE} = \frac{AF}{AE} = \frac{FN}{EC} \Rightarrow \frac{MF}{FN} = \frac{BE}{EC}$$

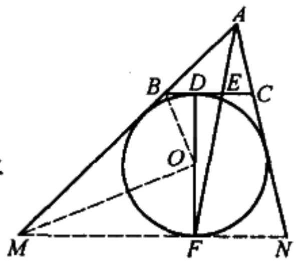


图 18.39

由 $OB$、$OM$ 分别为同旁内角 $\angle DBM$、$\angle BMN$ 的平分线知 $\angle BOM = 90°$,从而 $\triangle BOD \backsim \triangle OMF$.故

$$\frac{MF}{r} = \frac{r}{BD} \quad ①$$

同理

$$\frac{FN}{r} = \frac{r}{CD} \quad ②$$

(其中 $r$ 为圆 $O$ 半径)

① ÷ ② 得

$$\frac{MF}{FN}=\frac{CD}{BD}\Rightarrow\frac{BE}{EC}=\frac{CD}{BD}$$

从而
$$\frac{BE}{BE+EC}=\frac{CD}{CD+BD}$$

故
$$CD=BE$$

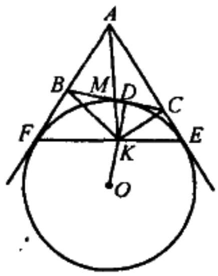


图 18.40

**问题 2**　如图 18.40,圆 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 外的旁切圆,$D$、$E$、$F$ 分别是圆 $O$ 与 $BC$、$CA$、$AB$ 的切点.

(1) 若 $OD$ 与 $EF$ 相交于 $K$,求证:$AK$ 平分 $BC$;

(2) 如果 $BC=a,CA=b,AB=c$,且 $b>c$,求 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BKC}$.

(1991 年四川省数学竞赛题)

与上题相反,若将"旁切圆"改为"内切圆",结论是否仍然成立?回答是肯定的,证明如下.

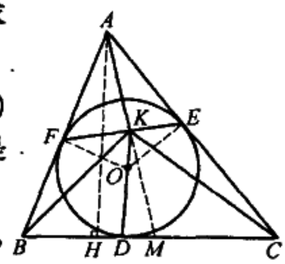


图 18.41

如图 18.41,记 $\angle ABC=\angle B,\angle ACB=\angle C,\angle BAC=\angle A$,设 $AK$ 的延长线与 $BC$ 相交于 $M$,联结 $OE$、$OF$.

(1)$\angle B=\pi-\angle DOF,\angle C=\pi-\angle DOE,OE=OF$,因 $\frac{FK}{\sin\angle KOF}=\frac{OK}{\sin\angle KFO},\frac{EK}{\sin\angle KOE}=\frac{OK}{\sin\angle KEO}$,则

$$\frac{FK}{EK}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

又
$$\frac{FK}{\sin\angle FAK}=\frac{AF}{\sin\angle AKF}=\frac{AE}{\sin\angle AKE}=\frac{EK}{\sin\angle KAE}$$

则
$$\frac{\sin B}{\sin\angle FAK}=\frac{\sin C}{\sin\angle EAK}$$

从而
$$\frac{BM}{CM}=\frac{\frac{BM}{AM}}{\frac{CM}{AM}}=\frac{\frac{\sin\angle FAK}{\sin B}}{\frac{\sin\angle EAK}{\sin C}}=1$$

故
$$BM=CM$$

(2) 作 $AH\perp BC$ 于 $H$.则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{AH}{KD}=\frac{HM}{DM}$$

由 $b>c$,知

$$HM=\frac{a}{2}-c\cos B=\frac{a}{2}-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{b^2-c^2}{2a}$$

$$DM = CD - CM = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

故 $$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BKC} = (b+c) : a$$

**问题 3** 设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$．又 $D$、$E$ 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的内心，证明：$AP$、$BD$、$CE$ 相交于一点，如图 18.42 所示．

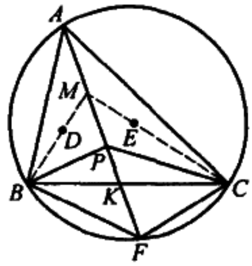



图 18.42

这是第 37 届 IMO 试题的第 2 题．事实上，若 $D$、$E$ 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的旁心，仍可得到相同的结论．

设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$．又 $D_i$、$E_i(i=1,2,3)$ 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的旁心，则 $AP$、$BD_i$、$CE_i$ 相交于一点．

事实上，如图 18.43 所示，$D_1$、$E_1$ 分别是 $\triangle APB$、$\triangle APC$ 的旁心，延长 $AP$ 交 $BC$ 于点 $K$，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 $F$，联结 $BF$、$CF$．则

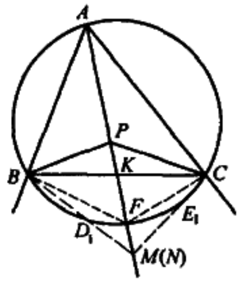



图 18.43

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AKC + \angle PCK - \angle ABC = \angle PCK + \angle KAB = \angle PCK + \angle KCF = \angle PCF$$

同理 $$\angle APB - \angle ACB = \angle PBF$$

又 $$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$$

则 $$\angle PCF = \angle PBF$$

由正弦定理有

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB} = \frac{PF}{\sin\angle PBF} = \frac{PF}{\sin\angle PCF} = \frac{PC}{\sin\angle PFC}$$

从而 $$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{AC}$$

于是 $$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

设 $BD_1$ 和 $AP$ 相交于 $M$，$CE_1$ 与 $AP$ 相交于 $N$，则

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PB}{AB}, \frac{PN}{NA} = \frac{PC}{AC}$$

所以有 $$\frac{PM}{MA} = \frac{PN}{NA}$$

因此知 $M$、$N$ 两点重合．故 $AP$、$BD_1$、$CE_1$ 相交于一点．

由于一个三角形有三个旁心，因此还可选取 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 的旁心 $D_2$、$E_2$ 及 $D_3$、$E_3$，结论均成立，这里只证明了一种情形，其他情形读者可仿证．

# 第 19 章　1997 ~ 1998 年度试题的诠释

**试题 A**　如图 19.1,已知两个半径不相等的圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 相交于 $M$、$N$ 两点,且圆 $O_1$、圆 $O_2$ 分别与圆 $O$ 内切于点 $S$、$T$.求证:$OM \perp MN$ 的充分必要条件是 $S$、$N$、$T$ 三点共线.

**证明**　如图 19.1,设圆 $O_1$、圆 $O_2$、圆 $O$ 的半径分别为 $r_1$、$r_2$、$r$.由条件知 $O$、$O_1$、$S$ 三点共线,$O$、$O_2$、$T$ 三点共线,且 $OS = OT = r$.联结 $OS$、$OT$、$SN$、$NT$、$O_1M$、$O_1N$、$O_2M$、$O_2N$、$O_1O_2$.

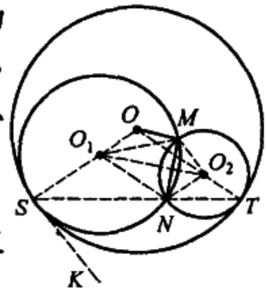



图 19.1

首先证充分性.

**证法 1**　设 $S$、$N$、$T$ 三点共线,则 $\angle S = \angle T$.又 $\triangle O_1SN$ 与 $\triangle O_2NT$ 均为等腰三角形.故

$$\angle S = \angle O_1NS, \angle T = \angle O_2NT$$

于是
$$\angle S = \angle O_2NT, \angle T = \angle O_1NS$$

从而
$$O_2N \parallel OS, O_1N \parallel OT$$

故四边形 $OO_1NO_2$ 为平行四边形.因此

$$OO_1 = O_2N = r_2 = MO_2, OO_2 = O_1N = r_1 = MO_1$$

故
$$\triangle O_1MO \cong \triangle O_2OM$$

从而
$$S_{\triangle O_1MO} = S_{\triangle O_2OM}$$

由此得
$$O_1O_2 \parallel OM$$

又由于
$$O_1O_2 \perp MN$$

故
$$OM \perp MN$$

**注**　若设 $SK$ 是圆 $O_1$ 与圆 $O$ 的公切线,则有

$$\frac{1}{2}\angle SO_1N = \angle NSK = \angle TSK = \frac{1}{2}\angle SOT$$

则
$$O_1N \parallel OO_2$$

同理
$$O_2N \parallel OO_1$$

故 $OO_1NO_2$ 是平行四边形.

**证法 2** (由天津实验中学姜薇给出)如图 19.2,由已知条件知 $O$、$O_1$、$S$ 三点共线,$O$、$O_2$、$T$ 三点共线,延长 $MN$ 交圆 $O$ 于点 $K$、$P$,过 $S$ 作圆 $O_1$ 的切线 $SQ$,过 $T$ 作圆 $O_2$ 的切线 $TQ$,由根轴定理知三条根轴交于一点 $Q$,即 $M$、$N$、$Q$ 三点共线.

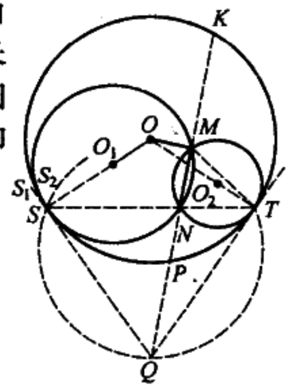


图 19.2

现在由 $S$、$N$、$T$ 三点共线,证 $OM \perp MN$.

因 $QS$、$QT$ 为切线,则

$$\angle TSQ = \angle STQ$$

又 $$OS \perp SQ, OT \perp TQ$$

则 $O$、$S$、$Q$、$T$ 四点共圆,即 $\angle TSQ = \angle TOQ$,又由 $\angle STQ = \angle TMQ$,有 $\angle TOQ = \angle TMQ$,即 $O$、$M$、$T$、$Q$ 四点共圆,因为 $OT \perp TQ$,故

$$\angle OMN = 90^\circ$$



下面的证法 3、4 由贵州李长明教授给出.这两种证法均是在已证 $OO_1NO_2$ 是平行四边形之后,再证明 $OM \perp MN$ 的.

**证法 3** 利用中位线.联结 $O_1O_2$、$ON$,设它们相交于点 $P$,如图 19.3所示,则 $P$ 是 $ON$ 的中点.设 $O_1O_2$ 交 $MN$ 于点 $H$,则 $O_1O_2$ 是 $MN$ 的中垂线,即 $H$ 是 $NM$ 的中点,从而 $PH$ 是 $\triangle NOM$ 的中位线,即

$$PH \parallel OM, OM \perp MN$$

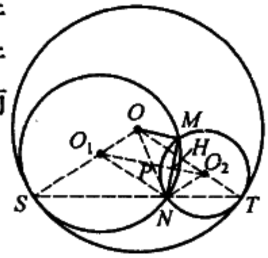


图 19.3

**证法 4** 利用斜边中点的特性.

同前设 $P$ 是 $O_1O_2$ 与 $ON$ 的交点,并联结 $PM$.

因 $P$ 是 $ON$ 的中点($\square OO_1NO_2$),且 $PN = PM$(连心线 $O_1O_2$ 是公弦 $MN$ 的中垂线).则 $P$ 到三顶 $O$、$N$、$M$ 等远,即

$$\angle OMN = 90^\circ$$

下面再给出必要性的证明.

**证法 1** (由贵州李长明教授给出)为不致受图形的误导,联结 $ST$ 时,有意绕过点 $N$,如图 19.4 所示,联结 $PM$、$ON$.因

$$OO_1 + O_1N = OO_1 + O_1S = OS = r$$
$$OO_2 + O_2N = OO_2 + O_2T = OT = r$$

则四边形 $OO_1NO_2$ 的周长被对角线 $ON$ 所平分. 又

$$OM \perp MN$$

则斜边中点 $P$ 到三顶点等远.

由 $PM = PN$ 可知, $P$ 在连心线 $O_1O_2$ 上. 于是, 依上述判定定理知 $OO_1NO_2$ 是平行四边形. 由 $O_1N \parallel OO_2$ 又知 $\angle SO_1N = \angle SOT$. 从而等腰 $\triangle O_1SN \backsim$ 等腰 $\triangle OST$(因顶角相等). 则 $\angle O_1SN = \angle OST$(即底角也相等). 即射线 $SN$ 与 $ST$ 重合, 即 $S$、$N$、$T$ 共线.

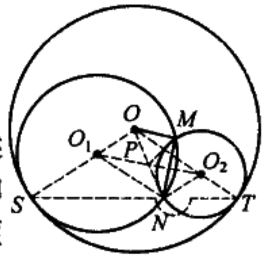



图 19.4

**证法 2**　若 $OM \perp MN$, $O_1O_2 \perp MN$, 有 $O_1O_2 \parallel OM$, 从而

$$S_{\triangle O_1MO} = S_{\triangle O_2OM}$$

设 $OM = a$, 由 $O_1M = r_1$, $O_1O = r - r_1$, $O_2O = r - r_2$, $O_2M = r_2$, 知 $\triangle O_1MO$ 与 $\triangle O_2OM$ 的周长都等于 $a + r$, 记 $p = \frac{a + r}{2}$.

由三角形面积的海伦公式, 有

$$S_{\triangle O_1MO} = \sqrt{p(p - r_1)(p - r + r_1)(p - a)} =$$

$$\sqrt{p(p - r_2)(p - r + r_2)(p - a)} = S_{\triangle O_2OM}$$

化简得

$$(r_1 - r_2)(r - r_1 - r_2) = 0$$

又已知

$$r_1 \neq r_2$$

有

$$r = r_1 + r_2$$

故

$$O_1O = r - r_1 = r_2 = O_2N$$

且

$$O_2O = r - r_2 = r_1 = O_1N$$

则 $OO_1NO_2$ 为平行四边形. 从而

$$\angle O_1NT + \angle T = 180°, \angle O_2NS + \angle S = 180°$$

又 $\triangle O_1SN$ 与 $\triangle O_2NT$ 均为等腰三角形, 有

$$\angle T = \angle O_2NT, \angle S = \angle O_1NS$$

从而

$$\angle O_1NO_2 + 2\angle S = \angle O_2NS + \angle S = \angle O_1NT + \angle T = \angle O_1NO_2 + 2\angle T$$

即

$$\angle S = \angle T$$

于是

$$\angle O_1NS = \angle O_2NT$$

故

$$\angle O_1NS + \angle O_1NO_2 + \angle O_2NT = \angle SNO_2 + \angle S = 180°$$

故 $S$、$N$、$T$ 三点共线.

**证法 3** （由江西吉安一中罗涛、邓珺给出）作辅助线如图 19.5 所示.若

$$\angle OMN = 90^\circ$$

因 $OS \perp SQ, OT \perp TQ$

则 $\angle OSQ = \angle OTQ = \angle OMQ = 90^\circ$

故 $O$、$M$、$T$、$Q$、$S$ 五点共圆.有

$$\angle OSM = \angle OTM$$

又由 $O_1S = O_1M, O_2T = O_2M$

知 $\angle OSM = \angle O_1MS, \angle OTM = \angle O_2MT$

则 $\angle O_1MS = \angle O_2MT$

故 $\angle O_1OO_2 = \angle SMT = \angle SMT + \angle O_1MS - \angle O_2MT = \angle O_1MO_2$

则 $O$、$O_1$、$O_2$、$M$ 四点共圆.

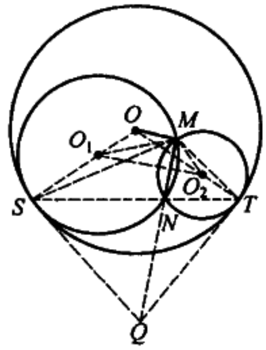



图 19.5

又因 $OM \perp MN, O_1O_2 \perp MN$,则

$$OM \parallel O_1O_2, OO_1 = MO_2$$

设圆 $O$、圆 $O_1$、圆 $O_2$ 的半径分别为 $R$、$r_1$、$r_2$,则

$$OO_1 = r_2$$

则 $R = OS = OO_1 + O_1S = r_1 + r_2$

过 $O_1$ 作 $O_1N' \parallel OT$ 交 $ST$ 于 $N'$,过 $N'$ 作 $N'O'_2 \parallel OS$ 交 $OT$ 于 $O'_2$,如图 19.6 所示.

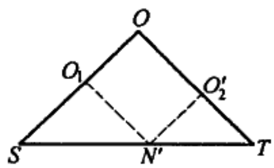



图 19.6

由于 $\triangle OST$ 为等腰三角形,故

$$N'O'_2 = OO_1 = r_2$$

于是 $OO'_2 = O_1N' = O_1S = r_1, O'_2T = OT - OO'_2 = r - r_1 = r_2$

故 $O'_2$ 与 $O_2$ 重合.

对于 $N'$,$N'$ 到 $O'_2$ 的距离为 $O'_2N' = r_2$,$N'$ 到 $O_1$ 的距离为 $O_1N' = r_1$,则 $N'$ 为圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 的交点.因此,$N'$ 与 $N$ 重合,故 $N$ 在 $S$、$T$ 所在直线上.

**证法 4** （由天津实验中学姜薇给出）作辅助线如图 19.2 所示.若

$$\angle OMN = 90^\circ$$

因 $OS \perp SQ, OT \perp TQ$

则 $\angle OSQ = \angle OTQ = \angle OMQ = 90^\circ$

即 $O$、$M$、$T$、$Q$、$S$ 五点共圆.

延长 $TN$ 交圆 $O$ 于 $S_1$，交 $OMTQS$ 所确定的圆于 $S_2$，则

$$S_1N \cdot NT = PN \cdot KN, S_2N \cdot NT = MN \cdot QN$$

因 $\angle ONM = 90°$，则 $OM \perp KP$，从而有

$$MK = MP$$

由于 $$QP \cdot QK = QS^2 = QN \cdot QM$$

则 $$QP(QM + MP) = (PQ + PN)QM$$

即 $$QP \cdot MP = PN \cdot QM$$

从而 $$(QN - PN)(MN + PN) = PN(QN + MN)$$

于是 $$QN \cdot MN = PN \cdot MN + PN \cdot MN + PN^2 = PN(MN + NP) + PN \cdot MN = PN(MK + MN) = PN \cdot KN$$

有 $$S_1N \cdot NT = S_2N \cdot NT$$

则 $$S_1N = S_2N$$

即 $S_1$、$S_2$ 重合

而 $S$ 是五点圆与圆 $O$ 的交点，故

$$S_1 = S_2 = S$$

即 $S$、$N$、$T$ 三点共线.

**证法 5**　（由安徽普委会给出）如图 19.5，设 $OM \perp MN$，由图知

$$OO_2 - OO_1 = (OT - O_2T) - (OS - O_1S) = O_1S - O_2T(\text{定值}) = MO_1 - MO_2$$

所以，$O$、$M$ 分别在以 $O_1$、$O_2$ 为焦点的双曲线的(左、右)两支上，由 $OM \perp MN$，$O_1O_2 \perp MN$，知 $OM \parallel O_1O_2$，再由双曲线的对称性，知 $O_1O_2MO$ 是等腰梯形.则

$$OO_2 = O_1M = O_1N, OO_1 = MO_2 = O_2N$$

于是 $OO_1NO_2$ 是平行四边形.则

$$\angle O_1NT + \angle T = 180°, \angle O_2NS + \angle S = 180°$$

又 $\triangle O_1SN$ 与 $\triangle O_2NT$ 均为等腰三角形，有

$$\angle T = \angle O_2NT, \angle S = \angle O_1NS$$

即 $$\angle O_1NO_2 + 2\angle S = \angle O_2NS + \angle S = \angle O_1NT + \angle T = \angle O_1NO_2 + 2\angle T$$

即 $$\angle S = \angle T$$

从而 $$\angle O_1NS = \angle O_2NT$$

故 $$\angle O_1NS + \angle O_1NO_2 + \angle O_2NT = \angle SNO_2 + \angle S = 180°$$

故 $S$、$N$、$T$ 三点共线.

**试题 B1** 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中,$AB > AC$,$\angle B = 45°$,$O$ 和 $I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心,且$\sqrt{2}OI = AB - AC$.求 $\sin A$.

**解法 1** 由已知条件及欧拉公式得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr \quad ①$$

再由熟知的几何关系得

$$r = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b) \quad ②$$

由 ① 和 ② 及正弦定理$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,得

$$1 - 2(\sin C - \sin B)^2 = 2(\sin A + \sin C - \sin B)(\sqrt{2}-1)$$

因
$$\angle B = \frac{\pi}{4}, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin C = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$$

则
$$2\sin A\cos A - (2-\sqrt{2})\sin A - \sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0$$

于是 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.对于后者,这时

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

总之,或 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A = \sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

(严格地说,还应验证这两个值都满足条件.)

**解法 2** 过点 $I$ 作 $II_C \perp AB$,$II_B \perp AC$,$II_A \perp BC$,$OD \perp BC$,其中 $I_C$、$I_B$、$I_C$、$D$ 均为垂足,$D$ 为 $BC$ 中点.则由题设得

$$\sqrt{2}OI = AB - AC = (AI_C + I_CB) - (AI_B + I_BC) = I_CB - I_BC = I_AB - I_AC$$

(由 $AB > AC$ 知 $I_AB > I_AC$,且点 $D$ 在线段 $I_AB$ 上)

又由
$$I_AB = \frac{1}{2}BC + I_AD, I_AC = \frac{1}{2}BC - I_AD$$

有$\sqrt{2}OI = 2I_AD$,即

$$OI = \sqrt{2} I_A D \qquad ①$$

由①知，$OI$ 与 $BC$ 的夹角必为 $\frac{\pi}{4}$，又因 $\angle B = \frac{\pi}{4}$，所以，或 $OI \perp AB$，或 $OI \parallel AB$.

下面来分别讨论之.

(1) 当 $OI \perp AB$ 时，点 $I_C$ 恰为 $AB$ 边的中点，这时 $AI_C = BI_C$，即

$$\frac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$$

于是
$$AC = BC$$

从而
$$\angle A = \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{\pi}{2}$$

点 $O$ 与 $I_C$ 重合，如图 19.7 所示.

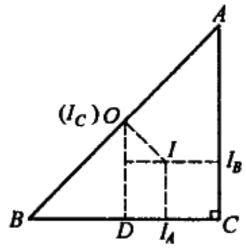


图 19.7

(2) 当 $OI \parallel AB$ 时，点 $O$ 到 $AB$ 的距离恰好等于 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r$，即

$$R\cos C = r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

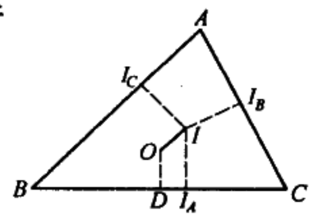


图 19.8

所以

$$\begin{aligned}\cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &= 2\sin\frac{\pi}{8}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \\ &2\sin\frac{\pi}{8}\left(-\cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A-C}{2}\right) = \\ &2\sin\frac{\pi}{8}\left[-\sin\frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - C\right)\right] = \\ &\cos\frac{\pi}{4} - 1 + 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{8} - C\right) = \\ &\cos\frac{\pi}{4} - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

两边消去 $\cos C$，得

$$\sin\left(C - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因
$$0 < \angle C - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad (\text{因为} \angle B = \frac{\pi}{4})$$

则
$$\angle C - \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

即
$$\angle C = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

又 $$\angle A=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

于是 $$\sin A=\cos\left[\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

如图 19.8 所示.

总之,或 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

下面两种解法由湖南师大张垚教授给出.

**解法 3** 如图 19.9,设 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径分别为 $R$ 和 $r$, 面积为 $\Delta$,$\angle BAC=\angle A$,$\angle ABC=\angle B$,$\angle ACB=\angle C$,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$.作 $OE\perp BC$ 于点$E$,$IF\perp BC$ 于点 $F$,$OH\perp IF$ 于点$H$.因 $O$、$I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心,所以

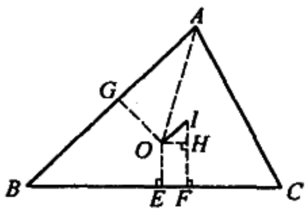



图 19.9



$$BE=\frac{1}{2}a,BF=s-b=\frac{1}{2}(c+a-b)$$

又已知 $AB>AC$,所以

$$OH=EF=BF-BE=\frac{1}{2}(c-b)=\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{\sqrt{2}}{2}OI$$

可见 $\angle IOH=45°$,而 $OH\parallel BC$,故直线 $IO$ 与 $BC$ 的夹角为 $45°$,又 $\angle B=45°$,所以 $OI\parallel AB$ 或者 $OI\perp AB$.

(1) 若 $OI\parallel AB$,则 $O$ 与 $I$ 到 $AB$ 的距离都等于 $r$,作 $OG\perp AB$ 于点 $G$,联结 $OA$,则 $\angle AOG=\angle C$,于是

$$\cos C=\cos\angle AOG=\frac{OG}{OA}=\frac{r}{R}=\frac{r(a+b+c)}{R(a+b+c)}=$$

$$\frac{2\Delta}{2R^2(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{bc\sin A}{2R^2(\sin A+\sin B+\sin C)}=$$

$$\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{4R^2\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}=$$

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)}=$$

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

而
$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=$$
$$1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)=$$
$$1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

从而
$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\cos C$$

故得
$$\cos A=1-\cos B=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

(2) 若 $OI\perp AB$，则直线 $OI$ 与 $AB$ 的交点 $G$ 是 $AB$ 的中点，如图 19.10 所示．联结 $IA$、$IB$，则 $IB=IA$，从而 $\frac{\angle A}{2}=\frac{\angle B}{2}$，所以 $\angle A=\angle B=45^\circ$，从而 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

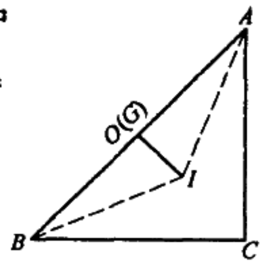


图 19.10

**解法 4**　记号与解法 3 同．由欧拉公式知
$$OI^2=R^2-2Rr$$
及已知条件
$$\sqrt{2}OI=AB-AC=2R(\sin C-\sin B)$$
得
$$2R^2(\sin C-\sin B)^2=R^2-2Rr$$
即
$$2(\sin C-\sin B)^2=1-\frac{2r}{R}$$
而用解法 3 可证 $r/R=\cos A+\cos B+\cos C-1$，所以
$$2(\sin C-\sin B)^2=1-2(\cos A+\cos B+\cos C-1)\qquad ①$$
因
$$\sin C=\sin(180^\circ-B-A)=\sin(135^\circ-A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A+\sin A)$$
$$\cos C=\cos(135^\circ-A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos A+\sin A)$$
$$\sin B=\cos B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
代入式 ① 得

$$(\cos A+\sin A-1)^2=3-2[\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos A+\sin A)]$$

去括号整理,并利用 $\cos^2A+\sin^2A=1$,得

$$(\sqrt{2}\sin A-1)[\sqrt{2}\cos A-(\sqrt{2}-1)]=0$$

从而
$$\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

或
$$\cos A=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

从而
$$\sin A=\sqrt{1-(\frac{2-\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

**试题 B2** 设 $D$ 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点,且满足条件

$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA(*)$$

试确定 $D$ 的几何位置,并证明你的结论.

**解法 1** 我们改证比其更强的命题如下.

设 $D$ 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点.求证



$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA\geqslant AB\cdot BC\cdot CA(**)$$

并且等号当且仅当 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心时才成立.

如图 19.11,作 $ED\mathrel{\underline{\parallel}}BC$,$FA\mathrel{\underline{\parallel}}ED$,联结 $EB$、$EF$,则 $BCDE$ 和 $ADEF$ 均是平行四边形,联结 $BF$ 和 $AE$,显然 $BCAF$ 也是平行四边形.于是

$$AF=ED=BC$$

$$EF=AD,EB=CD,BF=AC$$

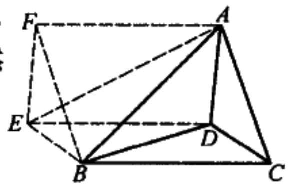


图 19.11

在四边形 $ABEF$ 和 $AEBD$ 中,由托勒密不等式得

$$AB\cdot EF+AF\cdot BE\geqslant AE\cdot BF$$

$$BD\cdot AE+AD\cdot BE\geqslant AB\cdot ED$$

即

$$AB\cdot AD+BC\cdot CD\geqslant AE\cdot AC \quad ①$$

$$BD\cdot AE+AD\cdot CD\geqslant AB\cdot BC \quad ②$$

于是,由 ① 和 ② 可得

$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=$$

$$DB(AB\cdot AD+BC\cdot CD)+DC\cdot DA\cdot CA\geqslant$$

$$DB\cdot AE\cdot AC+DC\cdot DA\cdot AC=$$

$$AC(DB\cdot AE+DC\cdot AD)\geqslant$$

$AC \cdot BC \cdot AB$

故式(＊＊)得证,且等号成立的充分必要条件是①和②的等号同时都成立,即等号当且仅当 $ABEF$ 及 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立,亦即 $AFEBD$ 恰是圆内接五边形时等号成立.

由于 $AFED$ 为平行四边形,所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$)且 $\angle ABE = \angle ADE = 90°$,亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$,所以式(＊)等式成立的充分必要条件是 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

**解法2**　如图19.12,取 $D$ 为原点,建立复平面,记 $A$、$B$、$C$ 三顶点所对应的复数分别为 $z_1$、$z_2$、$z_3$.则式(＊)等价于不等式

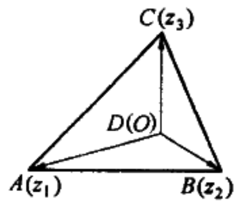


图 19.12

$$|z_1z_2(z_1-z_2)|+|z_2z_3(z_2-z_3)|+|z_3z_1(z_3-z_1)| \geqslant |(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)| \quad ①$$

即

$$\left|\frac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}\right|+\left|\frac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}\right|+\left|\frac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_2-z_1)}\right| \geqslant 1 \quad ②$$

由②,我们容易想到并验证下列的恒等式,即

$$\frac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}+\frac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_2-z_1)} = 1 \quad ③$$

记

$$\alpha_1 = \frac{z_2z_3}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{z_3z_1}{(z_3-z_2)(z_1-z_2)}$$

$$\alpha_3 = \frac{z_1z_2}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}$$

显然 $\alpha_i \neq 0(i = 1,2,3)$,由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$,两边取模得

$$1 = |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|$$

这正是式(＊)的等价形式,故式(＊)得证,并且式(＊)的等号成立的充分必要条件是"$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 的辐角相同".又因为 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$,故这等价于"$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 均为正数".

另外,容易验证下列等式,即

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} = \left(\frac{z_3}{z_1-z_2}\right)^2,\ -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} = \left(\frac{z_1}{z_2-z_3}\right)^2,\ -\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{z_2}{z_3-z_1}\right)^2 \quad ④$$

(1) 若 $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 均为正数,则由 ④ 知 $\frac{z_3}{z_1-z_2}$ 和 $\frac{z_1}{z_2-z_3}$ 均为纯虚数. 故 $CD\perp AB$,且 $AD\perp BC$,即 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

(2) 若 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则 $\frac{z_3}{z_1-z_2}$、$\frac{z_1}{z_2-z_3}$、$\frac{z_2}{z_3-z_1}$ 均为纯虚数. 由 ④ 知 $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}$、$\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$、$\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}$ 均为正数,由此可知 $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 至少有一个是正数,不妨设 $\alpha_1>0$,则 $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}>0$,$\alpha_2\alpha_3>0$,即 $\alpha_2>0$,$\alpha_3>0$,亦即 $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 均为正数.

综合(1) 和(2),即知式(*)中等号成立的充分必要条件是 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

**解法 3** (由湖南师大张垚教授给出)设 $A$、$B$、$C$、$D$ 对应的复数为 $z_1$、$z_2$、$z_3$、$z_4$. 作二次函数

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}$$



直接计算得 $f(z_1)=f(z_2)=f(z_3)=1$,故对一切复数 $z$,有 $f(z)\equiv 1$,于是

$$1=|f(z_4)|=\left|\frac{(z_4-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z_4-z_2)(z_4-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z_4-z_3)(z_4-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{(z_4-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|+\left|\frac{(z_4-z_2)(z_4-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|+\left|\frac{(z_4-z_3)(z_4-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right|=$$

$$\frac{DA\cdot DB}{CA\cdot CB}+\frac{DB\cdot DC}{AB\cdot AC}+\frac{DC\cdot DA}{BC\cdot BA} \quad ①$$

而由已知条件(*)知 ① 中等号成立,故

$$\arg\frac{(z_4-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}=\arg\frac{(z_4-z_2)(z_4-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=\arg\frac{(z_4-z_3)(z_4-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}=\theta \quad ②$$

$(\theta\in[0,2\pi))$. 因 $f(z_4)=1$,故 $\theta=0$,于是

$$\arg\frac{(z_4-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}=\arg\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}=0$$

即

$$\arg\overrightarrow{AC}-\arg\overrightarrow{AD}=\arg\overrightarrow{BD}-\arg\overrightarrow{BC}$$

也就是

$$\angle CAD=\angle DBC=\alpha$$

同理可证

$$\angle ABD=\angle DCA=\beta,\angle BCD=\angle DAB=\gamma$$

如图 19.13,延长 $AD$ 交 $BC$ 于点 $E$,则

$$\angle ABE + \angle EAB = \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

所以 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$,即 $AD \perp BC$.同理 $BD \perp CA$,$CD \perp AB$,所以 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

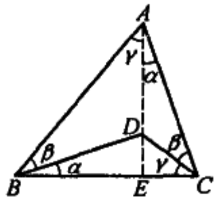


图 19.13

反之,当 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心时,将上述推理反推回去,知 ② 成立,且 $\theta = 0$,于是 ① 中等号成立,即题中条件(*)满足,故使(*)成立的 $D$ 有且只有一个,即 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

**试题 C**　如图 19.14,锐角 $\triangle ABC$ 中,$H$ 是垂心,$O$ 是外心,$I$ 是内心,已知 $\angle C > \angle B > \angle A$.求证:$I$ 在 $\triangle BOH$ 的内部.

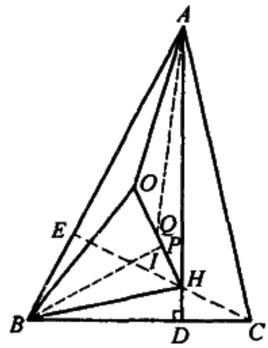


图 19.14

**证法 1**　设 $\angle B$ 的角分线交 $OH$ 于点 $P$,则 $BP$ 也是 $\angle OBH$ 的角分线.所以

$$\frac{BH}{BO} = \frac{HP}{OP} \qquad ①$$

设 $\angle A$ 的角分线交 $OH$ 于点 $Q$,则 $AQ$ 也是 $\angle OAH$ 的角分线,所以

$$\frac{AH}{AO} = \frac{HQ}{OQ} \qquad ②$$

作 $CHE \perp AB$,由 $\angle B > \angle A$,得 $AC > BC$,$AE > BE$,故

$$AH > HB \qquad ③$$

又

$$AO = BO \qquad ④$$

由 ①、②、③、④ 得

$$\frac{HQ}{OQ} > \frac{HP}{OP}$$

从而,$Q$ 在 $O$、$P$ 之间,$AQ$ 与 $BP$ 的交点 $I$ 必在 $\triangle BOH$ 内.

**证法 2**　(由湖南师大张垚教授给出)如图 19.15,延长 $AH$、$BH$ 分别交 $BC$、$AC$ 于点 $D$、$E$.作 $\angle ABC$ 的平分线交 $OH$ 于点 $F$,联结 $AO$、$BO$、$AF$.

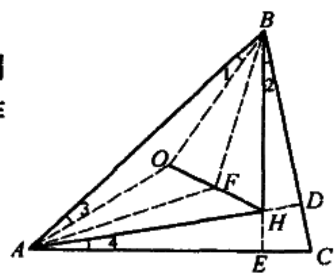


图 19.15

因 $O$、$H$ 分别是 $ABC$ 的外心和垂心.则

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90° - \angle C$$

又 $\angle 1 = \angle 2$,则 $BF$ 是 $\angle OBH$ 的平分线.即

$$\frac{OB}{BH}=\frac{OF}{FH} \quad ①$$

在 $\triangle AOF$ 与 $\triangle AFH$ 中,有

$$\frac{OF}{FH}=\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle AFH}}=\frac{AO\cdot AF\sin\angle OAF}{AH\cdot AF\sin\angle HAF} \quad ②$$

由 ① 及 ②,并注意到 $AO=BO$,则

$$\frac{AH}{BH}=\frac{\sin\angle OAF}{\sin\angle HAF}$$

因 $\triangle AHE\backsim\triangle BHD$

则 $\frac{AH}{BH}=\frac{AE}{BD}=\frac{AB\cos\angle BAC}{AB\cos\angle ABC}>1$(因为 $\angle BAC<\angle ABC<90^\circ$)

即 $\sin\angle OAF>\sin\angle HAF$

又由 $\angle OAF,\angle HAF<\angle BAC<90^\circ$

有 $\angle OAF>\angle HAF$

又因为 $\angle 3=\angle 4$



即 $\angle BAC$ 的平分线在 $\angle BAF$ 内部.故其必与线段 $BF$ 相交,而交点恰为点 $I$,故 $I$ 在 $BF$ 上,亦在 $\triangle BOH$ 内,故原命题成立.

## 第1节　根轴的性质及应用①②③

**定义**　从一点 $A$ 作一圆周的任一割线,从点 $A$ 起到和圆周相交为止的两线段之积,称为点 $A$ 对于这个圆周的幂.

由相交弦定理及切割线定理,知点 $A$ 的幂是定值.若点 $A$ 在圆内,则点 $A$ 的幂等于以该点为中点的弦的半弦长的平方;若点 $A$ 在圆外,则点 $A$ 的幂等于从该点所引圆周的切线长的平方;若点 $A$ 在圆周上,则点 $A$ 的幂等于 0.

由定义,关于圆周的幂有下列结论.

**结论 1**　点 $A$ 对于以 $O$ 为圆心的圆周的幂,等于 $OA$ 及其半径的平分差.

**结论 2**　对于两已知圆有等幂的点的轨迹,是一条垂直于连心线的直线.

事实上,设点 $A$ 到圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 的幂相等,圆 $O_1$、圆 $O_2$ 的半径分别为 $R_1$、$R_2(R_1>R_2)$,则 $AO_1^2-R_1^2=AO_2^2-R_2^2$,即

$$AO_1^2-AO_2^2=R_1^2-R_2^2=\text{常数}$$

---

① 沈文选.根轴的性质及应用[J].中等数学,2004(1):6-10.
② 李成章.巧用根轴与根心定理证明两线垂直[J].2005(9):13-14.
③ 方廷刚.圆系·根轴·幂·几何赛题[J].中学数学月刊,1999(5):45-46.

如图 19.16,设 $O_1O_2$ 的中点为 $D$,$AM \perp O_1O_2$ 于点 $M$,则

$$AO_1^2 = AD^2 + O_1D^2 + 2O_1D \cdot DM$$

$$AO_2^2 = AD^2 + DO_2^2 - 2DO_2 \cdot DM$$

易得
$$DM = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2} = 常数$$

所以,过定点 $M$ 的垂线即是两圆等幂点的轨迹.

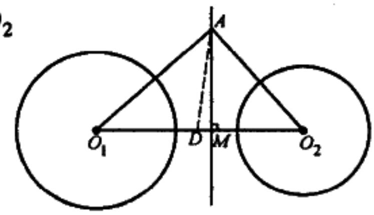


图 19.16

这条直线称为两圆的根轴或等幂轴.

特别地,若两圆同心,则 $O_1O_2 = 0$.从而,同心圆的根轴不存在;若 $R_2 = 0$,圆 $O_2$ 变成一点 $O_2$,则点 $A$ 对于圆 $O_2$ 的幂是 $AO_2^2$.此时,直线(轨迹)称为一圆与一定点的根轴.

根轴有下面的性质.

**性质 1**　若两圆相交,其根轴就是公共弦所在的直线.

**性质 2**　若两圆相切,其根轴就是过两圆切点的公切线.

**性质 3**　三个圆,其两两的根轴或相交于一点,或互相平行.

事实上,若三条根轴中有两条相交,则这一交点对于三个圆的幂均相等,所以必在第三条根轴上.这一点,称为三个圆的根心.

显然,当三个圆的圆心在一条直线上时,三条根轴互相平行.当三个圆的圆心不共线时,根心存在.

**性质 4**　若两圆相离,则两圆的四条公切线的中点在根轴上.

**例 1**　如图 19.17,从半圆上的一点 $C$ 向直径 $AB$ 引垂线,设垂足为 $D$,作圆 $O_1$ 分别切 $\overset{\frown}{BC}$、$CD$、$DB$ 于点 $E$、$F$、$G$.求证:$AC = AG$.

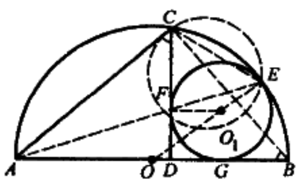


图 19.17

**证明**　设半圆的圆心为 $O$,则 $O$、$O_1$、$E$ 共线.联结 $O_1F$,知 $O_1F \perp CD$,$O_1F \mathbin{/\!/} AB$.联结 $EF$、$AE$.由 $\angle FEO_1 = \frac{1}{2}\angle FO_1O = \frac{1}{2}\angle EOB = \angle OEA$,知 $E$、$F$、$A$ 三点共线.

因为 $\angle ACB = 90°$,$CD \perp AB$,有 $\angle ACF = \angle ABC = \angle AEC$.从而,$AC$ 是 $\triangle CEF$ 外接圆的切线.故点 $A$ 对 $\triangle CEF$ 外接圆的幂 $AC^2$ 等于点 $A$ 对圆 $O_1$ 的幂 $AG^2$.因此,$AC = AG$.

**例2** 如图19.18,设$I$是$\triangle ABC$的内心,过$I$作$AI$的垂线分别交边$AB$、$AC$于点$P$、$Q$.求证:分别与$AB$、$AC$相切于$P$、$Q$的圆$L$必与$\triangle ABC$的外接圆圆$O$相切.

(1992年中国台北数学奥林匹克)

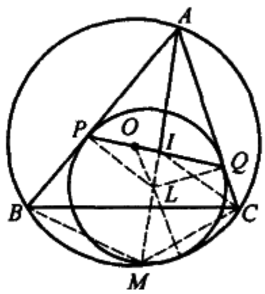


图19.18

**证明** 延长$AI$交圆$O$于点$M$,设圆$O$的半径为$R$,则点$L$对圆$O$的幂为

$$R^2 - LO^2 = LA \cdot LM$$

于是$LO^2 = R^2 - LA \cdot LM = R^2 - LA(IM - LI) =$

$$R^2 - LA \cdot IM + LA \cdot LI = R^2 - LA \cdot IM + LP^2$$

因为 $$\angle MIC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \angle BCM + \frac{1}{2}\angle C = \angle MCI$$

所以 $$IM = MC = 2R\sin\frac{A}{2} = 2R \cdot \frac{LP}{LA}$$

从而 $$LO^2 = R^2 - LA \cdot 2R \cdot \frac{LP}{LA} + LP^2 = (R - LP)^2$$

因此,圆$L$与圆$O$相切.



**例3** 凸四边形$ABCD$的两条对角线交于点$O$,$\triangle AOB$和$\triangle COD$的垂心分别为$M_1$和$M_2$,$\triangle BOC$和$\triangle AOD$的重心分别为$H_1$和$H_2$.证明:$M_1M_2 \perp H_1H_2$.

(1972年全苏数学奥林匹克竞赛试题)

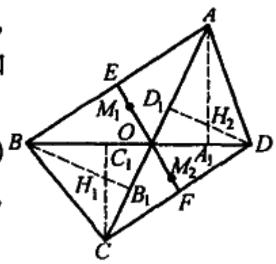


图19.19

**证明** 如图19.19,作$\triangle AOD$的两条高$AA_1$和$DD_1$,作$\triangle BOC$的两条高$BB_1$和$CC_1$.

因为$\angle AA_1B = 90° = \angle BB_1A$,所以,$A$、$B$、$B_1$、$A_1$四点共圆且圆心为$AB$的中点$E$.

同理,$C_1$、$C$、$D$、$D_1$四点共圆且圆心为$CD$的中点$F$.

因此,$EF$为圆$E$和圆$F$的连心线.

又$A$、$D_1$、$A_1$、$D$四点共圆,则有

$$H_2A \cdot H_2A_1 = H_2D_1 \cdot H_2D$$

由于$H_2A \cdot H_2A_1$和$H_2D_1 \cdot H_2D$恰分别为点$H_2$关于圆$E$和圆$F$的幂,所以,点$H_2$在圆$E$和圆$F$的根轴上.

同理,点$H_1$也在这条根轴上.

故直线$H_1H_2$就是圆$E$和圆$F$的根轴.

从而,$H_1H_2 \perp EF$.

又$M_1M_2 /\!/ EF$,所以,$M_1M_2 \perp H_1H_2$.

**例4**　在凸五边形 $ABCDE$ 中，$AB = BC$，$\angle BCD = \angle EAB = 90^\circ$，$P$ 为形内一点，使得 $AP \perp BE$，$CP \perp BD$. 证明：$BP \perp DE$

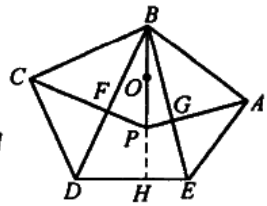



图 19.20

**证法1**　如图19.20，过点 $P$ 作 $PH \perp DE$ 于点 $H$. 因为

$$\angle PFD = \angle PGE = 90^\circ = \angle PHD = \angle PHE$$

所以，$F$、$D$、$H$、$P$ 和 $P$、$H$、$E$、$G$ 分别四点共圆，记两圆为圆 $M_1$ 和圆 $M_2$. 又

$$BF \cdot BD = BC^2 = BA^2 = BG \cdot BE$$

所以 $F$、$D$、$E$、$G$ 四点共圆，记此圆为圆 $M_3$.

易见，圆 $M_1$、圆 $M_2$、圆 $M_3$ 两两之间的公共弦恰为 $PH$、$EG$、$FD$. 由根心定理知，这三条根轴交于一点.

又已知直线 $DF$ 和 $EG$ 交于点 $B$，因此，直线 $PH$ 过点 $B$. 由 $PH \perp DE$，知 $BP \perp DE$.

**证法2**　如图19.20，记 $BP$ 的中点为 $O$.

因为 $\angle BFP = 90^\circ = \angle BGP$，所以，$B$、$F$、$P$、$G$ 四点共圆且圆心为点 $O$.

又因为 $BA = BC$，$\angle BCD = 90^\circ = \angle BAE$，故以点 $B$ 为圆心、$BC$ 为半径的圆 $B$ 过点 $A$，且直线 $DC$ 和 $EA$ 都是圆 $B$ 的切线，切点分别为 $C$ 和 $A$. 所以

$$DC^2 = DF \cdot DB$$

故点 $D$ 在圆 $O$ 与圆 $B$ 的根轴上.

同理，点 $E$ 在圆 $O$ 与圆 $B$ 的根轴上.

因此，直线 $DE$ 为圆 $O$ 与圆 $B$ 的根轴. 则 $BO \perp DE$，即 $BP \perp DE$.

**例5**　在 $\angle AOB$ 内部取一点 $C$，过点 $C$ 作 $CD \perp OA$ 于点 $D$，作 $CE \perp OB$ 于点 $E$，再过点 $D$ 作 $DN \perp OB$ 于点 $N$，过点 $E$ 作 $EM \perp OA$ 于点 $M$. 证明：$OC \perp MN$.

（1958年莫斯科数学奥林匹克竞赛试题）

**证明**　如图19.21，过点 $C$ 作 $CH \perp MN$ 于点 $H$. 因为

$$\angle CDM = \angle CEN = 90^\circ$$

所以，$C$、$D$、$M$、$H$ 和 $C$、$H$、$N$、$E$ 分别四点共圆，记两圆为圆 $O_1$ 和圆 $O_2$. 由

$$\angle DME = 90^\circ = \angle DNE$$

知 $D$、$M$、$N$、$E$ 四点共圆，记之为圆 $O_3$.

易见，直线 $CH$、$EN$、$DM$ 恰为圆 $O_1$、圆 $O_2$、圆 $O_3$ 两两之间的三条根轴. 又因前两条直线交于点 $O$，故由根心定理知直线 $CH$ 过点 $O$，即 $C$、$H$、$O$ 三点共线.

又 $CH \perp MN$,所以 $OC \perp MN$.

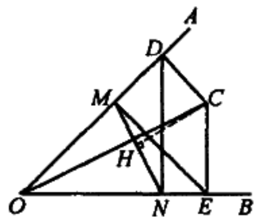


图 19.21

**例 6** 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 $O$,$\triangle BOC$ 的外心为 $T$,点 $M$ 为边 $BC$ 的中点,在边 $AB$、$AC$ 上分别取点 $D$、$E$,使得 $\angle ADM = \angle AEM = \angle BAC$.证明:$AT \perp DE$.

(第 30 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛试题)

**证明** 如图 19.22,由 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心,$T$ 是 $\triangle BOC$ 的外心知,$O$、$M$、$T$ 三点共线,且 $OT \perp BC$.

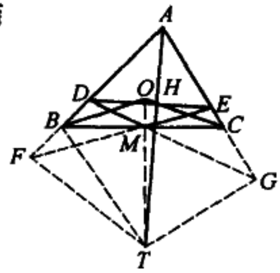


图 19.22

延长 $DM$、$AC$ 交于点 $G$,延长 $EM$、$AB$ 交于点 $F$,联结 $FT$、$BT$、$GT$.于是,有

$$\angle BTO = 2\angle BCO = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC = \angle AFE$$

故 $B$、$F$、$T$、$M$ 四点共圆.则

$$\angle BFT = 180^\circ - \angle BMT = 90^\circ$$

同理 $$\angle CGT = 90^\circ$$



过点 $T$ 作 $TH \perp DE$ 于点 $H$,于是 $D$、$F$、$T$、$H$ 和 $H$、$T$、$G$、$E$ 分别四点共圆.记这两圆为圆 $S_1$ 和圆 $S_2$.又

$$\angle FDG = 180^\circ - \angle ADG = 180^\circ - \angle AEF = \angle FEG$$

所以,$D$、$F$、$G$、$E$ 四点共圆,记之为圆 $S_3$.

由于直线 $TH$、$GE$、$DF$ 恰为圆 $S_1$、圆 $S_2$、圆 $S_3$ 两两之间的三条根轴,且 $GE$ 与 $DF$ 交于点 $A$,故由根心定理,知 $TH$ 过点 $A$.

因为 $TH \perp DE$,所以 $AT \perp DE$.

**例 7** 设 $A$、$B$、$C$、$D$ 是一条直线上依次排列的四个不同的点,分别以 $AC$,$BD$ 为直径的圆交于 $X$ 和 $Y$,直线 $XY$ 交 $BC$ 于 $Z$.若 $P$ 为直线 $XY$ 上异于 $Z$ 的一点,直线 $CP$ 与以 $AC$ 为直径的圆交于 $C$ 及 $M$,直线 $BP$ 与以 $BD$ 为直径的圆交于 $B$ 及 $N$.试证:$AM$、$DN$ 和 $XY$ 共点.

(1995 年第 36 届 IMO 试题)

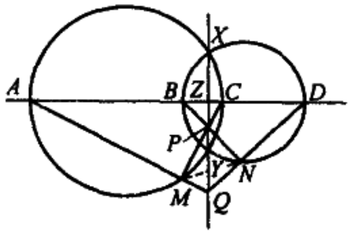


图 19.23

**证明** 如图 19.23,记直线 $AM$ 与 $DN$ 的交点为 $Q$,需要证点 $Q$ 在直线 $XY$ 上,联结 $MN$,由 $P$ 在两圆根轴 $XY$ 上知

$$PC \cdot PM = PB \cdot PN$$

由此可得 $\triangle PBC \backsim \triangle PMN$,故 $\angle PMN = \angle PBC$,再由 $AC$ 和 $BD$ 分别为两圆的直径,有 $\angle AMP = 90^\circ$ 且 $\angle PBC + \angle D = 90^\circ$,由此可得

$$\angle AMN + \angle D = \angle AMP + \angle PMN + \angle D = 180°$$

故 $A$、$M$、$N$、$D$ 四点共圆，于是

$$QA \cdot QM = QD \cdot QN$$

即点 $Q$ 对两圆的幂相等，从而 $Q$ 在两圆的根轴 $XY$ 上.

**例 8** 已知一圆圆 $O$ 切于两条平行线 $l_1$ 和 $l_2$；第二个圆圆 $O_1$ 切 $l_1$ 于 $A$，外切圆 $O$ 于 $C$；第三个圆圆 $O_2$ 切 $l_2$ 于 $B$，外切圆 $O$ 于 $D$，外切圆 $O_1$ 于 $E$，$AD$ 交 $BC$ 于 $Q$，求证：$Q$ 是 $\triangle CDE$ 的外心.

（1998 年第 35 届 IMO 预选题）

**证明** 如图 19.24，联结 $AE$、$BE$、$AO_1$、$O_1O_2$、$O_2B$，并记圆 $O$ 与 $l_1$ 的切点为 $H$，$\angle EAO_1 = \theta$，圆 $O$ 的半径为 $r$，圆 $O_1$ 的半径为 $r_1$，则两圆外公切线长 $AH = 2\sqrt{rr_1}$，再由 $O_1A \parallel O_2B$ 可得

$$\triangle O_1AE \backsim \triangle O_2BE$$

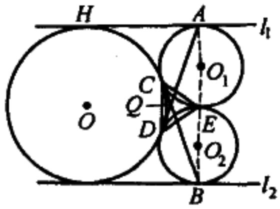


图 19.24

于是 $A$、$E$、$B$ 共线，且 $AE = 2r_1\cos\theta$，$AB = 2r\sec\theta$，于是有 $AE \cdot AB = 4rr_1 = AH^2$，即点 $A$ 对圆 $O$ 和圆 $O_2$ 的幂相等，故 $A$ 在两圆的根轴（过切点 $D$ 的公切线）上，即 $AD$ 为两圆公切线；同理可知 $BC$ 为圆 $O$ 和圆 $O_1$ 的公切线，故 $QC = QD$，即 $QO_1^2 - r_1^2 = QO_2^2 - r_2^2$，由此即知 $QE \perp O_1O_2$，即 $QE$ 为圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 的公切线，于是 $QE = QC = QD$，即 $Q$ 为 $\triangle CDE$ 的外心.

**例 9** 如图 19.25，两个大圆圆 $A$、圆 $B$ 相交且相等，两个小圆圆 $C$ 和圆 $D$ 不等亦相交，且交点为 $P$ 和 $Q$，若圆 $C$、圆 $D$ 既同时与圆 $A$ 内切，又同时与圆 $B$ 外切，求证：直线 $PQ$ 平分线段 $AB$.

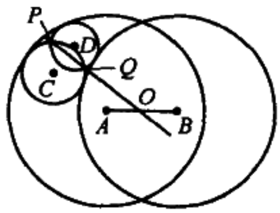


图 19.25

**证明** 记 $AB$ 中点为 $O$，为证 $O$ 在圆 $C$ 和圆 $D$ 的根轴上，只需要证自 $O$ 向圆 $C$ 和圆 $D$ 引的切线长相等，只需要证明对任一与圆 $A$ 内切而与圆 $B$ 外切的圆心而言，自 $O$ 向 $\omega$ 所引切线长为定值（仅与圆 $A$ 半径 $R$ 及 $AB = 2a$ 有关而与 $\omega$ 的位置和半径 $r$ 无关）.

联结 $AC$、$BC$、$OC$，则 $AC = R - r$，$BC = R + r$，$AB = 2a$，故由三角形中线长定理，有

$$OC^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AB^2) =$$

$$\frac{1}{2}[(R-r)^2+(R+r)^2-\frac{1}{2}(2a)^2]=$$
$$R^2+r^2-a^2$$

于是自 $O$ 向圆 $C$ 所作切线长为$\sqrt{OC^2-r^2}=\sqrt{R-a^2}$为定值(与圆 $C$ 的位置及半径无关),从而自 $O$ 向圆$C$和圆$D$引的切线长相等,从而 $O$ 在两圆根轴上,于是 $PQ$ 平分线段 $AB$.

## 第2节　与三角形垂心有关的几个命题

**命题1**　对于任意 $\triangle ABC$,三条高线 $AD$、$BE$、$CF$($D$、$E$、$F$ 分别为垂足)交于一点 $H$,则

(1) 四点 $A$、$B$、$C$、$H$ 构成一垂心组,即 $A$、$B$、$C$、$H$ 四点中,任意一点都是其余三点连线所成三角形的垂心.

(2) 涉及垂心 $H$ 的线段等积式,有



$$HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF \quad ①$$
$$HA\cdot AD=AF\cdot AB=AE\cdot AC \quad ②$$
$$HB\cdot BE=BD\cdot BC=BF\cdot BA \quad ③$$
$$HC\cdot HF=CE\cdot CA=CD\cdot CB \quad ④$$

(3) 垂心 $H$ 关于 $\triangle ABC$ 三边的对称点必落在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(4) $\triangle HAB$、$\triangle HBC$、$\triangle HCA$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆半径都相等.

**证明**　(1) 由垂心的定义可直接得出.

(2) 由 $\angle ADB=\angle AEB=90°$ 知,$A$、$B$、$D$、$E$ 四点共圆,据圆的相交弦定理可得

$$HA\cdot HD=HB\cdot HE$$

同理,由 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆可得

$$HB\cdot HE=HC\cdot HF$$

故
$$HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$$

即式①成立.

②、③、④三式可由 $A$、$F$、$H$、$E$ 共圆,$B$、$D$、$H$、$F$ 共圆,$C$、$E$、$H$、$D$ 共圆推得,或由 $\triangle ABE\backsim\triangle ACF$、$\triangle BCF\backsim\triangle BAD$、$\triangle CAD\backsim\triangle CBE$ 来推得(详细过程请读者自行给出).

(3) 不妨延长 $AD$ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 $K$,于是转化为求证 $HD=DK$ 是否成立.

联结 $BK$,由于 $\angle HBC = \angle DAC = \angle KBC$.

故 $\triangle BKH$ 为等腰三角形,由 $BD \perp HK$,即知 $HD = DK$ 成立.这表明,$H$ 关于 $BC$ 的对称点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

同理可证,$H$ 关于 $CA$、$AB$ 的对称点也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(4) 由(3)知 $BH = BK, CH = CK$.故 $\triangle BHC \cong \triangle BKC$,即 $\triangle BHC$ 的外接圆与 $\triangle BKC$ 的外接圆相等,而 $\triangle ABC$ 的外接圆与 $\triangle KBC$ 的外接圆为同圆,故 $\triangle BHC$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆相等.同理可知,$\triangle AHB$ 与 $\triangle CHA$ 的外接圆也都与 $\triangle ABC$ 的外接圆相等.

**命题 2**① 若给定锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 $H$,且 $D$、$E$、$F$ 分别为 $H$ 在 $BC$、$CA$、$AB$ 边所在直线上的射影,$H_1$、$H_2$、$H_3$ 分别为 $\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CDE$ 的垂心,则 $\triangle DEF \cong \triangle H_1H_2H_3$.

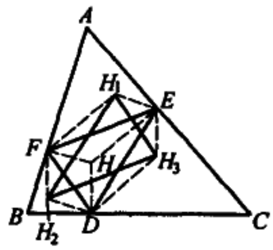



图 19.26

**证明** 如图 19.26,联结 $DH$、$DH_2$、$DH_3$、$EH$、$EH_1$、$EH_3$、$FH$、$FH_1$、$FH_2$,依题设则有

$$HD \perp BC \text{ 且 } FH_2 \perp BC \Rightarrow HD \parallel FH_2$$

$$HF \perp AB \text{ 且 } DH_2 \perp AB \Rightarrow HF \parallel DH_2$$

故 $HDH_2F$ 为平行四边形,有 $HD \mathrel{\underline{\parallel}} FH_2$.同理,$HDH_3E$ 为平行四边形,有 $HD \mathrel{\underline{\parallel}} EH_3$.则 $FH_2 \mathrel{\underline{\parallel}} EH_3$,故 $EFH_2H_3$ 为平行四边形,有 $EF = H_2H_3$.

同理,有 $FD = H_3H_1, DE = H_1H_2$,则

$$\triangle DEF \cong \triangle H_1H_2H_3$$

由上述我们还不难推证:

**推论 1** 沿用命题 2 的记号,若直线 $H_1E$、$H_2F$、$H_3D$ 可构成一个 $\triangle A_1B_1C_1$,直线 $H_1F$、$H_2D$、$H_3E$ 可构成另一个 $\triangle A_2B_2C_2$,如图 19.27 所示,则有

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$$

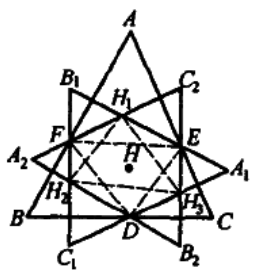



图 19.27

**注** 若命题 2 及推论中的 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,其结论仍然成立.

此命题还有如下推论:②

**推论 2** $\triangle H_1EF \cong \triangle DH_2H_3$

① 李耀文.三角形垂心的一个性质[J].中学数学,2003(2):6.
② 黄长清.三角形垂心的一个性质的三个推论[J].中学数学,2003(7):45.

$$\triangle H_2DF \cong \triangle EH_1H_3$$
$$\triangle H_3DE \cong \triangle FH_1H_2$$

**证明** 如图 19.26,由命题 2 知,$EF = H_2H_3$,联结 $FH_2$、$H_2D$、$DH$、$HF$、$H_1F$、$H_1E$、$EH$、$EH_3$、$H_3D$,由三角形垂心的定义,可知四边形 $FH_2DH$、四边形 $FH_1EH$ 均为平行四边形,则

$$H_2D = H_1E$$

同理 $$FH_1 = DH_3$$

则 $$\triangle H_1EF \cong \triangle DH_2H_3$$

同理可证 $$\triangle H_2DF \cong \triangle EH_1H_3$$
$$\triangle H_3DE \cong \triangle FH_1H_2$$

**推论 3** 设 $D$、$E$、$F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 在 $BC$、$AC$、$AB$ 边所在直线上的射影,$H_1$、$H_2$、$H_3$ 分别是 $\triangle AEF$、$\triangle FDB$、$\triangle ECD$ 的垂心,则 $S_{H_1FH_2DH_3E} = 2S_{\triangle H_1H_2H_3}$.

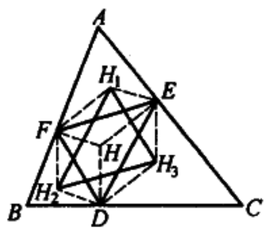



图 19.28

**证明** 如图 19.28,由推论 2 的证明知,四边形 $FH_1EH$、$EH_3DH$、$DHFH_2$ 均为平行四边形,且 $FE$、$ED$、$DF$ 分别为它们的对角线,易知

$$S_{六边形H_1FH_2DH_3E} = 2S_{\triangle H_1H_2H_3}$$

由以上的三个平行四边形,又易得

**推论 4** 图 19.28 中的 $HH_1$ 与 $EF$、$HH_2$ 与 $FD$、$HH_3$ 与 $DE$ 相互平分.

**命题 3**① 三角形的垂心在各角的内、外角平分线上的射影的连线共点,该点恰是三角形的九点圆圆心.

已知:$\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 在 $\angle A$ 及其外角平分线 $AT$、$AT'$ 上的射影分别为 $A_1$、$A_2$,过 $A_1$、$A_2$ 作直线 $l_A$,并类似作出直线 $l_B$ 和 $l_C$.求证:$l_A$、$l_B$、$l_C$ 三线共点,且该点是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心 $X$.

**证明** 如图 19.29,设 $\triangle ABC$ 的外心为 $O$,边 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点分别为 $A_0$、$B_0$、$C_0$,联结 $OA$、$OB$、$OC$,并延长 $\angle A$ 的平分线 $AT$ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 $M$.

由 $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$,知 $O$、$A_0$、$M$ 三点共线,则 $OA_0 \perp BC$.

又 $AT$、$AT'$ 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 及其外角平分线,所以 $AT \perp AT'$.

又因为 $HA_1 \perp A_1A$,$HA_2 \perp A_2A$,所以四边形 $AA_1HA_2$ 为矩形.因此,$AH$ 与

① 李耀文.三角形垂心的一个性质[J].中学数学,2006(1):43.

$A_1A_2$ 相等,并在交点 $P$ 互相平分.于是,有

$$AP = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}A_1A_2 = A_1P$$

故 $$\angle PAA_1 = \angle PA_1A$$

由 $$OA = OM$$

知 $$\angle OAM = \angle OMA$$

又 $$OA_0 \perp BC, AD \perp BC$$

知 $$OA_0 /\!/ AD$$

则 $$\angle OAM = \angle OMA = \angle PAA_1 = \angle PA_1A$$

所以 $$PA_1 /\!/ OA$$

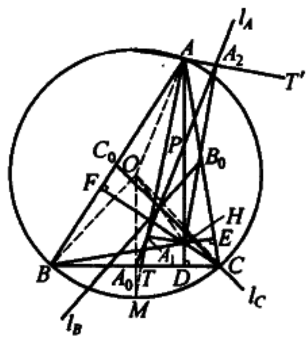


图 19.29

$$l_A /\!/ OA \quad ①$$

再联结 $OH$,在 $\triangle AOH$ 中,易知 $P$ 为$AH$ 的中点,所以 $PA_1$ 平分 $OH$,即 $A_1A_2$ 平分 $OH$.也就是说:直线 $l_A$ 必过$OH$ 的中点(记为 $X$).

同理可证,直线 $l_B$ 和 $l_C$ 也必过$OH$ 的中点$X$.

据三角形的九点圆的定义知:$OH$ 的中点$X$ 就是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心.

所以说直线 $l_A$、$l_B$、$l_C$ 三线共点,且该点恰是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心.

又因为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心分别为 $H$、$O$,且 $OA_0 \perp BC$,所以

$$OA_0 = \frac{1}{2}AH = AP$$

再联结 $A_0P$,则易知四边形 $AOA_0P$ 为平行四边形,于是,有

$$A_0P /\!/ OA \quad ②$$

由 ① 和 ② 知,$A_0$、$A_1$、$P$、$A_2$ 四点共线,从而可知 $A_0$、$A_1$、$X$、$P$、$A_2$ 五点共线(即直线 $l_A$).

由此,我们不难得到推论:

**推论 5**　三角形的各边中点,九点圆圆心,垂心与各顶点连线的中点,垂心在各边所对角的内、外角平分线上的射影,此五点共线(共三组).

同时,我们还可推证如下:

**推论 6**　三角形各边中点与其垂心到各边所对角顶点连线的中点所成三线共点,该点恰是以垂心到各顶点连线的中点为顶点的三角形的外心.

**推论 7**　三角形的垂心,九点圆圆心是以垂心到各顶点连线的中点为顶点的三角形的等角共轭点.

# 第20章　1998～1999年度试题的诠释

**试题A**　如图20.1,$O$、$I$分别为$\triangle ABC$的外心和内心,$AD$是边$BC$上的高,$I$在线段$OD$上.求证:$\triangle ABC$的外接圆半径等于$BC$边上的旁切圆半径.

**注**　$\triangle ABC$的$BC$边上的旁切圆是与边$AB$、$AC$的延长线以及边$BC$都相切的圆.

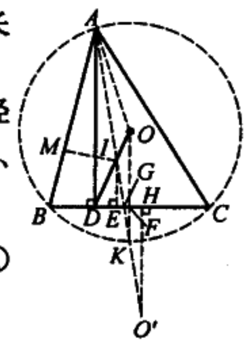



图20.1

**证法1**　设$AI$的延长线交圆$ABC$于点$K$,联结$OK$,半径$OK$记为$R$,$\triangle ABC$个内角记为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,各边记为$a$、$b$、$c$.因为$OK\perp BC$,所以$OK /\!/ AD$,从而

$$\frac{AI}{IK}=\frac{AD}{OK}=\frac{c\sin B}{R}=2\sin B\sin C \qquad ①$$

$$\frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BI\sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}BK\cdot BI\sin\frac{A+B}{2}}=$$

$$\frac{AB}{BK}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \qquad ②$$

由①、②得

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1 \qquad ③$$

设$\triangle ABC$的$BC$边上的旁切圆半径为$r_a$,则

$$\frac{1}{2}bc\sin A=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

所以

$$r_a=\frac{bc\sin A}{b+c-a}=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}=$$

$$R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\frac{B+C}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=R$$

**证法2**　如图20.1,联结$AO$,作$IE\perp BC$于点$E$,作$OF\perp BC$于点$F$.设$BC=a,AC=b,AB=c$.由$\angle OAC=\angle BAD$知$AI$平分$\angle DAO$.

注意到$AO=R$及$2S_{\triangle ABC}=r_a(b+c-a)$,其中$R$、$r_a$分别为$\triangle ABC$的外接圆半径和$BC$边上的旁切圆半径.由

$$\frac{R}{AD}=\frac{AO}{AD}=\frac{OI}{ID}=\frac{EF}{DE}=\frac{BF-BE}{BE-BD}$$

及

$$BF=\frac{a}{2},BE=\frac{1}{2}(a+c-b)$$

$$BD=c\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

知

$$\frac{R}{AD}=\frac{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}(a+c-b)}{\frac{1}{2}(a+c-b)-\frac{1}{2a}(a^2+c^2-b^2)}=\frac{a}{b+c-a}$$

从而

$$R=\frac{a\cdot AD}{b+c-a}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}=r_a$$



**证法3**　如图20.1,联结$AI$并延长交$BC$于点$G$,交圆$O$于点$K$,且与$\angle B$的外角平分线交于点$O'$,则$O'$为$BC$边上的旁切圆圆心,过$O'$作$O'H\perp BC$于$H$,则$O'H$为此旁切圆的半径,设$O'H=r_a$.此时,$OK$的长即为$\triangle ABC$的外接圆半径,即$OK=R$.

由$\mathrm{Rt}\triangle ADG\backsim\mathrm{Rt}\triangle O'HG$,有

$$\frac{AD+O'H}{O'H}=\frac{AO'}{O'G} \qquad ①$$

由外角平分线性质,有

$$\frac{AO'}{O'G}=\frac{AB}{BG} \qquad ②$$

由$\triangle ABG\backsim\triangle AKC$,有

$$\frac{AB}{BG}=\frac{AK}{KC} \qquad ③$$

由$\triangle ABC$内心性质,知

$$KC=IK \qquad ④$$

由$\triangle ADI\backsim\triangle KOI$,有

$$\frac{AI}{IK}=\frac{AD}{OK}$$

即

$$\frac{AK}{IK}=\frac{AD+OK}{OK} \qquad ⑤$$

由①~⑤各式,知

$$\frac{AD+O'H}{O'H}=\frac{AD+OK}{OK}$$

故
$$O'H=OK$$
即
$$R=r_a$$

**证法 4** 如图 20.1,联结 $AI$ 并延长交圆 $O$ 于点 $K$,则 $K$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,联结 $OK$,从而知 $OK\perp BC$.

由 $OK // AD$,有

$$OK=AD\cdot\frac{IK}{AI}$$

又由三角形内心性质,有



$$IK=KC=\frac{\frac{1}{2}a}{\cos\frac{A}{2}}$$

作 $IM\perp AB$ 于点 $M$,在 Rt$\triangle AMI$ 中,知

$$AI=\frac{\frac{1}{2}(b+c-a)}{\cos\frac{A}{2}}$$

从而
$$R=OK=AD\cdot\frac{a}{b+c-a}=\frac{ac\sin B}{b+c-a}$$

而 $BC$ 边上的旁切圆半径

$$r_a=\frac{a+b-c}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$

因此,要证
$$R=r_a\Leftrightarrow\frac{ac\sin B}{b+c-a}=\frac{a+b-c}{2}\cot\frac{B}{2}\Leftrightarrow$$
$$2ac=(b+c-a)(a+b-c)\frac{1}{2\sin^2\frac{B}{2}}\Leftrightarrow$$
$$(1-\cos B)2ac=(b+c-a)(a+b-c)\Leftrightarrow$$
$$2ac-(a^2+c^2-b^2)=(b+c-a)(a+b-c)\Leftrightarrow$$
$$(b+c-a)(b+a-c)=(b+c-a)(a+b-c)$$

**证法5** 由旁切圆半径公式,有

$$r_a=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}=\frac{a\cdot AD}{b+c-a}$$

为证 $R=r_a$,只需要证

$$\frac{R}{AD}=\frac{a}{b+c-a}$$

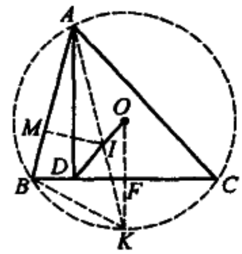


图20.2

如图20.2,延长 $AI$ 交圆 $O$ 于 $K$,联结 $OK$ 交 $BC$ 于 $F$,则 $K$、$F$ 分别为 $\overset{\frown}{BC}$ 和弦 $BC$ 的中点,且 $OK\perp BC$.故

$$OK\ /\!/\ AD$$

有

$$\frac{R}{AD}=\frac{IK}{AI}$$

由三角形内心性质,知 $BK=IK$,故只需要证明

$$\frac{BK}{AI}=\frac{a}{b+c-a}=\frac{BF}{\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

作 $IM\perp AB$,垂足为 $M$,则

$$AM=\frac{1}{2}(b+c-a)$$

于是,只需要证明

$$\frac{BK}{AI}=\frac{BF}{AM}$$

即

$$\frac{BK}{BF}=\frac{AI}{AM}$$

这可由 $\mathrm{Rt}\triangle BKF\backsim\mathrm{Rt}\triangle AIM$ 即得.而在这两个直角三角形中,有

$$\angle KBF=\angle KBC=\angle KAC=\angle KAB=\angle IAM$$

以下证法6、7由武汉二中余水能给出.

**证法6** 边和半径记法同证法2.则

$$r_a=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}=$$

$$4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \qquad ①$$

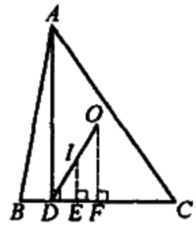


图20.3

如图20.3,过 $I$ 作 $IE\perp BC$ 于 $E$,过 $O$ 作 $OF\perp BC$ 于 $F$,则

$$\frac{IE}{OF}=\frac{DE}{DF}$$

因
$$IE = r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$OF = R\cos A$$
$$DE = \frac{a+c-b}{2} - BD = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}$$
$$DF = \frac{a}{2} - BD = \frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{(b-c)(b+c)}{2a}$$
则
$$\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos A} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$
即
$$\cos A = 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$$
从而
$$1-2\sin^2\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$$



$$2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right) = 1$$
故
$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1 \qquad ②$$

由 ①、② 可得 $r_a = R$.

**证法7** 如图20.4,联结 $AI$ 并延长交 $BC$ 于 $G$,交圆 $O$ 于 $K$,设 $O'$ 为旁切圆圆心,则 $O'$ 在 $AK$ 的延长线上,联结 $OK$. 过 $O'$ 作 $O'H \perp BC$ 于 $H$,联结 $OH$、$HK$、$BI$、$CI$、$O'B$、$O'C$,则 $OK$、$O'H$ 分别为外接圆半径及旁切圆半径.

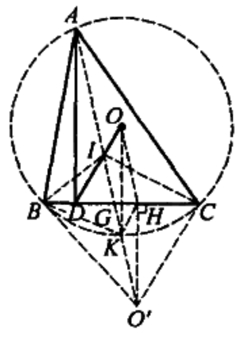


图 20.4

易知 $B$、$I$、$C$、$O'$ 共圆. 又 $BK = IK = CK$,故 $K$ 为 $BICO'$ 的外接圆圆心,即 $IK = O'K$(注意 $\angle IBO' = 90°$). 又
$$AG \cdot GK = BG \cdot GC = IG \cdot O'G$$
则
$$\frac{GK}{IG} = \frac{O'G}{AG}$$
又由 $AD \,/\!/\, O'H$,知
$$\frac{GK}{IG} = \frac{O'G}{AG} = \frac{HG}{DG}$$
则
$$HK \,/\!/\, ID, \angle GHK = \angle IDG$$

而 $D$、$I$、$O$ 共线，$OK\perp BC$，$O'H\perp BC$，从而

$$OK /\!/ O'H$$

故
$$\angle IOK=\angle KHO'$$

$$\angle OKI=\angle HO'K,IK=O'K$$

则
$$\triangle OIK\cong\triangle HKO'$$

故 $OK=O'H$(即结论成立).

以下证法8、9由首都师大周春荔教授给出.

**证法8**　如图20.4，作 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 $O$，延长 $AI$ 交 $BC$ 于 $G$，交 $\overset{\frown}{BC}$ 于 $K$，则 $K$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点，显然 $OK\perp BC$.

设 $O'$ 是与 $BC$ 边相切的 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心，则 $O'$ 在 $AI$ 延长线上，即 $A$、$I$、$G$、$K$、$O'$ 共线.

作 $O'H\perp BC$ 于 $H$，则 $O'H$ 是旁切圆圆 $O'$ 的半径(记为 $r_a$).

又因 $AD$、$OK$、$O'H$ 都垂直于 $BC$. 则 $AD /\!/ OK /\!/ O'H$，因此 $\triangle AID\backsim\triangle KIO$，得 $\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}$，即

$$\frac{AD}{R}=\frac{AI}{IK} \qquad ①$$

又由 $\triangle ADG\backsim\triangle O'HG$，得 $\dfrac{AD}{O'H}=\dfrac{AG}{GO'}$，即

$$\frac{AD}{r_a}=\frac{AG}{GO'} \qquad ②$$

于是，要证 $R=r_a$，只需要证 $\dfrac{AI}{IK}=\dfrac{AG}{GO'}$ 即可.

联结 $BI$、$IC$、$CO'$、$O'B$，易知

$$\angle IBO'=\angle ICO'=90^\circ$$

则 $B$、$I$、$C$、$O'$ 四点共圆. 因此

$$\angle AO'C=\angle IBC=\frac{\angle B}{2}=\angle ABI$$

又 $\angle BAI=\angle O'AC$，则 $\triangle ABI\backsim\triangle AO'C$，从而 $\dfrac{AB}{AI}=\dfrac{AO'}{AC}$，即

$$AI\cdot AO'=AB\cdot AC \qquad ③$$

联结 $BK$，在 $\triangle ABK$ 与 $\triangle AGC$ 中，因

$$\angle BAK=\angle GAC,\angle BKA=\angle GCA$$

则 $$\triangle ABK \backsim \triangle AGC$$

有 $$\frac{AB}{AK}=\frac{AG}{AC}$$

即

$$AK\cdot AG=AB\cdot AC \quad ④$$

由③、④可得

$$AI\cdot AO'=AK\cdot AG$$

即 $$\frac{AK}{AI}=\frac{AO'}{AG}$$

由 $$\frac{AI+IK}{AI}=\frac{AG+GO'}{AG}$$

有

$$\frac{IK}{AI}=\frac{GO'}{AG} \quad ⑤$$

将式⑤结合①、②可得



$$\frac{R}{AD}=\frac{r_a}{AD}$$

故 $$R=r_a$$

**证法9** 如图20.5,作 $IE\perp CD$ 于 $E$,作 $OF\perp CD$ 于 $F$,则 $E$ 为 $\triangle ABC$ 内切圆与 $BC$ 边的切点,$F$ 为 $BC$ 中点. $AO$ 与圆交于 $T$.

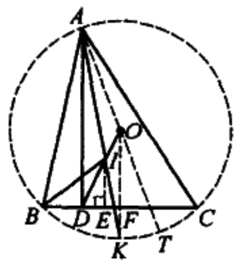


图20.5

设 $BC=a,AC=b,AB=c$,及 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则有

$$BE=\frac{a+c-b}{2},BF=\frac{a}{2}$$

$$BD=c\cos B,\frac{DE}{EF}=\frac{a+c-b-2c\cos B}{b-c}$$

由 $\angle B=\angle ATC$,得 $\angle BAD=\angle TAC$,则 $\angle DAI=\angle OAI$.

在 $\triangle ADO$ 中,$AI$ 平分 $\angle DAO$,则

$$\frac{AD}{AO}=\frac{DI}{IO}=\frac{DE}{EF}$$

设 $\triangle ABC$ 面积为 $S$,则 $AD=\frac{2S}{a}$,代入得

$$\frac{\frac{2S}{a}}{R}=\frac{a+c-b-2c\cos B}{b-c} \quad ①$$

因
$$a^2-2ac\cos B=a^2-(a^2+c^2-b^2)=(b-c)(b+c)=(b-c)(2p-a)$$

则
$$\frac{2p-a}{a}=\frac{a-2c\cos B}{b-c}$$

故由 ① 可有

$$\frac{2p-2a}{a}=\frac{a+c-b-2c\cos B}{b-c}=\frac{2S}{aR}$$

即

$$(p-a)R=S=rp \quad ②$$

如图 20.6,又可证 $\triangle AIT_1 \backsim \triangle AO'T_2$,则

$$\frac{r}{r_a}=\frac{AT_1}{AT_2}$$

但
$$AT_1=p-a, AT_2=p$$

即
$$\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}$$

亦即

$$(p-a)r_a=rp \quad ③$$

比较 ②、③ 即可得

$$R=r_a$$

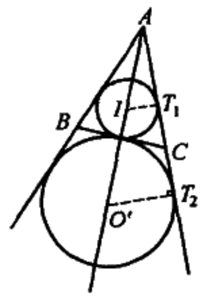


图 20.6



**证法 10** （由天津实验中学姜薇给出）如图 20.7,设 $I_A$ 为旁切圆圆心.则 $A$、$I$、$I_A$ 共线,交圆 $O$ 于 $K$,交 $BC$ 于 $P$.显然,$K$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点.于是,$OK \perp BC$,$OK=R$.因

$$\angle IBI_A=90^\circ, \angle IBK=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\angle BIK$$

则 $BK=IK$,即 $BK$ 为 $\triangle BII_A$ 斜边中线,又 $BK=KC$,则

$$BK=IK=KI_A=KC$$

设旁切圆半径为 $R_A$,有

$$I_AM=R_A$$

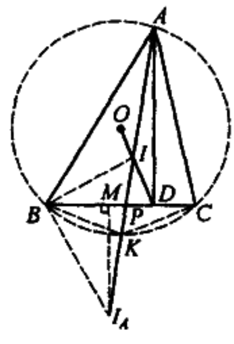


图 20.7

由 $$AD \perp BC, I_AM \perp BC$$

有 $$\frac{R_A}{AD}=\frac{I_AP}{AP},\frac{R}{AD}=\frac{IK}{IA}$$

因此,要证 $R_A = R$,只需要证

$$\frac{I_AP}{AP}=\frac{IK}{IA}$$

因 $$I_AP = 2IK - IP, AP = IA + IP$$

只需要证 $$\frac{2IK-IP}{IA+IP}=\frac{IK}{IA}$$

即 $$IK \cdot IA - IA \cdot IP = IP \cdot IK$$

或 $$IK \cdot IA = IP(IA + IK) = IP \cdot AK$$

亦或

$$\frac{IA}{IP}=\frac{AK}{IK} \qquad ①$$

又 $BI$ 为角平分线,则$\frac{IA}{IP}=\frac{AB}{BP}$,由 $IK = KC$,有$\frac{AK}{IK}=\frac{AK}{KC}$,故



$$① \Leftrightarrow \frac{AB}{BP}=\frac{AK}{KC} \qquad ②$$

因 $AI$ 为角平分线,则 $\angle BAP = \angle KAC$,又 $\angle ABP = \angle AKC$,则 $\triangle ABP \backsim \triangle AKC$.

故式 ② 成立.

**证法 11** (由天津实验中学乔琦给出)如图 20.8,联结 $IB$、$IC$,作 $I_AB \perp IB$,$I_AC \perp IC$ 交于 $I_A$,则 $I_A$ 即为 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边上旁切圆圆心.显然,$A$、$I$、$I_A$ 三点共线.联结 $AI$、$II_A$,并设 $II_A$ 交 $BC$ 于 $N$,交 $\triangle ABC$ 外接圆于 $M$,联结 $OM$、$BM$,过 $I_A$ 作 $I_AK \perp BC$ 于 $K$.则 $OM$ 的长即为 $\triangle ABC$ 外接圆半径,$I_AK$ 的长即为 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上旁切圆的半径.所以,只需要证明 $OM = I_AK$.

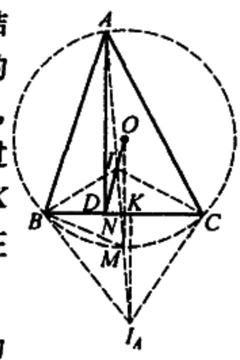


图 20.8

因 $I$ 为内心,则 $M$ 平分$\overset{\frown}{BC}$.又 $AD$ 是 $BC$ 边上的高,$M$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点,则

$$AD \perp BC, OM \perp BC$$

于是 $$AD \parallel OM \parallel I_AK$$

$$\frac{KI_A}{AD}=\frac{NI_A}{AN},\frac{OM}{AD}=\frac{IM}{AI}$$

故只需要证明

$$\frac{NI_A}{AN}=\frac{IM}{AI} \quad ①$$

因 $I$ 为 $\triangle ABC$ 内心,则

$$\angle BAI=\angle CAI,\angle ABI=\angle CBI,\angle BCI=\angle ACI$$

因此

$$\angle BIM=\angle BAI+\angle ABI=\angle MAC+\angle CBI=\angle CBM+\angle CBI=\angle IBM$$

从而

$$BM=IM$$

又由 $IB\perp I_AB$,知 $M$ 为 $\triangle BII_A$ 斜边 $II_A$ 的中点,即

$$IM=BM=MI_A$$

于是

$$NI_A=NM+MI_A=NM+IM$$

又

$$AN=AM-MN,AI=AM-IM$$

从而要证 ① 成立,只需要证明

$$\frac{NM+IM}{AM-MN}=\frac{IM}{AM-IM}$$

即

$$(NM+IM)(AM-IM)=IM(AM-MN)$$

$$NM\cdot AM-NM\cdot IM+AM\cdot IM-IM^2=IM\cdot AM-IM\cdot MN$$

$$IM^2=NM\cdot AM$$

即

$$BM^2=NM\cdot AM \quad ②$$

又

$$\angle MBN=\angle MAC=\angle MAB,\angle BMN=\angle AMB$$

则

$$\triangle MBN\backsim\triangle MAB$$

于是

$$\frac{MB}{MN}=\frac{MA}{MB}$$

即

$$MB^2=NM\cdot AM$$

故式 ② 成立,从而式 ① 成立,所以 $OM=KI_A$,即 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与 $BC$ 边上的旁切圆半径相等.

**证法12**　(由上海控江中学薛明喆给出)如图20.9,设 $\triangle ABC$ 中边 $BC$ 上的旁切圆圆心为 $I'$.

有 $A$、$I$、$I'$ 三点共线,作 $I'F\perp BC$ 于 $F$,设直线 $AI'$ 与圆 $O$ 交于 $K$,与 $BC$ 交

于 $E$,联结 $OK$、$CK$、$BI$、$CI$、$BI'$、$CI'$,有

$$\angle KIC=\angle IAC+\angle ICA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=$$

$$\angle BCK+\angle ICB=\angle ICK$$

则 $$IK=CK$$

因 $$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle CBI'=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)$$

则 $$\angle IBI'=90^\circ$$

同理 $$\angle ICI'=90^\circ$$

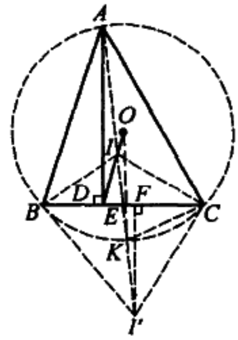


图 20.9

则 $I$、$B$、$I'$、$C$ 四点共圆,即

$$IE\cdot I'E=BE\cdot CE$$

所以 $$EI'=\frac{BE\cdot CE}{IE}$$

又 $$AD\perp BC,OK\perp BC,I'F\perp BC$$

则 $$\frac{AD}{I'F}=\frac{AE}{EI'},\frac{AD}{OK}=\frac{AI}{IK}$$

即 $$\frac{I'F}{OK}=\frac{AI\cdot EI'}{IK\cdot AE}=\frac{AI\cdot BE\cdot CE}{IK\cdot AE\cdot IE}$$

因 $IB$ 平分 $\angle ABC$,所以

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AI}{IE}$$

则 $$\frac{I'F}{OK}=\frac{BE\cdot CE}{IK\cdot AE}\cdot\frac{AB}{BE}=\frac{CE\cdot AB}{IK\cdot AE}$$

又 $$\triangle ABE\backsim\triangle CKE$$

有 $$\frac{AB}{AE}=\frac{CK}{CE}$$

故 $$\frac{AB}{AE}=\frac{IK}{CE}$$

则 $$AB\cdot CE=IK\cdot AE$$

所以 $$\frac{I'F}{OK}=1$$

即 $$I'F=OK$$

又 $OK$ 为圆 $O$ 半径,$I'F$ 为旁切圆半径,则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 $BC$ 边上的旁切圆的半径.证毕.

**证法13**　（由天津耀华中学罗杨给出）如图20.10，设$BC$边的旁切圆半径为$R_A$，圆心$I_A$．$K$为$AI$与外接圆交点，显然，$A$、$I$、$K$、$I_A$共线，且$K$为点$B$、$I$、$C$、$I_A$外接圆圆心．因

$$R = OK$$

则
$$\frac{R}{AH} = \frac{KI}{IA}, \frac{R_A}{AH} = \frac{I_AP}{PA}$$

即要证
$$R = R_A \Leftrightarrow \frac{KI}{IA} = \frac{I_AP}{PA}$$

又　$I_AP = I_AK + KP = IK + KP, PA = PI + IA$

故　$\frac{KI}{IA} = \frac{IK + KP}{PI + IA} \Leftrightarrow KI \cdot PI = IA \cdot KP \Leftrightarrow \frac{PI}{PK} = \frac{AI}{IK}$

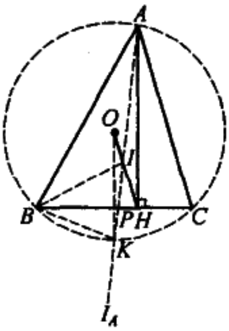


图20.10

又
$$\frac{PI}{PK} = \frac{BI\sin\frac{B}{2}}{BK\sin\frac{A}{2}}, \frac{AI}{IK} = \frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}} = \frac{AB\sin\frac{B}{2}}{BK\sin\frac{A+B}{2}}$$

故有
$$\frac{BI}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AB}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

这在$\triangle ABI$中应用正弦定理即可．

**证法14**　如图20.1，联结$AI$、$AO$、$CI$、$CO$，则

$$\alpha = \angle IAD = \frac{1}{2}\angle A - \beta = \frac{1}{2}\angle A - (\frac{\pi}{2} - \angle B) = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$$

$$\angle IAO = \frac{1}{2}\angle A - \angle OAC = \frac{1}{2}\angle A - (\frac{\pi}{2} - \angle B) = \alpha$$

（延长$AO$交圆$O$于$T$，则$\angle ATC = \angle B, \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \angle B$）

$$\angle DCI = \frac{1}{2}\angle C, \angle OCI = \frac{1}{2}\angle C - (\frac{\pi}{2} - \angle B) = \frac{1}{2}\angle C + \angle B - \frac{\pi}{2}$$

由直角三角形相似，可推得

$$\frac{DI}{OI} = \frac{AD\sin\frac{B-C}{2}}{AO\sin\frac{B-C}{2}}$$

及
$$\frac{DI}{OI} = \frac{CD\sin\frac{C}{2}}{OC\sin(\frac{C}{2} + B - \frac{\pi}{2})}$$

而
$$OC = OA$$

则
$$\frac{\sin \frac{C}{2}}{-\cos \left(\frac{C}{2} + B\right)} = \frac{AD}{CD} = \frac{\sin C}{\cos C}$$

即
$$-2\cos \frac{C}{2}\cos \left(\frac{C}{2} + B\right) = \cos C$$

故
$$\cos A = \cos B + \cos C$$

从而
$$(1 + \cos B)(1 + \cos C) - \sin B\sin C = 1$$

于是
$$4\sin \frac{A}{2}\cos \frac{B}{2}\cos \frac{C}{2} = 1$$

即
$$\frac{\cos \frac{B}{2}\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{2\sin A}$$

设 $O'$ 为 $BC$ 边上的旁切圆圆心，联结 $BO'$、$CO'$，作 $O'H \perp BC$ 于 $H$，则 $O'H = r_a$. 由正弦定理，有



$$\frac{BC}{\sin \angle BO'C} = \frac{BO'}{\sin \angle BCO'}$$

即
$$BO' = BC \cdot \frac{\sin \frac{\pi - C}{2}}{\sin \left(\pi - \frac{\pi - B}{2} - \frac{\pi - C}{2}\right)} = BC \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

则
$$O'H = BO'\sin \angle CBO' = BC \cdot \frac{\cos \frac{B}{2}\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = BC \cdot \frac{1}{2\sin A} = R$$

**证法 15** 如图 20.1，设 $R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，令 $AB = c$，$AC = b$，则由

$$\frac{R}{c\sin B} = \frac{AO}{AD} = \frac{OI}{ID} = \frac{S_{\triangle OIC}}{S_{\triangle IDC}} = \frac{\frac{1}{2}OC \cdot CI\sin \left(\frac{C}{2} + B - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}CD \cdot CI\sin \frac{C}{2}} =$$

$$\frac{-R\cos \left(B + \frac{C}{2}\right)}{b\cos C\sin \frac{C}{2}}$$

有
$$\frac{R}{2R\sin B\sin C}=\frac{-R\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)}{2R\sin B\cos C\sin\frac{C}{2}}$$

即
$$-\cos C=2\cos\frac{C}{2}\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)=\cos(B+C)+\cos B$$

亦即
$$\cos A=\cos B+\cos C\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1$$

设 $O'$ 为 $BC$ 边上的旁切圆圆心，$r_a$ 为其半径，$AO'$ 交 $BC$ 于 $G$，令 $\angle IAD=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，则 $\angle CAO=\frac{\pi}{2}-\angle B=\angle BAD=\beta$，从而 $\angle IAO=\alpha$. 此时
$$AC=2R\cos\beta$$
$$AD=AC\cos(2\alpha+\beta)=2R\cos\beta\cos(2\alpha+\beta)$$
$$AB=\frac{AD}{\cos\beta}=2R\cos(2\alpha+\beta)$$
$$AO'=r_a/\sin(\alpha+\beta)$$

在 $\triangle ABC$ 中，由张角公式，有
$$\frac{\sin 2(\alpha+\beta)}{AG}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AC}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AB}$$

即
$$\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{AG}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$$

从而
$$AG=\frac{2\cos(\alpha+\beta)2R\cos(2\alpha+\beta)2R\cos\beta}{2R\cos(2\alpha+\beta)+2R\cos\beta}=\frac{2R\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta}{\cos\alpha}$$

又 $\mathrm{Rt}\triangle O'HG\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADG$，有
$$\frac{O'H}{AD}=\frac{GO'}{AG}=\frac{AO'-AG}{AG}$$

即
$$\frac{r_a}{2R\cos\beta\cos(2\alpha+\beta)}=\frac{\frac{r_a}{\sin(\alpha+\beta)}}{\frac{2R\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta}{\cos\alpha}}-1$$

亦即
$$r_a\sin(\alpha+\beta)=r_a\cos\alpha-2R\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$$

由于
$$\beta=90^\circ-\angle B,\alpha=\frac{1}{2}\angle A+\angle B-90^\circ$$
$$2\alpha+\beta=\angle A+\angle B-90^\circ$$

则
$$r_a[\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha]=-2R\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$$

即
$$r_a\left[\sin\frac{A}{2}-\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)\right]=-2R\sin(A+B)\sin\frac{A}{2}\sin B$$

从而 $$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

故 $$r_a = R$$

**证法 16** (由湖南茶陵一中贺功保给出)如图 20.11,设 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的旁切圆半径为 $r_a$,则

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

所以

$$r_a = \frac{bc\sin A}{(b+c-a)} = 2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A} =$$

$$2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

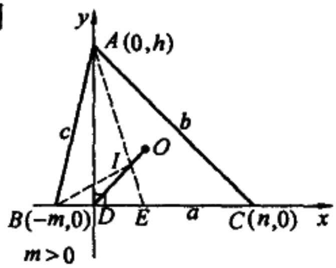



图 20.11

因此,要证 $r_a = R$,只需要证

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos A = \cos B+\cos C$$



这个关系式揭示了该题的本质,因此,本题实质上是一道三角试题.

下面用解析法证明.

如图 20.11 建立直角坐标系及设定点的坐标.联结 $AI$ 并延长交 $BC$ 于点 $E$,联结 $BI$.设点 $I$ 的坐标为 $(x,y)$.因

$$\frac{BE}{EC} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

由定比分点坐标公式有

$$x_E = \frac{-m+\frac{c}{b}n}{1+\frac{c}{b}} = \frac{-bm+cn}{b+c},y_E = 0$$

由 $$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{c}{b}$$

有 $$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{c}{b+c}$$

即 $$|BE| = \frac{ac}{b+c}$$

而 $$\frac{EI}{EA} = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{ac}{(b+c)c} = \frac{a}{b+c}$$

则 $\triangle ABC$ 的内心 $I$ 的坐标为

$$x=\frac{cn-bm}{a+b+c},y=\frac{ah}{a+b+c}$$

即
$$I(\frac{cn-bm}{a+b+c},\frac{ah}{a+b+c})$$

又由 $|OA|=|OB|=|OC|$ 可得 $\triangle ABC$ 的外心 $O$ 的坐标为 $(\frac{n-m}{2},\frac{h^2-mn}{2h})$，则直线 $ID$ 的斜率为

$$k_{DI}=\frac{ah}{ch-bm}=\frac{ab\sin C}{bc(\cos C-\cos B)}=\frac{\sin A}{\cos C-\cos B}$$

直线 $OD$ 的斜率为

$$k_{OD}=\frac{h^2-mn}{h(n-m)}=\frac{(c\sin B)^2-(c\cos B)(b\cos C)}{c\sin B(b\cos C-c\cos B)}=$$
$$\frac{c\sin^2 B-b\cos B\cos C}{\sin B(b\cos C-c\cos B)}=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\sin(B-C)}=$$
$$-\frac{\cos(B+C)}{\sin(B-C)}=\frac{\cos A}{\sin(B-C)}$$

因为点 $I$ 在线段 $OD$ 上，所以

$$k_{DI}=k_{DO}$$

即
$$\frac{\sin A}{\cos C-\cos B}=\frac{\cos A}{\sin(B-C)}$$

所以
$$\sin A\cos\frac{B-C}{2}=\cos A\cos\frac{A}{2}$$

即
$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos A$$

故
$$\cos A=\cos B+\cos C$$

**证法 17** （由天津耀华中学李龙给出）如图 20.12，记 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的旁切圆圆心为 $O'$.

以 $D$ 为原点，$BC$ 所在直线为 $x$ 轴建立平面直角坐标系．设点 $A$ 坐标为 $(0,a)$，点 $B$ 坐标为 $(-b,0)$，点 $C$ 坐标为 $(c,0)(a,b,c>0)$，则 $AB$ 中点坐标为 $(-\frac{b}{2},\frac{a}{2})$．又 $k_{AB}=-\frac{a}{b}$．所以，$AB$ 中垂线方程为

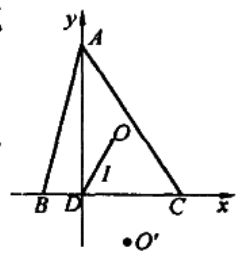


图 20.12

$$y-\frac{a}{2}=-\frac{b}{a}(x+\frac{b}{2})$$

又 $BC$ 中垂线方程为 $$x=\frac{-b+c}{2}$$

所以,解得点 $O$ 坐标为$\left(\frac{-b+c}{2},\frac{a^2-bc}{2a}\right)$.

又 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$,$|AC|=\sqrt{c^2+a^2}$,$|BC|=c+b$.

由三角形内心坐标公式,可得点 $I$ 坐标为(记 $T=c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}$)

$$\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{c^2+a^2}}{T},\frac{a(c+b)}{T}\right)$$

则 $$k_{DI}=\frac{a(c+b)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{c^2+a^2}}$$

又 $$k_{DO}=\frac{a^2-bc}{a(c-b)}$$

由 $D$、$I$、$O$ 共线得



$$k_{DI}=k_{DO}$$

即

$$a^2(c^2-b^2)=(a^2-bc)(c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{c^2+a^2}) \qquad ①$$

下面来求点 $O'$ 坐标,因 $BO'\perp BI$,$CO'\perp CI$,又

$$k_{BI}=\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

则 $$k_{BO'}=-\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$BO'$ 方程为

$$y=-\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}(x+b) \qquad ②$$

又 $$k_{CI}=-\frac{a}{c+\sqrt{a^2+c^2}}$$

所以 $$k_{CO'}=\frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

$CO'$ 方程为

$$y=\frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}(x-c) \qquad ③$$

②、③ 两式联立解得 $O'$ 坐标为

$$\left(\frac{c^2-b^2+c\sqrt{a^2+c^2}-b\sqrt{a^2+b^2}}{c+b+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{(b+c)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}\right)$$

所以,旁切圆半径就是点 $O'$ 纵坐标的相反数,即

$$r_A=\frac{(c+b)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}$$

而外接圆半径

$$R=|OA|=\sqrt{\left(\frac{c-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2-bc}{2a}-a\right)^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$$

只需要证

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}=\frac{(c+b)(c+\sqrt{a^2+c^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{a(c+b+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}\qquad ④$$

而式 ④ 等价于

$$(a^2-bc)(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})=$$
$$(c+b)(c\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}+2bc)$$



由式 ① 有

$$a^2-bc=\frac{a^2(c^2-b^2)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{a^2+c^2}}$$

所以,式 ④ 又等价于

$$\frac{a^2(c^2-b^2)}{c\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{a^2+c^2}}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})=$$
$$(c+b)(c\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2}+2bc)$$

即

$$a^2(c-b)(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})=$$
$$(c^2-b^2)a^2-b(a^2-c^2)\sqrt{a^2+b^2}+c(a^2-b^2)\sqrt{a^2+c^2}$$

或

$$c(a^2-bc)\sqrt{a^2+b^2}+b(a^2-bc)\sqrt{a^2+c^2}=(c^2-b^2)a^2$$

这由式 ① 立得.

**注**　(1) 三角形内心坐标公式:$\triangle ABC$ 三边为 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. 在平面直角坐标系下 $A$、$B$、$C$ 坐标分别为 $(x_A,y_A)$, $(x_B,y_B)$, $(x_C,y_C)$, 则它的内心坐标为 $\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

(2) 周春荔教授指出[①]:本试题结论可以推广,因此问题可一般叙述为:

① 周春荔.'98 年全国高中数学联赛加试第一题几何证法探究[J].中等数学,1999(1):12-14.

**命题1** $O$、$I$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，$AD$ 是 $BC$ 边上的高，$I$ 在线段 $OD$ 上. 如果 $AB\neq AC$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 $BC$ 边上旁切圆的半径.

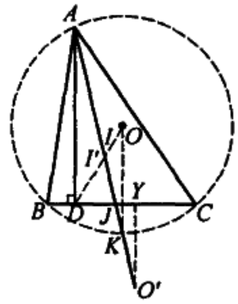



图 20.13

其逆命题：$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，$O$ 是外心，$I$ 是内心，$AD$ 是 $BC$ 边上的高. 如果 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 $BC$ 边上旁切圆半径，则 $I$ 在线段 $OD$ 上.

其证明思路如下(图 20.13).

因 $AB\neq AC$，所以外心 $O$ 不在高 $AD$ 上.

联结 $OD$ 交 $AO'$ 于 $I'$，则由

$$\triangle ADI'\backsim\triangle KOI',\triangle ADJ\backsim\triangle O'YJ$$

得
$$\frac{AI'}{I'K}=\frac{AD}{R}=\frac{AD}{r_a}=\frac{AJ}{JO'}$$

则
$$\frac{AI'}{AI'+I'K}=\frac{AJ}{AJ+JO'}$$



即

$$\frac{AI'}{AK}=\frac{AJ}{AO'} \quad ①$$

若 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 $A$、$I$、$J$、$K$、$O'$ 共线，根据 $\triangle ABC$ 的一般性质，有

$$\frac{AI}{AK}=\frac{AJ}{AO'} \quad ②$$

对照①与②得 $AI'=AI$

所以 $I$ 与 $I'$ 重合，即 $D$、$I$、$O$ 共线.

(3) 本题揭示了三角形的外心与内心的一个性质. 即若三角形的外心 $O$、内心 $I$ 与垂足 $D$ 三点共线，则 $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos A=\cos B+\cos C$. 试问对三角形中其他的"心"是否也有类似的性质呢?湖南茶陵一中的贺功保经过探讨获得如下结论①.

设 $H$、$G$ 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心与重心，$I_2$、$I_2$、$I_3$ 分别为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的圆心，则 $G$ 的坐标为 $(\frac{n-m}{3},\frac{h}{3})$（$m$、$n$、$h$ 同证法 16，如图 20.11 所示），仿证法 16 可求得

① 贺功保. 1998 年全国高中数学联赛加试第一题探究[J]. 湖南数学通讯，1998(6):13-14.

$$I_1\left(\frac{cn-bm}{-a+b+c},-\frac{ah}{-a+b+c}\right)$$

$$I_2\left(\frac{bm+cn}{a+b+c},\frac{ah}{a-b+c}\right)$$

$$I_3\left(\frac{-bm-cn}{a+b-c},\frac{ah}{a+b-c}\right)$$

从而
$$k_{DG}=\frac{h}{n-m}=\frac{\sin B\sin C}{\sin(B-C)}$$

$$k_{DI_1}=-\frac{ah}{cn-bm}=\frac{\sin A}{\cos B-\cos C}$$

$$k_{DI_2}=\frac{ah}{bm+cn}=\frac{\sin A}{\cos B+\cos C}$$

$$k_{DI_3}=-\frac{ah}{bm+cn}=-\frac{\sin A}{\cos B+\cos C}$$

因此,(i) 若 $D$、$O$、$G$ 三点共线,则

$$\cos A=\sin B\sin C$$

(ii) 若 $D$、$I$、$G$ 三点共线,则

$$\cos A\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin B\sin C$$

(iii) 若 $D$、$O$、$I_2$ 三点共线,则

$$\cos C=\cos A+\cos B$$

(iv) 若 $D$、$O$、$I_3$ 三点共线,则

$$\cos B=\cos A+\cos C$$

以上结论均可仿照证法16,利用斜率相等推得.并且这些结论和赛题很类似.

(v) 若 $D$、$I$、$H$ 或 $D$、$O$、$H$ 三点共线,即点 $I$ 或点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的高线 $AD$ 上,显然 $\triangle ABC$ 必为等腰三角形.但 $D$、$O$、$I_1$,$D$、$I$、$I_1$,$D$、$I$、$I_2$,$D$、$I$、$I_3$ 均不可能共线.下面说明 $D$、$O$、$I_1$ 三点不可能共线,其他类似.

若 $D$、$O$、$I_1$ 三点共线,则 $k_{DO}=k_{DI_1}$,即

$$\frac{\cos A}{\sin(B-C)}=\frac{\sin A}{\cos B-\cos C}$$

仿照证法16中的推导得

$$\cos A+\cos B+\cos C=0$$

而
$$\cos A+\cos B+\sin C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{4}$$

这不可能,因此 $D$、$O$、$I_1$ 三点不可能共线.

(4)孙哲先生撰文指出本章试题A与第38届IMO预选题中题16是等价的.他首先运用外心与内心的有关性质,给出了试题A的新证,再探讨这两道题的等价性.①

**外心性质定理** 过△$ABC$外心$O$任作一直线与边$AB$、$AC$(或延长线)相交于$P$、$Q$两点,则

$$\frac{AB}{AP}\sin 2B+\frac{AC}{AQ}\sin 2C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

**内心性质定理** 过△$ABC$的内心$I$任作一直线与边$AB$、$AC$相交于$P$、$Q$两点,则

$$\frac{AB}{AP}\sin B+\frac{AC}{AQ}\sin C=\sin A+\sin B+\sin C$$

下面证明试题A.



设$DO$的延长线与边$AC$相交于点$E$,则由内心、外心性质定理立得

$$\frac{CB}{CD}\sin B+\frac{CA}{CE}\sin A=\sin C+\sin B+\sin A \quad ①$$

$$\frac{CB}{CD}\sin 2B+\frac{CA}{CE}\sin 2A=\sin 2C+\sin 2B+\sin 2A \quad ②$$

把式①、②变为

$$\frac{BD}{CD}\sin B+\frac{AE}{CE}\sin A=\sin C \quad ③$$

$$\frac{BD}{CD}\sin 2B+\frac{AE}{CE}\sin 2A=\sin 2C \quad ④$$

把式③、④变为

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{AE}{CE}=\frac{\sin C}{\sin A} \quad ⑤$$

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2A}+\frac{AE}{CE}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A} \quad ⑥$$

⑤-⑥得

$$\frac{BD}{DC}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}\right)=\frac{\sin C}{\sin A}-\frac{\sin 2C}{\sin 2A} \quad ⑦$$

因 $AD\perp BC$,则

① 孙哲.两道几何名题的等价性[J].中学数学,2000(4):48-49.

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\cos B\cdot AB}{\cos C\cdot AC}=\frac{\cos B\sin C}{\cos C\sin B} \quad ⑧$$

把⑧代入⑦得

$$\frac{\cos B\sin C}{\cos C\sin B}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}\right)=\frac{\sin C}{\sin A}-\frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

整理得

$$\cos A=\cos B+\cos C \quad ⑨$$

把式⑨变为 $$1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

则 $$1=2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)+2\sin^2\frac{A}{2}=$$

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

故

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1 \quad ⑩$$



设 $BC=a,AC=b,AB=c$，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 $R$，与 $BC$ 边相切的旁切圆半径为 $r_a$，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}$，则

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)=S_{\triangle ABC}$$

从而 $$r_a=\frac{bc\sin A}{b+c-a}=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}=$$

$$\frac{16R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=$$

$$4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=R\text{（由式⑩得）}$$

故 $$r_a=R$$

在注(2)已证得试题 A 的逆命题成立，即

**逆命题 1**　$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，$O$、$I$ 是它的外心和内心，$AD$ 是 $BC$ 边上的高. 如果 $\triangle ABC$ 外接圆半径等于 $BC$ 边上的旁切圆半径，则 $I$ 在线段 $OD$ 上.

通过上面新证，易得试题 A 的又一逆命题，即有：

**逆命题 2**　$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，$O$、$I$ 是它的外心和内心，如果 $\triangle ABC$ 外接圆半径等于 $BC$ 边上的旁切圆半径，直线 $OI$ 交边 $BC$ 于 $D$，则 $AD$ 是 $BC$ 边上的

高.

**证明** 设直线 $OI$ 交 $AC$ 于 $E$,易得式 ⑦,由式 ⑦ 得

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\sin C(\cos A-\cos C)}{\sin B(\cos A-\cos B)} \tag{11}$$

由 $r_a=R$ 得式 ⑩.

由式 ⑩ 得式 ⑨.

由式 ⑨ 得

$$\cos A-\cos C=\cos B \tag{12}$$

$$\cos A-\cos B=\cos C \tag{13}$$

把 ⑫、⑬ 式代入 ⑪ 式得

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\sin C\cos B}{\sin B\cos C} \tag{14}$$

作 $AD'\perp BC$,则得

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{\sin C\cos B}{\sin B\cos C} \tag{15}$$



则
$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C}$$

即
$$\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{D'C},DC=D'C$$

即 $D'$、$D$ 重合,故 $AD$ 是 $BC$ 边上的高.

第 38 届 IMO 预选题中题 16 是:在锐角 $\triangle ABC$ 中,$AD$、$BE$ 是它的两个高,$AP$、$BQ$ 是两个内角平分线,$I$、$O$ 分别是它的内心和外心.证明:点 $D$、$E$、$I$ 共线当且仅当点 $P$、$Q$、$O$ 共线.

为了方便下文论述,在不改变 IMO 预选题实质的原则下,可以把 IMO 预选题改写如下,记作命题 2.

**命题 2** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$BM$、$CN$ 是它的两个高,$BP$、$CQ$ 是两个内角平分线,$I$、$O$ 分别是它的内心和外心.证明:点 $M$、$N$、$I$ 共线当且仅当点 $P$、$Q$、$O$ 共线.

在张角定理及应用中已证当且仅当

$$\cos A=\cos B+\cos C \tag{16}$$

时,命题 2 结论成立.

式 ⑯ 正是试题 A 新证法中的式 ⑨.

由此立得试题 A 的引申题.即有:

**引申题 1** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$AD$ 是 $BC$ 边上的高,$O$、$I$ 分别是外心和内心,

$I$ 在线段 $OD$ 上，$BM$、$CN$ 是它的两个高，$BP$、$CQ$ 是两个内角平分线. 证明：点 $M$、$N$、$I$ 共线当且仅当点 $P$、$Q$、$O$ 共线，即命题 1$\Rightarrow$ 命题 2.

又可得命题 2 的引申题，即有：

**引申题 2** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$BM$、$CN$ 是它的两个高，$BP$、$CQ$ 是它的两内角平分线，$O$、$I$ 是外心和内心，若 $M$、$N$、$I$(或 $P$、$Q$、$O$) 共线，则 $\triangle ABC$ 外接圆半径等于 $BC$ 边上的旁切圆半径，即命题 2$\Rightarrow$ 命题 1.

由此得结论，命题 1$\Leftrightarrow$ 命题 2.

因此，1998 年全国高中联赛加试试题 A 与第 38 届 IMO 预选题中题 16 是等价的.

**试题 B** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C > \angle B$，点 $D$ 是边 $BC$ 上一点，使 $\angle ADB$ 是钝角，$H$ 是 $\triangle ABD$ 的垂心，点 $F$ 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆周上. 求证：点 $F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充要条件是 $HD \parallel CF$ 且 $H$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆周上.

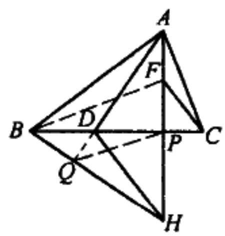



图 20.14

**证法 1** 必要性：设 $F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，如图 20.14 所示，记 $AH$ 交 $BC$ 于点 $P$，且 $BH$ 交 $AD$ 延长线于点 $Q$，联结 $PQ$、$BF$.

一方面由于 $F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，易知

$$\angle AFB = 180° - \angle ACB$$

又因为 $F$ 在 $\triangle ABD$ 外接圆上，知

$$\angle AFB = \angle ADB$$

再由 $H$ 为 $\triangle ABD$ 的垂心，知

$$\angle ADB = 180° - \angle AHB$$

则
$$\angle AHB = \angle ACB$$

故 $H$ 在 $\triangle ABC$ 外接圆上.

另一方面，由 $H$、$P$、$D$、$Q$ 四点共圆，有

$$\angle HDP = \angle HQP$$

又由 $A$、$B$、$Q$、$P$ 四点共圆，有

$$\angle HQP = \angle PAB$$

又
$$\angle PAB = 90° - \angle ABC = \angle FCB$$

则
$$\angle HDP = \angle FCB$$

故
$$HD \parallel CF$$

充分性：由 $HD \parallel CF$，有

$$\angle HDP = \angle FCB$$

仿上有 $$\angle PDH = \angle PQH = \angle BAP$$

故 $$\angle BAP = \angle BCF$$

则 $CF \perp AB$,知 $F$ 在边 $AB$ 上的高 $CN$ 上.

因 $H$ 在 $\triangle ABC$ 外接圆上,则

$$\angle ACB = \angle AHB$$

又 $H$ 为 $\triangle ABD$ 的垂心,知

$$\angle ADB = 180° - \angle AHB$$

故 $$\angle AFB + \angle ACB = 180°$$

设 $\triangle ABC$ 的垂心为 $F'$,如图 20.15 所示,则

$$\angle AF'B = 180° - \angle ACB$$

若点 $F$ 在线段 $F'N$ 内,则

$$\angle AFB > \angle AF'B$$

若点 $F$ 在线段 $F'C$ 内,则

$$\angle AFB < \angle AF'B$$

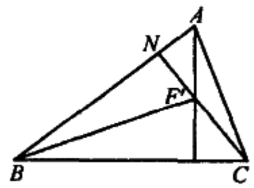



图 20.15



均矛盾,则 $F$ 与 $F'$ 重合,即 $F$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

**证法 2** 首先注意到下面的事实.

设 $\triangle UVW$ 中,$\angle UVW$ 和 $\angle VWU$ 均为锐角,则点 $P$ 是 $\triangle UVW$ 垂心的充要条件是:$UP \perp VW$,且 $\angle VPW = 180° - \angle VUW$.

(i) 若 $HD \parallel CF$,且 $H$ 在 $\triangle ABC$ 外接圆上,则 $CF \perp AB$,且

$$\angle AFB = \angle ADB = 180° - \angle AHB = 180° - \angle ACB$$

故点 $F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

(ii) 若点 $F$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,有 $HD \parallel CF$,且

$$\angle ACB = 180° - \angle AFB = 180° - \angle ADB = \angle AHB$$

故 $A$、$B$、$C$、$H$ 四点共圆.

**试题 C** 如图 20.16,某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 $AB$、$BC$ 两边相切于 $G$、$H$ 两点,与对角线 $AC$ 相交于 $E$、$F$ 两点.问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件,使得存在另一圆过 $E$、$F$ 两点,且分别与 $DA$、$DC$ 的延长线相切?证明你的结论.

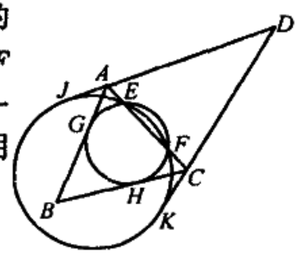



图 20.16

**解** 所求的充分必要条件是

$$AB + AD = CB + CD$$

(i) 必要性：设过 $E$、$F$ 两点的另一圆分别与 $DA$ 延长线和 $DC$ 延长线相切于 $J$ 和 $K$ 两点. 则有

$$AB + AD = BG + GA + AD = BG + JA + AD = BG + JD = BH + KD = BH + KC + CD = BH + HC + CD = CB + CD$$

(ii) 充分性：设凸四边形 $ABCD$ 满足条件

$$AB + AD = CB + CD$$

在 $DA$ 延长线和 $DC$ 延长线上分别取点 $J$ 和点 $K$，使得 $AJ = AG$，$CK = CH$. 于是

$$DJ = JA + AD = AG + AD = AB + AD - BG = CB + CD - BH = CH + CD = DK$$

过点 $J$ 和点 $K$ 分别作 $DJ$ 和 $DK$ 的垂线，以两垂线交点为圆心作通过点 $J$ 和点 $K$ 的圆. 因为 $AJ = AG$，$CK = CH$，所以点 $A$ 和点 $C$ 关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂.

因为直线 $AC$ 与原有圆相交于 $E$ 和 $F$ 两点，所以 $EF$ 是两圆的公共弦(直线 $AC$ 是两圆的根轴).

至此，我们证明了所作的与 $DA$ 延长线和 $DC$ 延长线相切的圆通过 $E$、$F$ 两点.

## 第1节　过三角形巧合点的直线

**命题1**　设直线 $l$ 是过 $\triangle ABC$ 的巧合点 $M$ 的一条直线，交 $AB$ 于 $P$，交 $AC$ 于 $Q$，则

(1) 当 $M$ 为内心 $I$ 时，有

$$\frac{AB}{AP}\cdot AC + \frac{AC}{AQ}\cdot AB = AB + AC + BC$$

(2) 当 $M$ 为重心 $G$ 时，有

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$$

(3) 当 $M$ 为垂心 $H$ 时，有

$$\frac{AB}{AP}\cdot \tan B + \frac{AC}{AQ}\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$$

(4) 当 $M$ 为旁心 $I_A$ 时，有

$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin C=-\sin A+\sin B+\sin C$$

(5) 当 $M$ 为外心 $O$ 时,有

$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin 2B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin 2C=-\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

**证明** 如图20.17,先看一般性的一个命题:设 $N$ 为 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上任意一点,直线 $PQ$ 分别交 $AB$、$AN$、$AC$ 于 $P$、$M$、$Q$,则

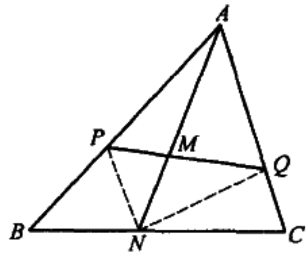


图 20.17

$$\frac{AN}{AM}=\frac{AM+MN}{AM}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle NPQ}}{S_{\triangle APQ}}=$$

$$\frac{S_{\triangle APN}+S_{\triangle AQN}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{\frac{AP}{AB}\cdot S_{\triangle ABN}+\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ACN}}{\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BN}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CN}{BC}\qquad(*)$$



(1) 当 $M$ 为 $\triangle ABC$ 的内心时,有

$$\frac{BN}{BC}=\frac{AB}{AB+AC},\frac{NC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC},\frac{AN}{AM}=\frac{AB+AC+BC}{AB+AC}$$

将上述三式代入式(*),即可证得(1).

(2) 当 $M$ 为 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 时,有

$$BN=CN,\frac{BN}{BC}=\frac{CN}{BC}=\frac{1}{2}$$

且

$$\frac{AM}{AN}=\frac{2}{3}$$

由此即证得(2).

(3) 当 $M$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 时,有

$$\frac{AM}{BC}=\frac{1}{\tan A}$$

(延长 $BM$ 交 $AC$ 于 $E$,有 $\frac{AM}{BC}=\frac{AE}{BE}$) 即

$$\frac{AN}{AM}=\frac{AN\tan A}{BC}$$

又 $$\frac{BN}{BC}=\frac{AN}{BC\tan B},\frac{NC}{BC}=\frac{AN}{BC\tan C}$$

将上述三式代入式(*)即证得(3).

(4) 类似(1)而证.

(5) 由 $\frac{BN}{NC}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$,及对 $\triangle ABN$ 及截线 $CMF$(直线 $CM$ 交 $AB$ 于 $F$)应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CN}\cdot\frac{NM}{MA}=1$$

可求得 $$\frac{AM}{AN}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

将三式代入式(*)即证得(5).

**命题2** 设直线 $l$ 将 $\triangle ABC$ 的周长分成比为 $m_1:m_2$ 的两部分,将 $\triangle ABC$ 的面积对应地分成比为 $S_1:S_2$ 两部分,如果 $S_1:S_2=m_1:m_2$,证明:直线 $l$ 通过 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心.

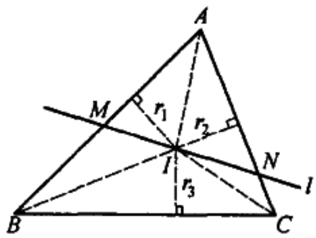


图 20.18

**证明** 如图20.18,$l$ 与 $AB$、$AC$ 分别交于点 $M$、$N$,作 $\angle BAC$ 的平分线交 $l$ 于 $I$,过 $I$ 分别作 $AB$、$AC$、$BC$ 的垂线 $r_1$、$r_2$、$r_3$,则 $r_1=r_2$.

直线 $l$ 将 $\triangle ABC$ 的周长分成比为 $m_1:m_2$ 的两部分,则

$$\frac{AM+AN}{MB+BC+CN}=\frac{m_1}{m_2}$$

因 $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\triangle AIM}+S_{\triangle AIN}}{S_{\triangle BIM}+S_{\triangle BIC}+S_{\triangle CIN}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}AM\cdot r_1+\frac{1}{2}AN\cdot r_2}{\frac{1}{2}BM\cdot r_1+\frac{1}{2}BC\cdot r_3+\frac{1}{2}NC\cdot r_2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}(AM+AN)r_1}{\frac{1}{2}(BM+BC+NC)r_1+\frac{1}{2}BC(r_3-r_1)}=$$

$$\frac{(AM+AN)r_1}{(BM+BC+NC)r_1+BC(r_3-r_1)}$$

又 $$S_1:S_2=m_1:m_2$$

则
$$\frac{(AM+AN)r_1}{(BM+BC+NC)r_1+BC(r_3-r_1)}=\frac{AM+AN}{BM+BC+NC}$$
从而
$$BC(r_3-r_1)=0$$
即
$$r_3-r_1=0$$
故
$$r_1=r_3$$

于是有 $r_1=r_2=r_3$.由此说明点 $I$ 是 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心,即直线 $l$ 通过 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心.

**命题 3** 过 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 任作一直线 $l$ 把 $\triangle ABC$ 分成两部分,求证:这两部分的面积之差不大于 $\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$.

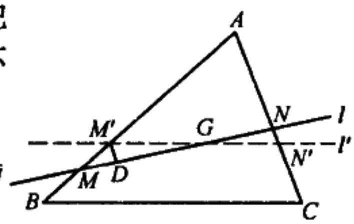


图 20.19

**分析** 由于直线 $l$ 是过点 $G$ 的任意直线,不妨退到与 $BC$ 平行的特殊位置,如图 20.19 所示,则
$$S_{\triangle AM'N'}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$$



因此
$$S_{BCN'M'}-S_{\triangle AM'N'}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$$
所以只要证
$$S_{BCNM}-S_{\triangle AMN}\leqslant S_{BCN'M'}-S_{\triangle AM'N'}$$
即证
$$S_{\triangle NGN'}\leqslant S_{\triangle MGM'}$$
而这只需要过 $M'$ 作 $AC$ 的平行线 $M'D$ 就不难完成了.(证明可参见第 6 章第 2 节中例 1)

**命题 4** 任意三角形的垂心 $H$、重心 $G$ 和外心 $O$ 三点共线,且 $HG=2GO$.此命题称为欧拉线定理,此线称为欧拉线.

**证明** 如图 20.20,设 $M$ 为 $AB$ 的中点,联结 $CM$,则 $G$ 在 $CM$ 上,且 $CG=2GM$.

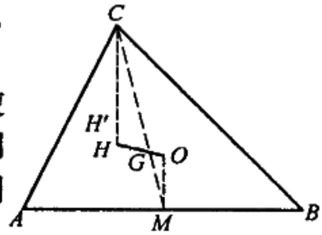


图 20.20

联结 $OM$,则 $OM$ 垂直平分 $AB$,延长 $OG$ 到 $H'$,使 $H'G=2GO$,联结 $CH'$.因 $\angle CGH'=\angle MGO$,则 $\triangle CH'G\backsim\triangle MOG$,从而 $CH'\parallel OM$,即 $CH'\perp AB$,同理 $AH'\perp BC$,即 $H'$ 为垂心 $H$.

命题获证.

下面介绍欧拉线性质的应用.①

**例 1** 如图 20.21,$AD$、$BE$、$CF$ 为 $\triangle ABC$ 的三条高.若 $EF$ 平分 $AD$,则 $\triangle ABC$ 的欧拉线平行于边 $BC$.

**证明** 如图 20.21,设 $\triangle ABC$ 的垂心为点 $H$,取重心 $G$,则直线 $GH$ 为

① 黄全福.三角形的欧拉线[J].中等数学,2005(8):2-5.

$\triangle ABC$ 的欧拉线.

设 $EF \cap AD = S$,联结 $DE$.联结并延长 $AG$ 交边 $BC$ 于点 $K$.易知 $B$、$C$、$E$、$F$ 与 $H$、$D$、$C$、$E$ 分别四点共圆.于是

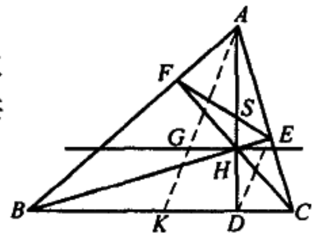


图 20.21

$$\angle BEF = \angle BCF = \angle DCH = \angle DEH$$

$EH$ 是 $\triangle DES$ 的内角平分线.

此时,$EA$ 是 $\triangle DES$ 的外角平分线.故

$$\frac{SH}{DH} = \frac{ES}{ED} = \frac{AS}{AD} = \frac{1}{2}$$

令 $SH = 1$,则

$$DH = 2, AS = SD = 3, AH = AS + SH = 4$$

因为$\frac{AH}{HD} = \frac{4}{2} = 2$,由三角形重心性质知$\frac{AG}{GK} = 2$,故

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AG}{GK}$$

所以,$GH \parallel BC$,即 $\triangle ABC$ 的欧拉线平行 $BC$.



请思考:不取 $\triangle ABC$ 的重心 $G$,而取 $\triangle ABC$ 的外心 $O$,你能证明 $\triangle ABC$ 的欧拉线 $OH \parallel BC$ 吗?

**例 2**　如图 20.22,$\triangle ABC$ 各边中点分别为 $A'$、$B'$、$C'$.证明:$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的欧拉线重合.

**证明**　如图 20.22,取 $\triangle ABC$ 的外心 $O$、联结 $AA'$、$BB'$,其交点为重心 $G$,所以,直线 $OG$ 是 $\triangle ABC$ 的欧拉线.易证

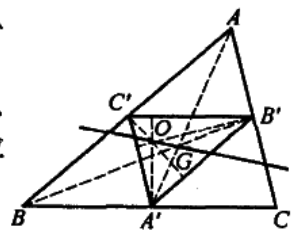


图 20.22

$$OA' \perp BC, OB' \perp CA, OC' \perp AB$$

又由题设有

$$B'C' \parallel BC, C'A' \parallel CA, A'B' \parallel AB$$

所以

$$A'O \perp B'C', C'O \perp A'B'$$

从而,点 $O$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心.

又易证 $\triangle ABC$ 的重心 $G$ 也是 $\triangle A'B'C'$ 的重心.所以,直线 $OG$ 也是 $\triangle A'B'C'$ 的欧拉线.

顺便指出,$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 位似,利用位似形性质,也可证得例 2.

**例 3**　如图 20.23,$l$ 为定直线.求作 $\triangle ABC$,使得直线 $l$ 是它的欧拉线.问:以直线 $l$ 为欧拉线的三角形能作出多少个?为什么?

**解**　分以下几个步骤.

(1) 在直线 $l$ 上任取 $O$、$G$ 两点.

(2) 再取点 $H$,使得 $GH = 2OG$.

(3) 过点 $H$ 任作直线 $l_1$,过点 $O$ 作直线 $l_2 \parallel l_1$.

(4) 过点 $G$ 任作直线 $l_3$ 交直线 $l_1$、$l_2$ 于点 $A$、$D$.

(5) 过点 $D$ 作直线 $l_4 \perp l_2$.

(6) 以 $O$ 为圆心、$OA$ 长为半径作圆 $O$ 交直线 $l_4$ 于 $B$、$C$ 两点.

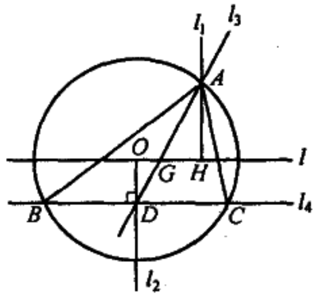


图 20.23

则 $\triangle ABC$ 即为所求作之三角形,它的欧拉线是已知直线 $l$.

观察步骤(1)、(3)、(4),$O$、$G$ 两点是任意取的,$l_1$、$l_3$ 两直线是任意作的,这就意味着以定直线 $l$ 为欧拉线的三角形能作出无数个.

**例 4** 如图 20.24,在锐角 $\triangle ABC$ 中,边 $BC$ 为最小边,点 $O$、$G$、$I$、$H$ 分别是它的外心、重心、内心、垂心.当 $OG = GI = IH$ 时,求 $AB : AC : BC = ?$



**解** 由欧拉线定义知外心 $O$、重心 $G$、垂心 $H$ 三点共线.由欧拉线性质知

$$OG : GH = 1 : 2$$

由 $OG = GI = IH$,可知 $I$ 是 $GH$ 的中点,即点 $I$ 在欧拉线 $OH$ 上.

如图 20.24,联结 $OB$、$OC$,作 $OM \perp AB$,垂足为 $M$.

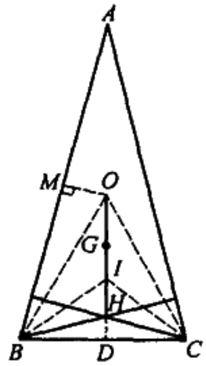


图 20.24

易证 $\angle BOM = \angle ACB$,则有 $\angle OBM = \angle CBH$.但 $BI$ 平分 $\angle ABC$,故 $BI$ 平分 $\angle OBH$.

同理,$CI$ 平分 $\angle OCH$.因为

$$\frac{OB}{HB} = \frac{OI}{IH} = \frac{OC}{HC}$$

则有 $$HB = HC$$

于是 $$\angle HCB = \angle HBC$$

进而 $$90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle ACB$$

即 $$\angle ABC = \angle ACB$$

所以 $$AC = AB$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,$BC$ 为底边.

由于 $\triangle OBH \cong \triangle OCH$,所以,$OH$ 平分 $\angle BOC$.从而,$OH \perp BC$ 于 $D$.易证

$$\text{Rt}\triangle BOM \backsim \text{Rt}\triangle BHD$$

则
$$\frac{BM}{BD}=\frac{OB}{HB}=\frac{OI}{IH}=2$$
所以
$$\frac{AB}{BC}=\frac{BM}{BD}=2$$
故
$$AB:AC:BC=2:2:1$$

**例5**　如图20.25，圆 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，点 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心．记 $BC=a, CA=b, AB=c$，圆 $O$ 的半径为 $R$．试用 $a$、$b$、$c$、$R$ 表示 $OH$ 的长．

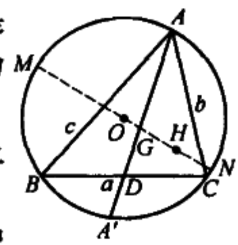


图20.25

**解**　如图20.25，取 $\triangle ABC$ 的重心 $G$，则点 $G$ 必在 $OH$ 上（欧拉线定义），且 $OH=3OG$．

射线 $AG$ 交圆 $O$ 于点 $A'$、交边 $BC$ 于点 $D$，$D$ 为 $BC$ 的中点．直线 $OH$ 交圆 $O$ 于点 $M$、$N$．易知
$$DA'=\frac{BD\cdot DC}{AD}=\frac{a^2}{4AD}$$
$$GA'=GD+DA'=\frac{1}{3}AD+\frac{a^2}{4AD}$$
$$AG=\frac{2}{3}AD$$

注意到 $AD^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)$，则有
$$R^2-OG^2=MG\cdot GN=AG\cdot GA'=\frac{2}{3}AD(\frac{1}{3}AD+\frac{a^2}{4AD})=$$
$$\frac{2}{9}AD^2+\frac{1}{6}a^2=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)+\frac{1}{6}a^2=$$
$$\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$
故
$$OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$
$$OH^2=9OG^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$
因此
$$OH=\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$$

**例6**　如图20.26，圆 $O$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆，$A'$、$B'$、$C'$ 分别是三边上的切点．证明：$\triangle A'B'C'$ 的欧拉线平分斜边 $AB$．

**证明**　如图20.26，联结 $OA'$、$OB'$、$OC'$，射线 $CO$ 交 $AB$、$A'B'$ 于 $N$、$S$．易知四边形 $A'CB'O$ 为正方形，则 $CS=SO$，$SA'=SB'$，$\triangle A'B'C'$ 的重心 $G$ 在中线 $C'S$ 上．

设$\triangle A'B'C'$的欧拉线$GO$交斜边$AB$于点$M$.观察$\triangle SNC'$及直线$MOG$,利用梅涅劳斯定理得

$$\frac{SO}{ON}\cdot\frac{NM}{MC'}\cdot\frac{C'G}{GS}=1 \quad ①$$

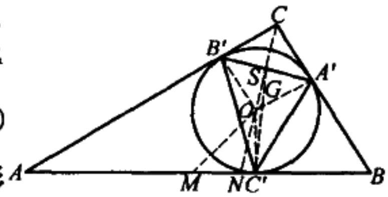



图 20.26

令$BC=a,CA=b(b>a),AB=c$,由三角形内心性质有

$$\frac{CO}{ON}=\frac{a+b}{c}$$

但$SO=\frac{1}{2}CO$,所以

$$\frac{SO}{ON}=\frac{\frac{1}{2}CO}{ON}=\frac{a+b}{2c}$$

$$NC'=AC'-AN=\frac{b+c-a}{2}-\frac{bc}{a+b}=\frac{(b-a)(a+b-c)}{2(a+b)}$$

令$NM=x$,代入式①有



$$\frac{a+b}{2c}\cdot\frac{x}{x+\frac{(b-a)(a+b-c)}{2(a+b)}}\cdot\frac{2}{1}=1$$

即
$$(a+b)x=cx+\frac{c(b-a)(a+b-c)}{2(a+b)}$$

或
$$(a+b-c)x=\frac{c(b-a)(a+b-c)}{2(a+b)}$$

所以
$$x=\frac{bc-ac}{2(a+b)}$$

故
$$AM=AN-x=\frac{bc}{a+b}-\frac{bc-ac}{2(a+b)}=\frac{2bc-(bc-ac)}{2(a+b)}=\frac{c(a+b)}{2(a+b)}=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}AB$$

关于欧拉线与边相交的问题.

众所周知,等腰三角形的欧拉线是它底边的中垂线;直角三角形的欧拉线是斜边上中线所在的直线.这就是说,无论是等腰三角形,还是直角三角形,它们的欧拉线都通过一个内角的顶点和该内角对边的中点.

问题:三边两两不等的锐角三角形或钝角三角形,它们的欧拉线又是怎样的情形呢?

黄全福老师经过一番探讨,发现了如下情形:

(1) 锐角三角形(三边两两不等)的欧拉线和它的大、小两边真正相交.

(2) 钝角三角形(三边两两不等)的欧拉线和它的大、中两边真正相交.

这里所谓的"真正相交",是指交点在边的两个端点之间.

## 第2节　完全四边形的优美性质(三)

**性质8**　完全四边形 $ABCDEF$ 的四个三角形 $\triangle ACF$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle ABE$ 的外接圆共点 $M$,点 $M$ 称为它的密格尔点.

**证明**　如图20.27,设 $\triangle BCD$ 与 $\triangle DEF$ 的外接圆除交于点 $D$ 外,还交于点 $M$.

设点 $M$ 在直线 $CB$、$CD$、$BD$ 上的射影分别为 $P$、$Q$、$R$,则对 $\triangle BCD$ 应用西姆松定理,知 $P$、$Q$、$R$ 共线.

又设点 $M$ 在 $AE$ 上的射影为 $S$,则对 $\triangle DEF$ 应用西姆松定理,知 $Q$、$R$、$S$ 共线,故 $P$、$Q$、$R$、$S$ 四点共线.

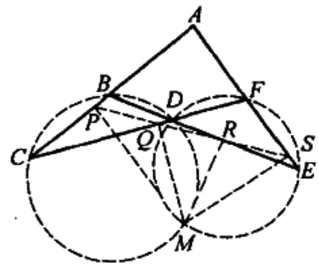


图20.27

在 $\triangle ACF$ 中,点 $P$ 在直线 $AC$ 上,点 $Q$ 在直线 $CF$ 上,点 $S$ 在直线 $AF$ 上,且 $P$、$Q$、$S$ 共线,则 $\triangle ACF$ 应用西姆松定理的逆定理,知点 $M$ 在 $\triangle ACF$ 的外接圆上.

同理,点 $M$ 在 $\triangle ABE$ 的外接圆上.

故 $\triangle ACF$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle ABE$ 的四个外接圆共点.

**性质9**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中,点 $G$、$H$ 分别是过点 $E$ 的直线在 $\triangle DEF$ 内、在 $\triangle ABE$ 外的两点,设直线 $GF$ 与 $HA$ 交于点 $M$,直线 $GD$ 与 $HB$ 交于点 $N$,则 $C$、$N$、$M$ 三点共线.

**证明**　如图20.28,分别对 $\triangle DEF$ 及截线 $ABC$,对 $\triangle GEF$ 及截线 $HAM$,对 $\triangle DEG$ 及截线 $HBN$ 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FC}{CD}=1$$

$$\frac{GM}{MF}\cdot\frac{FA}{AE}\cdot\frac{EH}{HG}=1$$

$$\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DN}{NG}\cdot\frac{GH}{HE}=1$$

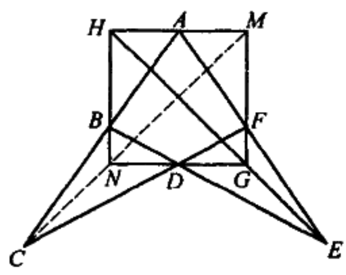


图20.28

以上三式相乘得

$$\frac{DN}{NG}\cdot\frac{GM}{MF}\cdot\frac{FC}{CD}=1$$

对 $\triangle DGF$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 $C$、$N$、$M$ 三点共线.

**注** 若注意到 $\triangle ABH$ 和 $\triangle FDG$ 的对应顶点的连线 $AF$、$HG$、$BD$ 所在直线交于一点 $E$,则我们证明了 $\triangle ABH$ 和 $\triangle FDG$ 的三双对应边 $AB$ 与 $FD$、$HB$ 与 $CD$、$HA$ 与 $GF$ 所在直线的交点 $C$、$N$、$M$ 共线. 这实际上就是著名的笛沙格定理.

**性质 10** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,若点 $G$、$H$ 分别是 $CF$、$BE$ 的中点,则 $S_{BCEF}=4S_{\triangle AGH}$.

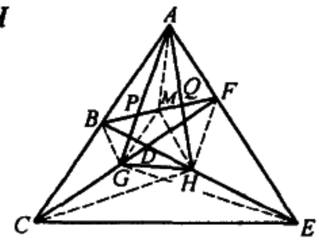


图 20.29

**证法 1** 如图 20.29,联结 $CH$、$HF$,得

$$S_{\triangle AGH}=S_{\triangle ACH}-S_{\triangle CGH}-S_{\triangle ACG}=$$
$$S_{\triangle ABH}+S_{\triangle BCH}-\frac{1}{2}S_{\triangle CHF}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACF}=$$
$$\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}+\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}-\frac{1}{2}S_{ACHF}=$$
$$\frac{1}{2}S_{HCEF}=\frac{1}{4}(S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BCE})=\frac{1}{4}S_{BCEF}$$



即证.

**证法 2** 如图 20.29,联结 $BG$、$GE$,则

$$S_{BGHF}=\frac{1}{2}S_{BGEF}=\frac{1}{4}S_{BCEF}$$

故只需要证

$$S_{\triangle AGH}=S_{BGHF}$$

取 $BF$ 的中点 $M$,联结 $AM$、$MG$、$MH$,设 $BF$ 与 $AG$、$AH$ 分别交于点 $P$、$Q$. 由 $MG\mathbin{/\!/}AC$,$MH\mathbin{/\!/}AE$,知

$$S_{\triangle BGP}=S_{\triangle APM},S_{\triangle AQM}=S_{\triangle FQH}$$

则

$$S_{\triangle BGP}+S_{\triangle FQH}=S_{\triangle APM}+S_{\triangle AQM}=S_{\triangle APQ}$$

故

$$S_{\triangle AGH}=S_{BGHF}=\frac{1}{4}S_{BCEF}$$

**性质 11** 以完全四边形的三条对角线为直径的圆共轴,且完全四边形的四个三角形的垂心在这条根轴上.

**证明** 如图 20.30,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,以对角线 $AD$、$BF$、$CE$ 为直径作圆. 这三个圆的圆心就是三条对角线的中点 $M$、$N$、$P$.

设 $H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$ 分别为 $\triangle FDE$、$\triangle ACF$、$\triangle ABE$、$\triangle BCD$ 的垂心,注意到三角形垂心的性质:三角形的垂心是所有过任一条高的两个端点的圆的根心.

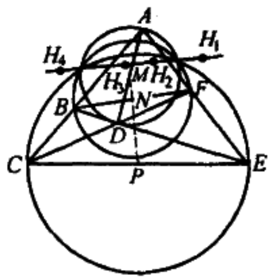



图 20.30

在完全四边形 $ABCDEF$ 中，显然 $\triangle FDE$、$\triangle ACF$、$\triangle ABE$、$\triangle BCD$ 的垂心不重合．由于 $\triangle DEF$ 的垂心 $H_1$ 是三个圆的根心，而对于 $\triangle DEF$，在它的边所在直线上的点 $C$、$B$、$A$，$\triangle DEF$ 的垂心 $H_1$ 关于以 $CE$、$BF$、$AD$ 为直径的圆的幂相等，即 $H_1$ 在这三个圆两两的根轴上．

同样，对于 $\triangle ACF$，在它的边所在直线上的点 $B$、$D$、$E$，其垂心 $H_2$ 关于以 $CE$、$BF$、$AD$ 为直径的圆的幂相等．以及 $H_3$、$H_4$ 均关于以 $CE$、$BF$、$AD$ 为直径的圆的幂相等．

故 $H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$ 均在这三个圆两两的根轴上，即这三个圆两两的根轴重合，亦即共轴，且四个三角形的垂心在这条根轴上．

# 第21章 1999～2000年度试题的诠释

**试题 A** 如图21.1,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$,在 $CD$ 上取一点 $E$,$BE$ 与 $AC$ 相交于 $F$,延长 $DF$ 交 $BC$ 于 $G$.求证:$\angle GAC=\angle EAC$.

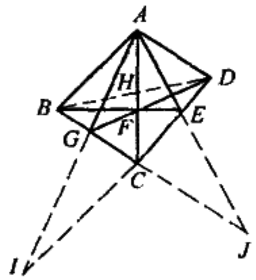


图21.1

**证法1** 联结 $BD$ 交 $AC$ 于 $H$.对 $\triangle BCD$ 用塞瓦定理,可得

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$$

因为 $AH$ 是 $\angle BAD$ 的平分线,由角平分线定理,可得

$$\frac{BH}{HD}=\frac{AB}{AD}$$

故
$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$$

过点 $C$ 作 $AB$ 的平行线交 $AG$ 的延长线于 $I$,过点 $C$ 作 $AD$ 的平行线交 $AE$ 的延长线于 $J$.则

$$\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB},\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$$

所以
$$\frac{CI}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$$

从而
$$CI=CJ$$

又因为
$$CI\,/\!/\,AB,CJ\,/\!/\,AD$$

故
$$\angle ACI=\pi-\angle BAC=\pi-\angle DAC=\angle ACJ$$

因此
$$\triangle ACI\cong\triangle ACJ$$

故
$$\angle GAC=\angle EAC$$

**证法2** (由南开大学李成章教授给出)如图21.1,记 $\angle BAC=\angle CAD=\theta,\angle GAC=\alpha,\angle EAC=\beta$.直线 $GFD$ 与 $\triangle BCE$ 相截,由梅涅劳斯定理,有

$$1=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADE}}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFB}}=$$

$$\frac{AB\sin(\theta-\alpha)}{AC\sin\alpha}\cdot\frac{AC\sin\theta}{AE\sin(\theta-\beta)}\cdot\frac{AE\sin\beta}{AB\sin\theta}=$$
$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\theta-\beta)}$$

所以
$$\sin(\theta-\alpha)\sin\beta=\sin(\theta-\beta)\sin\alpha$$
$$\sin\theta\cos\alpha\sin\beta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta=\sin\theta\cos\beta\sin\alpha-\cos\theta\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta\sin\alpha$$

即有
$$\tan\alpha=\tan\beta$$

从而
$$\alpha=\beta$$

故
$$\angle GAC=\angle EAC$$

**证法3** （由广东佛山一中张家良给出）设 $B$、$G$ 关于 $AC$ 的对称点分别为 $B'$、$G'$，易知 $A$、$D$、$B'$ 三点共线．联结 $FB'$、$FG'$，如图21.2所示，只需要证明 $A$、$E$、$G'$ 三点共线．

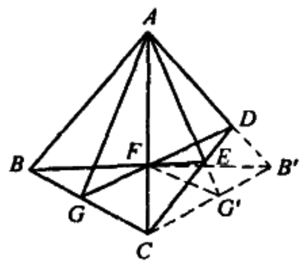


图21.2

设 $\angle EFB'=\alpha$，$\angle DFE=\angle BFG=\angle B'FG'=\beta$，$\angle AFD=\angle GFC=\angle G'FC=\gamma$，则

$$\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}=\frac{S_{\triangle FDA}}{S_{\triangle FAB'}}\cdot\frac{S_{\triangle FB'G'}}{S_{\triangle FG'C}}\cdot\frac{S_{\triangle FCE}}{S_{\triangle FED}}=$$
$$\frac{FD\sin\gamma}{FB'\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\cdot\frac{FB'\sin\beta}{FC\sin\gamma}\cdot\frac{FC\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{FD\sin\beta}=1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理，知 $A$、$E$、$G'$ 三点共线．

**证法4** （由福建师大肖石给出）如图21.3，联结 $BD$ 交 $AC$ 于 $H$．设 $\angle DAE=\alpha$，$\angle CAE=\beta$，作 $\angle CAG'=\beta$，交 $BC$ 于 $G'$，联结 $DG'$，则

$$\angle BAG'=\alpha$$

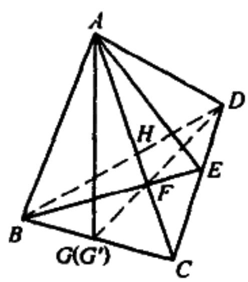


图21.3

因 $AC$ 平分 $\angle BAD$，则

$$\frac{DH}{HB}=\frac{AD}{AB}$$

另一方面，易知

$$\frac{BG'}{G'C}=\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

$$\frac{CE}{ED}=\frac{AC\sin\beta}{AD\sin\alpha}$$

从而
$$\frac{BG'}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DH}{HB}=1$$

在 $\triangle BCD$ 中,由塞瓦定理的逆定理知 $BE$、$CH$、$DG'$ 共点.

又 $BE$、$CH$ 交于点 $F$,故 $D$、$F$、$G'$ 共线,即 $G'$ 是 $DF$ 与 $BC$ 的交点,所以 $G$ 与 $G'$ 重合,从而 $\angle GAC=\angle EAC$.

**证法 5** (由大庆市一中张立民给出)如图 21.3,作 $\angle CAG'=\angle CAE$,交 $BC$ 于 $G'$. 只需要证 $G'$、$F$、$D$ 三点共线. 设 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$,$\angle CAG'=\angle CAE=\alpha$,由于 $B$、$F$、$E$,$B$、$G$、$C$,$C$、$E$、$D$ 均三点共线,由张角公式,有

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin\theta}{AE}$$

$$\frac{\sin\theta}{AG'}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}$$

$$\frac{\sin\theta}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC}$$



从而有
$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin\theta}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin\theta}{AG'}$$

故 $G'$、$F$、$D$ 三点共线.

**证法 6** (由天津市一中徐佳给出)如图 21.4,建立平面直角坐标系,设 $A(0,0)$、$C(c,0)$、$B(b,-kb)$、$D(d,kd)$,其中 $k$ 为直线 $AD$ 的斜率. 再设 $F(f,0)$,则直线 $CD$ 的方程为

$$y=\frac{kd}{d-c}(x-c)$$

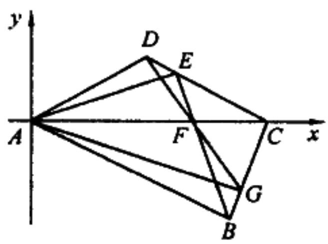



图 21.4

直线 $BF$ 的方程为

$$y=-\frac{kb}{b-f}(x-f)$$

从而,点 $E$ 坐标为

$$E\left(\frac{bd(c+f)-cf(b+d)}{2bd-df-bc},\frac{kbd(f-c)}{2bd-df-bc}\right)$$

故
$$k_{AE}=\frac{kbd(f-c)}{bd(c+f)-cf(b+d)}$$

同理,将 $b$、$d$ 互换,$k$ 变为 $-k$,可得

$$k_{AC}=\frac{-kdb(f-c)}{db(c+f)-cf(d+b)}=-k_{AE}$$

所以
$$\angle GAC=\angle EAC$$

**证法 7**　(由福建师大肖石给出)如图 21.5,建立直角坐标系.设 $|AD|=a$, $|AB|=d$, $|AC|=e$, $\angle DAC=\angle BAC=\theta$, 则 $A(0,0)$, $C(e,0)$, $D(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $B(d\cos\theta,-d\sin\theta)$.

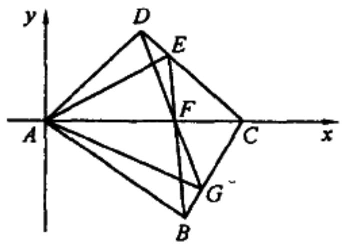



图 21.5

设 $E$ 分 $\overrightarrow{DC}$ 所成比为 $\lambda$,则

$$x_E=\frac{a\cos\theta+\lambda e}{1+\lambda}, y_E=\frac{a\sin\theta}{1+\lambda}, k_{AE}=\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta+e\lambda} \quad ①$$

设 $F$ 分 $\overrightarrow{EB}$ 所成比为 $\delta$,由 $F$ 在 $x$ 轴上,则

$$y_F=\frac{\frac{a\sin\theta}{1+\lambda}+\delta(-d\sin\theta)}{1+\delta}=0$$

则
$$\delta=\frac{a}{(1+\lambda)d}$$

$$x_F=\frac{\frac{a\cos\theta+\lambda e}{1+\lambda}+\frac{a}{(1+\lambda)d}d\cos\theta}{1+\frac{a}{(1+\lambda)d}}=\frac{(2a\cos\theta+\lambda e)d}{a+(1+\lambda)d}$$

设 $G$ 分 $\overrightarrow{BC}$ 所成比为 $\beta$,则

$$x_G=\frac{d\cos\theta+\beta e}{1+\beta}, y_G=\frac{-d\sin\theta}{1+\beta}$$

由 $D$、$F$、$G$ 三点共线有

$$\frac{x_F-x_D}{y_F-y_D}=\frac{x_G-x_D}{y_G-y_D}$$

即
$$\frac{\frac{(2a\cos\theta+\lambda e)d}{(1+\lambda)d+a}-a\cos\theta}{-a\sin\theta}=\frac{\frac{d\cos\theta+\beta e}{1+\beta}-a\cos\theta}{\frac{-d\sin\theta}{1+\beta}-a\sin\theta}$$

从而
$$\frac{(2a\cos\theta+\lambda e)d}{(1+\lambda)ad+a^2}-\cos\theta=\frac{2d\cos\theta+\beta e}{d+a(1+\beta)}-\cos\theta$$

$$\frac{(2a\cos\theta+e\lambda)d}{a^2+ad+ad\lambda}=\frac{2d\cos\theta+e\beta}{a+d+a\beta}$$

故
$$d(2a\cos\theta+e\lambda)(a+d+a\beta)=(a^2+ad+ad\lambda)(2d\cos\theta+e\beta)$$

$$2a^2d\cos\theta+2ad^2\cos\theta+ade\lambda+d^2e\lambda+(2a^2d\cos\theta+ade\lambda)\beta=$$
$$2a^2d\cos\theta+2ad^2\cos\theta+2ad^2\lambda\cos\theta+(a^2e+ade+ade\lambda)\beta$$
$$a(2ad\cos\theta-ae-de)\beta=d\lambda(2ad\cos\theta-ae-de)$$

即
$$\beta=\frac{d\lambda}{a}$$

从而
$$x_G=\frac{d\cos\theta+ed\lambda/a}{1+d\lambda/a}=\frac{ad\cos\theta+de\lambda}{a+d\lambda}$$
$$y_G=\frac{-d\sin\theta}{1+d\lambda/a}=\frac{-ad\sin\theta}{a+d\lambda}$$

则
$$k_{AG}=\frac{-ad\sin\theta}{ad\cos\theta+de\lambda}=-\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta+e\lambda} \quad ②$$

由 ①、② 知
$$k_{AE}=-k_{AG}$$

故
$$\angle EAC=\angle GAC$$



**证法 8** (由天津师大李建泉给出)我们先来看全国第五届中学生数学冬令营选拔考试第三题.

在"筝形"$MCNP$ 中,$MC=MP$,$CN=PN$,经 $MN$、$CP$ 的交点 $A$ 任作两条直线,分别交 $MP$ 于 $S$,交 $CN$ 于 $D$,交 $MC$ 于 $G$,交 $PN$ 于 $T$,$GD$、$ST$ 分别交 $CP$ 于 $F$、$Q$.求证:$FA=AQ$.

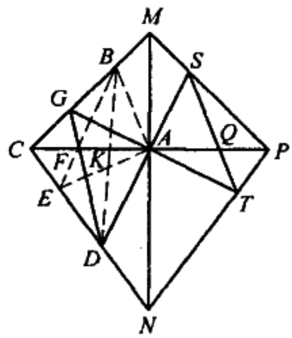


图 21.6

如图 21.6,由于 $MN$ 垂直且平分 $CP$,故作 $\triangle ABE$,使其关于直线 $MN$ 与 $\triangle AST$ 对称,则 $B$ 在 $MC$ 上,$E$ 在 $CN$ 上,且

$$\angle BAC=\angle SAP=\angle CAD$$
$$\angle GAC=\angle PAT=\angle EAC$$

所以,只要证明 $AC$、$DG$、$BE$ 三线交于一点即可.

联结 $BD$ 交 $AC$ 于 $K$,设 $\angle GAC=\angle EAC=\alpha$,$\angle BAG=\angle DAE=\beta$.则

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DK}{KB}=\frac{AB\sin\beta}{AC\sin\alpha}\cdot\frac{AC\sin\alpha}{AD\sin\beta}\cdot\frac{AD\sin(\alpha+\beta)}{AB\sin(\alpha+\beta)}=1$$

由塞瓦定理的逆定理,知 $AC$、$DG$、$BE$ 三线交于一点.

再来看 1999 年全国高中数学联赛加试第一题. 由同一法,作 $\angle G'AC=$

$\angle EAC$，交 $BC$ 于 $G'$，只需要证 $G'$、$F$、$D$ 三点共线，或 $AC$、$DG'$、$BE$ 三线交于一点. 由全国第五届中学生数学冬令营选拔考试第三题的证明过程，知结论成立. 由此，1999年全国高中数学联赛加试第一题可加强为：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$. 在 $CD$ 上取一点 $E$，在 $CB$ 上取一点 $G$，则 $AC$、$DG$、$BE$ 三线交于一点的充分必要条件为 $\angle GAC = \angle EAC$.

**试题 B**　设 $a$、$b$、$c$ 为 $\triangle ABC$ 的三条边，$a \leqslant b \leqslant c$，$R$ 和 $r$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径. 令 $f = a + b - 2R - 2r$，试用 $\angle C$ 的大小来判定 $f$ 的等号.

**解**　用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角，熟知

$$a = 2R\sin A, b = 2R\sin B$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

于是 $f = 2R(\sin A + \sin B - 1 - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}) =$

$$2R[2\sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{B-A}{2} - 1 + 2(\cos\frac{B+A}{2} - \cos\frac{B-A}{2})\sin\frac{C}{2}] =$$

$$4R\cos\frac{B-A}{2}(\sin\frac{B+A}{2} - \sin\frac{C}{2}) - 2R + 4R\cos\frac{\pi-C}{2}\sin\frac{C}{2} =$$

$$4R\cos\frac{B-A}{2}(\sin\frac{\pi-C}{2} - \sin\frac{C}{2}) - 2R + 4R\sin^2\frac{C}{2} =$$

$$4R\cos\frac{B-A}{2}(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}) - 2R(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}) =$$

$$2R(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})(2\cos\frac{B-A}{2} - \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})$$

令 $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$，所以

$$0 \leqslant \angle B - \angle A < \angle B \leqslant \angle C$$

又 $0 \leqslant \angle B - \angle A < \angle B + \angle A$，因此

$$\cos\frac{B-A}{2} > \cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{B-A}{2} > \cos\frac{B+A}{2} = \cos\frac{\pi-C}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

则
$$2\cos\frac{B-A}{2} > \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

则
$$f > 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \angle C < \frac{\pi}{2}$$

$$f = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \angle C = \frac{\pi}{2}$$

$$f < 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} < \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$$

**试题 C** 如图 21.7,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$.线段 $AB$ 上有一点 $D$,线段 $AC$ 延长线上有一点 $E$,使得 $DE = AC$.线段 $DE$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 $T$,$P$ 是线段 $AT$ 的延长线上的一点.证明:点 $P$ 满足 $PD + PE = AT$ 的充分必要条件是点 $P$ 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

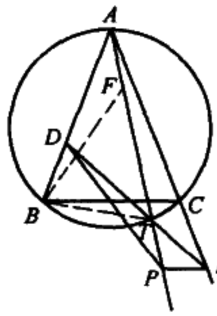


图 21.7

先证充分性.

**证法 1** 如图 21.7,在线段 $AT$ 上取一点 $F$,使得 $\angle ABF = \angle EDP$.

因为 $P$ 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上,所以有 $\angle BAF = \angle DAP = \angle DEP$.又 $AB = AC = DE$,故 $\triangle ABF \cong \triangle EDP$.于是

$$BF = PD, AF = PE$$



联结 $BT$,由 $A$、$B$、$C$、$T$ 四点共圆和 $A$、$D$、$E$、$P$ 四点共圆得

$$\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP = \angle ABF$$

在 $\triangle BFT$ 中,有

$$\angle FBT = \angle FBC + \angle CBT = \angle FBC + \angle ABF = \angle ABC$$

而 $$\angle FTB = \angle ACB$$

又据 $AB = AC$ 可得 $$\angle ABC = \angle ACB$$

故 $$\angle FBT = \angle FTB$$

即 $\triangle BFT$ 是等腰三角形,则

$$BF = FT$$

从而 $$AT = AF + FT = PE + BF = PE + PD$$

**证法 2** 联结 $BT$、$CT$.在 $\triangle BTC$ 和 $\triangle DPE$ 中,由 $A$、$B$、$C$、$T$ 四点共圆和 $A$、$D$、$E$、$P$ 四点共圆可得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP$,$\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$.于是,$\triangle BTC \backsim \triangle DPE$.从而,可设

$$\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k$$

对四边形 $ABTC$ 应用托勒密定理,有

$$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT$$

将上式两端同乘以 $k$,并用前一比例式代入可得

$$AC \cdot DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT$$

注意到 $AB = AC = DE$,此式即

$$PD + PE = AT$$

再证必要性.

**证法1**　以 $D$、$E$ 为两个焦点,长轴长等于 $AT$ 的椭圆与直线 $AT$ 至多有两个交点,而其中在 $DE$ 的一侧,即线段 $AT$ 延长线上的交点至多有一个.由前面充分性的证明知,$AT$ 的延长线与 $\triangle ADE$ 外接圆的交点 $Q$ 在这个椭圆上;而依题设点 $P$ 同时在 $AT$ 的延长线和椭圆上,故点 $P$ 与点 $Q$ 重合,命题得证.

**证法2**　如图21.8,在线段 $AT$ 的延长线上任取两点 $P_1$、$P_2$,易见当 $P_1T < P_2T$ 时有 $P_1D + P_1E < P_2D + P_2E$ 成立.于是,在线段 $AT$ 延长线上满足 $PD + PE = AT$ 的点 $P$ 至多有一个.而由充分性的证明知 $\triangle ADE$ 的外接圆与 $AT$ 延长线的交点即满足上述等式.故点 $P$ 就在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

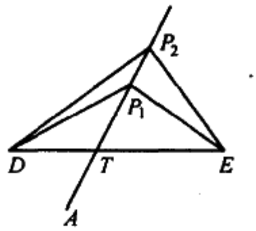


图21.8



## 第1节　三角形高上一点的性质及推广

**命题1**　在 $\triangle ABC$ 中,$AP \perp BC$,$O$ 为 $AP$ 上任意一点,$CO$、$BO$ 分别与 $AB$、$AC$ 交于 $D$、$E$,求证:$\angle DPA = \angle EPA$.

(2001年第14届爱尔兰数学奥林匹克试题)

本题曾多次被选做竞赛题,如1987年首届"友谊杯"国际数学竞赛、第26届(1994)加拿大数学奥林匹克、2003年保加利亚奥林匹克.)

**证法1**　如图21.9,过 $D$、$E$ 作 $DM \perp BC$,$EN \perp BC$,垂足分别为 $M$、$N$,$DM$ 交 $BE$ 于 $M_1$,$EN$ 交 $CD$ 于 $N_1$,则 $DM \parallel AP \parallel EN$.所以

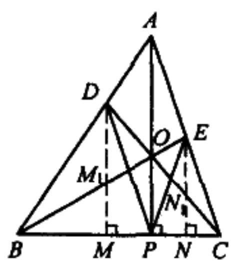


图21.9

$$\frac{MP}{NP} = \frac{DO}{N_1O} = \frac{DM_1}{EN_1} = \frac{DM_1}{AO} \cdot \frac{AO}{EN_1} = \frac{DM}{AP} \cdot \frac{AP}{EN} = \frac{DM}{EN}$$

所以　$$\mathrm{Rt}\triangle DPM \backsim \mathrm{Rt}\triangle EPN$$

所以　$$\angle DPM = \angle EPN$$

所以 $$\angle DPA=\angle EPA$$

**证法2** 如图21.10，过 $D$、$E$ 作 $DM\perp BC$，$EN\perp BC$，垂足分别为 $M$、$N$，联结 $DE$ 交 $AP$ 于 $G$，则 $DM$ // $AP$ // $EN$. 所以

$$\frac{MP}{PN}=\frac{DG}{GE} \quad ①$$

$$\frac{DM}{EN}=\frac{DM}{AP}\cdot\frac{AP}{EN}=\frac{DB}{AB}\cdot\frac{AC}{EC} \quad ②$$

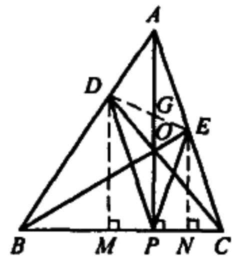


图21.10

对 $\triangle ADE$ 及共点 $O$ 的直线 $AP$、$BE$、$CD$，由塞瓦定理得

$$\frac{DB}{AB}\cdot\frac{AC}{EC}\cdot\frac{EG}{DG}=1 \quad ③$$

把①、②代入③整理得

$$\frac{MP}{PN}=\frac{DM}{EN}$$



所以 $$\mathrm{Rt}\triangle DPM\backsim\mathrm{Rt}\triangle EPN$$

所以 $$\angle DPM=\angle EPN$$

故 $$\angle DPA=\angle EPA$$

命题1是一个有着丰富内涵的几何问题，我们不妨称之为三角形高上一点的性质.

对于这条性质，我们可以从如下几个方面进行推广.

1. ***将高变为高所在的直线进行推广***

**推广1**[①] 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $BC$ 边上的高，$P$ 为 $AD$ 所在直线上任意一点，$BP$、$CP$ 分别交 $AC$ 和 $AB$ 所在直线于 $E$、$F$，则 $AD$ 平分 $\angle EDF$ 或其邻补角.

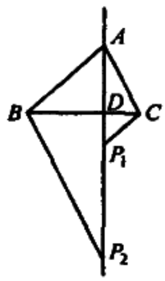


图21.11

**证明** 为了讨论问题的方便，先作辅助图，过 $C$ 作 $CP_1$ // $AB$ 交直线 $AD$ 于 $P_1$，过 $B$ 作 $BP_2$ // $AC$ 交 $AD$ 于 $P_2$，若 $AB\neq AC$，则 $P_1$、$P_2$ 不重合. 如图21.11所示.

(i) 若点 $P$ 取在除去线段 $P_1P_2$ 外的任一点，则 $AD$ 平分 $\angle EDF$，如图21.12(a)、(b)、(c)、(d) 所示.

① 杜少平，等. 完善一道几何题的推广[J]. 中学数学教学，1992(5):39-40.

下面仅就图 21.12(a) 的情形给出证明.

过 $P$ 作平行于 $BC$ 的直线,分别交 $DF$、$DE$ 延长线于 $M$、$N$. 由塞瓦定理得

$$\frac{PF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EP}=1 \tag{①}$$

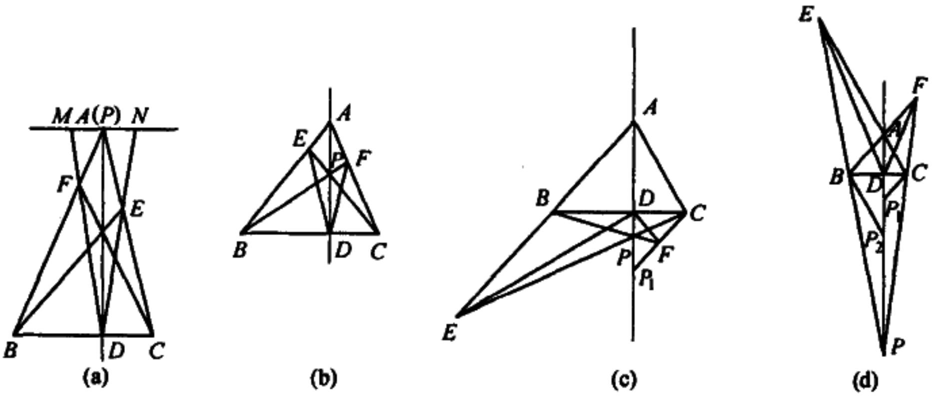



图 21.12



由 $\triangle PMF \backsim \triangle BDF$,得

$$\frac{PM}{BD}=\frac{PF}{BF} \tag{②}$$

由 $\triangle CDE \backsim \triangle PNE$,得

$$\frac{CD}{PN}=\frac{CE}{PE} \tag{③}$$

②、③ 两式代入 ①,得

$$\frac{PM}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{PN}=1$$

则
$$PM = PN$$

又
$$MN \parallel BC, AD \perp BC$$

则 $DP$ 垂直平分 $MN$,故 $AD$ 平分 $\angle EDF$.

(ii) 若点 $P$ 取在线段 $P_1P_2$ 上,则 $AD$ 平分 $\angle EDF$ 的邻补角,如图 21.13 所示.

(iii) 若点 $P$ 取垂足 $D$,则 $E$ 与 $C$ 重合,$F$ 与 $B$ 重合,$\angle EDF$ 为平角;若点 $P$ 取顶点 $A$,则 $E$、$F$ 皆与 $A$ 重合,$\angle EDF$ 可看成零度.结论 $AD$ 平分 $\angle EDF$ 都成立.

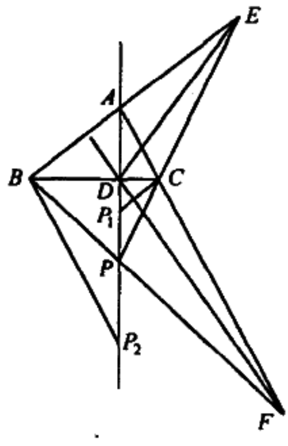



图 21.13

(iv) 若 $P$ 取在 $P_1$，$BP$ 与 $AC$ 相交于 $E$，过 $D$ 作 $AB$ 的平行线 $DF$（注意方向），仍有 $AD$ 平分 $\angle EDF$，如图 21.14 所示. 如取 $DF$ 反方向 $DF'$，则 $AD$ 平分 $\angle EDF'$ 的邻补角；$P$ 取在 $P_2$ 的情形类似.

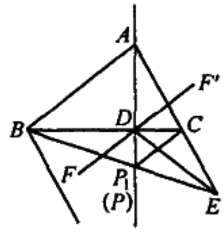



图 21.14

(v) 若 $AB = AC$，则 $P_1$ 与 $P_2$ 重合，不存在 $AD$ 平分 $\angle EDF$ 的邻补角的情况.

**推广 2**　对于钝角三角形（或直角三角形）对钝角边（或直角边）上的高所在直线上任取一点 $P$，与推广 1 有同样的结果.

**推广 3**　对于在钝角 $\triangle ABC$ 对锐角边上的高所在直线 $AD$，同推广 1 得出 $P_1$、$P_2$ 两点. 若在线段 $P_1P_2$ 上（不包含两端点）任取一点 $P$，直线 $BP$ 交直线 $AC$ 于 $E$，直线 $CP$ 交 $AB$ 于 $F$，则 $AD$ 平分 $\angle EDF$，如图 21.15 所示，若在 $P_1P_2$ 外任取一点，同样作出 $E$、$F$ 两点，则 $AD$ 平分 $\angle EDF$ 的邻补角.

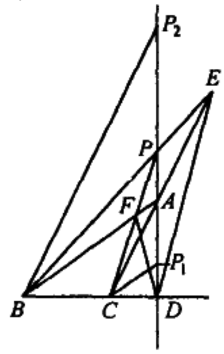



图 21.15



上面的推广，可综合为：

**命题 2**　对于三角形一边上的高所在的直线上任意一点，如果它和这边两端点的连线与另两边所在的直线相交，那么这条高将平分高的垂足与两交点连线的夹角或其邻补角.

***2. 将高线对应的边所在直线变成折线，且满足高线平分此折线角进行推广***①

**推广 4**　在凸四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$，$E$ 是 $CD$ 边上的一点，$BE$ 交 $AC$ 于 $G$，$DG$ 交 $BC$ 于 $F$. 求证：$\angle FAC = \angle EAC$.

（1999 年全国高中数学联赛加试题）

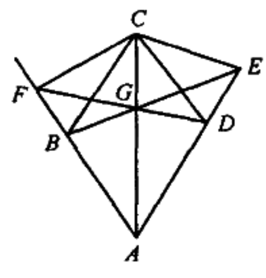



图 21.16

在推广 4 的基础上，若 $E$、$F$ 分别变为在 $AD$、$AB$ 的延长线上，则又成了一个推广.

**推广 5**　如图 21.16，在凸四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$，$F$ 是 $AB$ 延长线上任一点，$DF$ 交

① 赖百奇. 一类数学奥林匹克几何问题的解法[J]. 中学教研(数学)，2006(3)：41-42.

AC 于 G, BG 交 AD 的延长线于 E, 求证: $\angle ECA = \angle FCA$.

(《数学教学》问题 526)

证明方法同命题 1 的证法 2. (这里略)

把折线 BAD 的下凸部分变成上凸折线 BAD, 则又变成了一个推广.

**推广 6** 如图 21.17, A 为 $\triangle DBC$ 内一点, 满足 $\angle DAC = \angle BAC$, F 是线段 AC 内任一点, 直线 DF、BF 分别交边 BC、CD 于 G、E, 求证: $\angle GAC = \angle EAC$.

(《数学教学》问题 561)

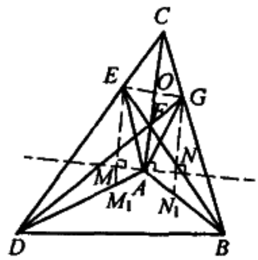



图 21.17

**证明** 联结 EG 交 AC 于 O, 过点 A 作 $a \perp AC$, 过 E 作 $EM \perp a$, 垂足为 M, 交 DA 于 $M_1$, 过 G 作 $GN \perp a$, 垂足为 N, 交 BA 于 $N_1$, 则 $EM_1 \parallel CA \parallel GN_1$, 则

$$\frac{EM_1}{GN_1} = \frac{EM_1}{AC} \cdot \frac{AC}{GN_1} = \frac{ED}{CD} \cdot \frac{CB}{GB} \quad ①$$

$$\frac{OE}{OG} = \frac{AM}{AN} \quad ②$$

因 $\angle DAC = \angle BAC$, $a \perp AC$, 则 $\angle MAM_1 = \angle NAN_1$, 即 $Rt\triangle MAM_1 \backsim Rt\triangle NAN_1$, 从而

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MM_1}{NN_1} \quad ③$$

对 $\triangle CEG$ 及共点 F 的直线 CF、DG、BE, 由塞瓦定理得

$$\frac{ED}{CD} \cdot \frac{CB}{GB} \cdot \frac{GO}{OE} = 1 \quad ④$$

由 ①, ②, ③, ④ 得
$$\frac{EM_1}{GN_1} = \frac{MM_1}{NN_1} = \frac{MA}{NA}$$

由比例性质得
$$\frac{EM}{GN} = \frac{MA}{NA}$$

从而
$$Rt\triangle EAM \backsim Rt\triangle GAN$$

则
$$\angle EAM = \angle GAN$$

即
$$\angle EAC = \angle GAC$$

### 3. 将高线对应的边变成与三角形另两边所在直线相交的直线 l, 高线变成过某点且与 l 垂直的直线进行推广

**推广 7** 已知圆 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点依次为 D、E、F, $DP \perp EF$ 于

$P$.求证:$\angle FPB=\angle EPC$.

(《数学教学》问题481)

**证明** 如图21.18,过$B$、$C$作$BM\perp EF$,$CN\perp EF$,垂足分别为$M$、$N$,则$BM\parallel DP\parallel CN$,即有

$$\frac{MP}{NP}=\frac{BD}{DC}$$

由已知得$AE=AF$,$BF=BD$,$CD=CE$,则$\angle AFE=\angle AEF$,即

$$\angle BFM=\angle CEN$$

从而 $$\text{Rt}\triangle BFM\backsim\text{Rt}\triangle CEN$$

即 $$\frac{BM}{CN}=\frac{BF}{CE}=\frac{BD}{DC}=\frac{MP}{NP}$$

于是 $$\text{Rt}\triangle MPB\backsim\text{Rt}\triangle NPC$$

故 $$\angle FPB=\angle EPC$$

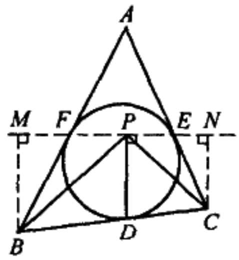


图21.18



**推广8** $\triangle ABC$的边$BC$外的旁边圆$O$分别切$BC$、$AB$、$AC$或其延长线于$D$、$E$、$F$,$DP\perp EF$于$P$,求证:$\angle BPD=\angle CPD$.

(《数学教学》问题402)

如图21.19,仿推广7的证明即可证得.

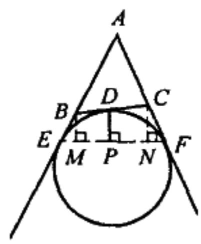


图21.19

**推广9** 凸四边形$ABCD$中,边$AB$、$DC$的延长线交于点$E$,边$BC$、$AD$的延长线交于点$F$,若$AC\perp BD$,求证:$\angle EGC=\angle FGC$.

(《数学教学》问题651)

**证明** 如图21.20,过点$B$作$BM\perp BD$交$EG$于$M$,过点$D$作$DN\perp BD$交$GF$于$N$,则$BM\parallel AC\parallel DN$,即

$$\frac{BM}{DN}=\frac{BM}{AG}\cdot\frac{AG}{DN}=\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AF}{DF}\qquad①$$

对$\triangle ABD$及共点$C$的直线$AC$、$BF$、$DE$,由塞瓦定理得

$$\frac{GB}{GD}\cdot\frac{DF}{AF}\cdot\frac{AE}{BE}=1\qquad②$$

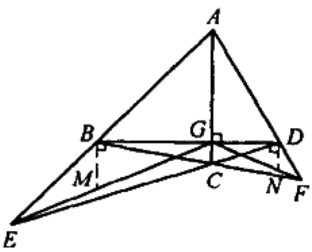


图21.20

把①代入②整理得

$$\frac{BM}{DN}=\frac{GB}{GD}$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle BGM\backsim\mathrm{Rt}\triangle DGN$$

即 $$\angle BGM=\angle DGN$$

故 $$\angle EGC=\angle FGC$$

***4.将 $\triangle ABC$ 的两条边 $AB$、$AC$ 变成两条平行线进行推广***①

**推广10**　梯形 $BCEF$ 中，$BF\parallel CE$，$BF\perp BC$，$BE$ 和 $CF$ 交于 $P$，点 $D$ 在 $BC$ 上，且 $PD\perp BC$。求证：$\angle FDP=\angle EDP$。

此推广的证明，可参见图21.20，在此图中，分别过 $E$、$F$ 作与直线 $BD$ 垂直的直线即可得直角梯形(证略)。

**推广11**　已知 $\angle FDP=\angle EDP$，其他条件同推广10，求证：$PD\perp BC$。

**证法1**　(反证法)如图21.21，假设 $PD$ 不垂直 $BC$，不妨设 $\angle PDB$ 为锐角，过 $P$ 作 $PD'\perp BC$。由已知有

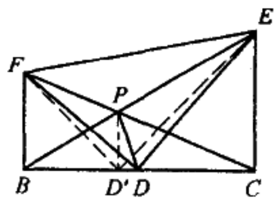



图21.21

$$BF\parallel PD'\parallel CE$$

于是 $$\frac{BD'}{D'C}=\frac{FP}{PC}=\frac{BF}{CE}$$

从而 $$\mathrm{Rt}\triangle BFD'\backsim\mathrm{Rt}\triangle CED'$$

则 $$\angle FD'B=\angle ED'C$$

故 $$\angle FD'P=\angle ED'P$$

作 $\triangle FPD'$ 的外接圆，由 $\angle FPD'+\angle FBD'>180°$，得点 $B$ 在圆 $FPD'$ 内，于是点 $D$ 在圆 $FPD'$ 外，则

$$\angle FD'P>\angle FDP$$

作 $\triangle EPD'$ 的外接圆，由 $\angle EPD'+\angle ECD'>180°$，得点 $C$ 在圆 $EPD'$ 内，于是点 $D$ 在圆 $EPD'$ 内，则

$$\angle EDP>\angle ED'P$$

因为 $\angle FD'P=\angle ED'P$，所以 $\angle EDP>\angle FDP$，这与已知 $\angle FDP=\angle EDP$ 矛盾。从而 $PD\perp BC$。

① 李康海.由一道平面几何题产生的联想[J].中学教研(数学)，2006(2):37-39.

**证法 2** 如图 21.22,建立坐标系,设 $B(0,b)$、$F(a,b)$、$E(d,0)(d>a)$,$D(0,n)$.则 $CF$ 的方程为

$$y=\frac{b}{a}x$$

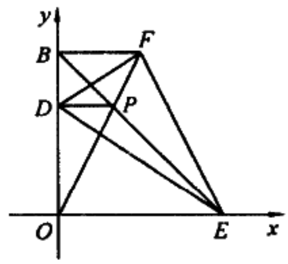



图 21.22

$BE$ 的方程为 $$\frac{x}{d}+\frac{y}{b}=1$$

解得 $$P\left(\frac{da}{d+a},\frac{db}{d+a}\right)$$

又 $k_{FD}=\dfrac{b-n}{a}$,$k_{DE}=-\dfrac{n}{d}$,$k_{DP}=\dfrac{db-(d+a)n}{da}$

于是由 $\angle FDP=\angle EDP$ 得

$$\frac{\frac{b-n}{a}-\frac{db-(d+a)n}{da}}{1+\frac{b-n}{a}\cdot\frac{db-(d+a)n}{da}}=\frac{\frac{db-(d+a)n}{da}+\frac{n}{d}}{1-\frac{n}{d}\cdot\frac{db-(d+a)n}{da}}$$

化简得

$$a^2n[d^2a-dbn+(d+a)n^2]=(d^2b-d^2n)[da^2+db^2-(2bd+ba)n+(d+a)n^2]$$



则 $$(a^3+a^2d+ad^2+d^3)n^3-(a^2bd+2abd^2+3bd^3)n^2+(a^3d^2+a^2d^3+ab^2d^2+3b^2d^3)n-bd^3(a^2+b^2)=0$$

即 $$[(d+a)n-db][(a^2+d^2)n^2-2bd^2n+(a^2+b^2)d^2]=0$$

则 $$[(d+a)n-db][(dn-db)^2+a^2n^2+a^2d^2]=0$$

故 $$n=\frac{db}{d+a}$$

因此 $k_{DP}=0$,即 $PD\perp BC$.

*5.将高线 AD 推广为过点 A 的其他线段*①

**推广 12** 如图 21.23,在 $\triangle ABC$ 中,$D$ 为边 $BC$ 上任意一点,从 $D$ 在形内作一条射线 $DP$,使 $\angle BDP=\angle ADC$.$H$ 是 $DP$ 上任意一点,$BH\cap AC=E$,$CH\cap AB=F$.求证:$\angle FDP=\angle EDA$.

**证明** 如图 21.23,设 $CF\cap AD=G$,$CF\cap DE=K$,过 $H$ 作 $BC$ 的平行线交 $DF$、$AD$、$DE$ 分别于 $M$、$N$、$Q$.则

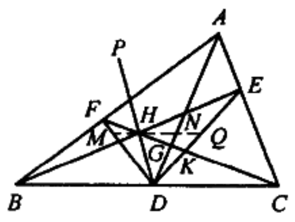



图 21.23

① 万喜人.再谈一道竞赛题的推广[J].现代中学数学,2006(1):27-28.

$$\frac{MH}{DC}=\frac{FH}{FC},\frac{HN}{DC}=\frac{HG}{GC}$$

从而

$$MH=\frac{NH}{HG}\cdot\frac{FH\cdot GC}{FC} \quad ①$$

因直线 $NGD$ 截 $\triangle HKQ$，由梅涅劳斯定理得

$$\frac{QN}{NH}\cdot\frac{HG}{GK}\cdot\frac{KD}{DQ}=1$$

又$\frac{KD}{DQ}=\frac{KC}{CH}$，则

$$QN=\frac{NH}{HG}\cdot\frac{GK\cdot CH}{KC} \quad ②$$

由直线 $AFB$ 截 $\triangle CEH$ 得

$$\frac{HF}{FC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EB}{BH}=1 \quad ③$$

由直线 $BDC$ 截 $\triangle EHK$ 得

$$\frac{KC}{CH}\cdot\frac{HB}{BE}\cdot\frac{ED}{DK}=1 \quad ④$$

由直线 $AGD$ 截 $\triangle CEK$ 得

$$\frac{CG}{GK}\cdot\frac{KD}{DE}\cdot\frac{EA}{AC}=1 \quad ⑤$$

③×④×⑤得 $$\frac{HF}{FC}\cdot\frac{KC}{CH}\cdot\frac{CG}{GK}=1$$

即

$$\frac{HF\cdot CG}{FC}=\frac{GK\cdot CH}{KC} \quad ⑥$$

由①、②、⑥得 $MH=QN$，又

$$\angle HND=\angle NDC=\angle BDH=\angle NHD$$

则 $DH=DN,\angle DHM=\angle DNQ$

所以 $\triangle DHM\cong\triangle DNQ$

故 $\angle FDP=\angle EDA$

用前面(2中)的方法，推广12还可以有进一步的推广.

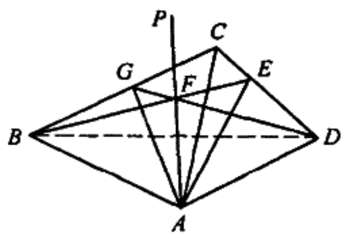


图21.24

**推广13** 如图21.24，任意四边形 $ABCD$ 中，从顶点 $A$ 在形内作射线 $AP$，使 $\angle BAP=\angle DAC$，在 $CD$ 上取一点 $E$，$BE\cap AP=F$，$DF\cap BC=G$.

求证:$\angle CAP=\angle EAC$.

**证明** 如图21.24,联结$BD$,设$\angle BAG=x$,$\angle DAE=y$,将$\angle BAD$简记为$\angle A$.

在$\triangle ABG$中,由正弦定理得

$$\sin x=\frac{BG}{AG}\cdot\sin\angle ABG$$

同理

$$\sin y=\frac{DE}{AE}\cdot\sin\angle ADE$$

于是

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{BG}{DE}\cdot\frac{AE}{AG}\cdot\frac{\sin\angle ABG}{\sin\angle ADE} \quad ①$$

因

$$\frac{BG}{\sin\angle BDF}=\frac{DG}{\sin\angle GBD},\frac{DE}{\sin\angle DBF}=\frac{BE}{\sin\angle EDB}$$

则

$$\frac{BG}{DE}\cdot\frac{\sin\angle DBF}{\sin\angle BDF}=\frac{DG}{BE}\cdot\frac{\sin\angle EDB}{\sin\angle GBD}$$

又

$$\frac{\sin\angle DBF}{\sin\angle BDF}=\frac{DF}{BF},\frac{\sin\angle EDB}{\sin\angle BGD}=\frac{BC}{DC}$$



从而

$$\frac{BG}{DE}=\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DG}{BE}\cdot\frac{BC}{DC} \quad ②$$

因

$$\frac{BF}{\sin\angle BAF}=\frac{AF}{\sin\angle ABF},\frac{DF}{\sin\angle DAF}=\frac{AF}{\sin\angle ADF}$$

则

$$\frac{BF}{DF}=\frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle DAF}\cdot\frac{\sin\angle ADF}{\sin\angle ABF} \quad ③$$

又

$$\frac{DG}{\sin(A-x)}=\frac{AG}{\sin\angle ADF},\frac{BE}{\sin(A-y)}=\frac{AE}{\sin\angle ABF}$$

则

$$\frac{DG}{BE}=\frac{\sin(A-x)}{\sin(A-y)}\cdot\frac{AG}{AE}\cdot\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle ADF} \quad ④$$

把③和④代入②得

$$\frac{BG}{DE}=\frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle DAF}\cdot\frac{\sin(A-x)}{\sin(A-y)}\cdot\frac{AG}{AE}\cdot\frac{BC}{DC} \quad ⑤$$

因

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABG},\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADE}$$

则

$$\frac{BC}{DC}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle ABG} \quad ⑥$$

又　$\angle BAF = \angle DAC, \angle BAC = \angle DAF$

把⑥代入⑤得

$$\frac{BG}{DE} = \frac{\sin(A - x)}{\sin(A - y)} \cdot \frac{AG}{AE} \cdot \frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle ABG} \qquad ⑦$$

把⑦代入①得

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(A - x)}{\sin(A - y)}$$

即　$\sin x \sin(A - y) = \sin y \sin(A - x)$

亦即　$\sin x(\sin A\cos y - \cos A\sin y) = \sin y(\sin A\cos x - \cos A\sin x)$

故　$\tan x = \tan y, x = y$

从而　$\angle GAP = \angle EAC$

推广13对于四边形 $ABCD$ 是凹四边形的情形,同样的结论仍然成立.推广13中,令 $\angle BCD > 180°$,这样我们又可得到下列三角形中的有趣命题.

**命题3**　如图21.25,在 $\triangle ABD$ 中,$C$、$F$ 为形内两点,满足 $\angle BAF = \angle DAC$,设 $BF \cap DC = E, BC \cap DF = G$.求证:$\angle GAF = \angle EAC$.

注意三条直线相互平行可视其共点于无穷远点处,即三条直线相互平行可视为三条直线共点的特殊情形.图21.25中,令 $FG \parallel EC \parallel AD$,又可得如下命题.

**命题4**　如图21.26,已知 $\angle BAF = \angle DAC, FG \parallel EC \parallel AD$.求证:$\angle GAF = \angle EAC$.

这实际上是第44届IMO中国国家集训队培训题,仅是字母标记不同.(参见第22章第1节中例4)



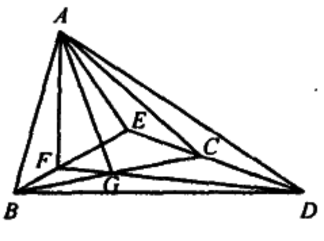



图21.25

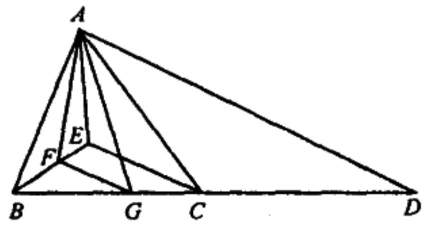



图21.26

## 第 2 节　完全四边形的优美性质(四)

上一节中的有关推广可以归结到完全四边形中来.

**性质 12**　如图 21.27,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,点 $G$ 是对角线 $AD$ 所在直线上的一点,联结 $BG$、$CG$、$EG$、$FG$.若 $\angle AGC=\angle AGE$,则 $\angle AGB=\angle AGF$.

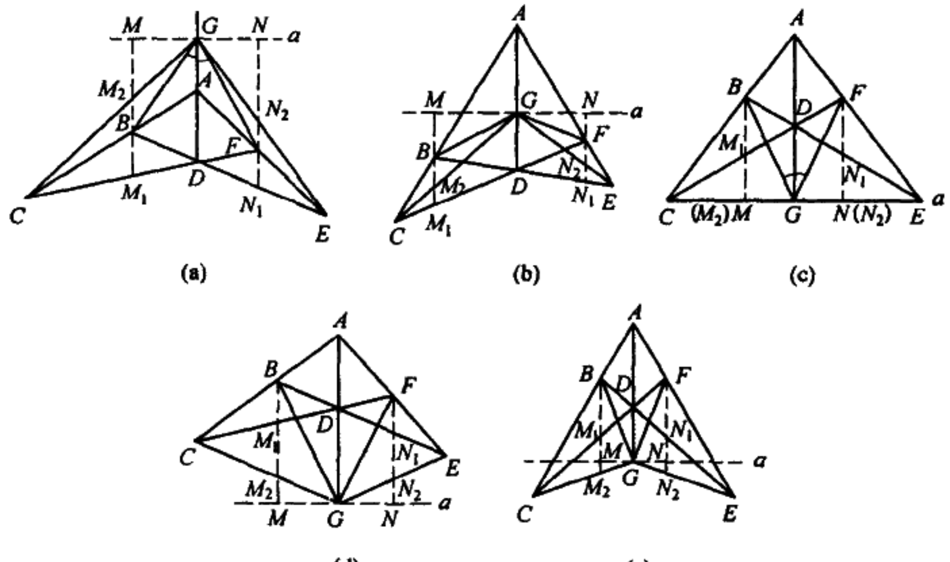



图 21.27

**证明**　如图 21.27 所示的各种情形,过点 $G$ 作直线 $a\perp AD$,过 $B$、$F$ 分别作直线 $BM\perp a$ 于 $M$,交 $CD$ 于 $M_1$,交 $CG$ 于 $M_2$,作直线 $FN\perp a$ 于 $N$,交 $DE$ 于 $N_1$,交 $GE$ 于 $N_2$,则 $BM\parallel AG\parallel FN$.于是由

$$\angle AGC=\angle AGE$$

知

$$\text{Rt}\triangle GMM_2\backsim\text{Rt}\triangle GNN_2$$

从而 $$\frac{MM_2}{NN_2}=\frac{MG}{NG}=\frac{BD}{DN_1}=\frac{M_1B}{N_1F}=\frac{M_1B}{DA}\cdot\frac{DA}{N_1F}=\frac{M_2B}{GA}\cdot\frac{GA}{N_2F}=\frac{M_2B}{N_2F}\quad(*)$$

由等比性质,得

$$\frac{MG}{NG}=\frac{M_2B\pm MM_2}{N_2F\pm NN_2}=\frac{BM}{FN}$$

所以

$$\text{Rt}\triangle MBG\backsim\text{Rt}\triangle NFG$$

即有

$$\angle BGM=\angle FGN$$

故

$$\angle AGB=\angle AGF$$

**注**　当 $M_2$ 与 $M$ 重合，$N_2$ 与 $N$ 重合时，式（*）变为

$$\frac{MG}{NG}=\frac{BD}{DN_1}=\frac{M_1B}{N_1F}=\frac{M_1B}{DA}\cdot\frac{DA}{N_1F}=\frac{MB}{GA}\cdot\frac{GA}{NF}=\frac{MB}{NF}$$

由此，即知 Rt$\triangle MBG\backsim$Rt$\triangle NFG$.

**性质13**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，对角线 $AD$ 所在直线交对角线 $CE$ 于 $G$，则 $\angle BGA=\angle AGF$ 的充要条件是 $AD\perp CE$.

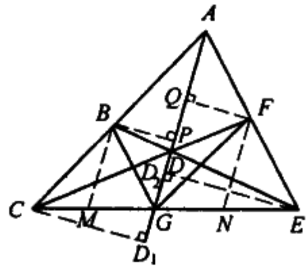


图21.28

**证法1**　必要性：过 $B$ 作 $BM\parallel AG$ 交 $CE$ 于 $M$，过 $F$ 作 $FN\parallel AD$ 交 $CE$ 于 $N$，作 $BP\perp AD$ 于 $P$，$FQ\perp AD$ 于 $Q$，$CD_1\perp$ 直线 $AG$ 于 $D_1$，$ED_2\perp$ 直线 $AG$ 于 $D_2$，则由 $\angle BGA=\angle AGF$，知 Rt$\triangle BGP\backsim$Rt$\triangle FGQ$，有

$$\frac{BP}{QF}=\frac{BG}{FG}\qquad ①$$

由 $BM\parallel AG\parallel FN$，有

$$\frac{BM}{FN}=\frac{BM}{AG}\cdot\frac{AG}{FN}=\frac{CB}{CA}\cdot\frac{AE}{FE}\qquad ②$$

由 $BP\parallel CD_1$，$QF\parallel D_2E$，有

$$\frac{BP}{QF}=\frac{\frac{AB}{AC}\cdot CD_1}{\frac{AF}{AE}\cdot D_2E}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AE}{AF}\cdot\frac{CD_1}{D_2E}\qquad ③$$

又对 $\triangle ACE$ 及点 $D$，由塞瓦定理，有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1\qquad ④$$

由 $CD_1\parallel D_2E$，知

$$\frac{CG}{GE}=\frac{CD_1}{D_2E}\qquad ⑤$$

由③÷②并注意④、⑤，得

$$\frac{FN}{BM}\cdot\frac{BP}{QF}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{EF}{AE}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AE}{AF}\cdot\frac{CD_1}{D_2E}=$$

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD_1}{D_2E}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

即

$$\frac{FN}{BM}=\frac{QF}{BP}=\frac{FG}{BG} \qquad ⑥$$

又由 $BM /\!/ FN$,有
$$\frac{GN}{MG}=\frac{QF}{BP}=\frac{FN}{BM}$$

从而
$$\triangle MGB \backsim \triangle NGF$$

即
$$\angle MGB=\angle NGF$$

故
$$\angle MGA=\angle NGA$$

即
$$AD \perp CE$$

**证法2** 过 $A$ 作 $CE$ 的平行线,与 $GB$ 的延长线交于点 $I$,与 $GF$ 的延长线交于点 $J$.由 $IJ /\!/ CE$,知
$$\frac{AI}{CG}=\frac{AB}{BC},\frac{GE}{AJ}=\frac{EF}{FA}$$

上述两式相乘得
$$\frac{AI}{AJ}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}$$

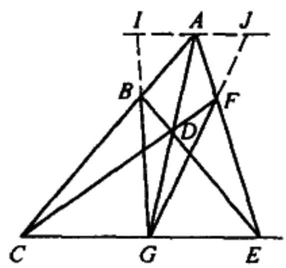


图 21.29



而对 $\triangle ACE$ 及点 $D$,应用塞瓦定理,有
$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CG}{GE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

从而 $AI=AJ$,又 $\angle BGA=\angle AGF$,则 $AG \perp IJ$,故 $AG \perp CE$,即 $AD \perp CE$.

充分性:此即为上一节中的命题1(证略).

**推论** 锐角 $\triangle ABC$ 中,$D$、$E$、$F$ 分别是边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的点,$AD$、$BE$、$CF$ 交于点 $H$,则 $H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心充要条件是 $I$ 为 $\triangle DEF$ 的内心.

**性质14** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,对角线 $AD$ 与 $CE$ 相互垂直,则 $\angle CDE$ 与 $\angle CAE$ 互补的充要条件是 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆.

**证明** 如图21.30,设直线 $AD$ 交 $CE$ 于点 $G$,先证 $\angle CDE$ 与 $\angle CAE$ 互补的充要条件是 $D$ 为 $\triangle ACE$ 的垂心.

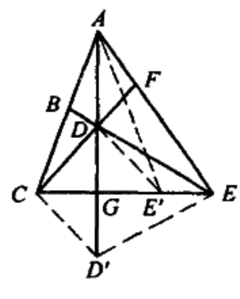


图 21.30

设 $D'$ 是 $D$ 关于 $CE$ 的对称点,联结 $CD'$、$D'E$. 则 $\angle CD'E+\angle CAE=\angle CDE+\angle CAE=180^\circ \Leftrightarrow A$、$C$、$D'$、$E$ 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle CED=\angle CED'=\angle CAD' \Leftrightarrow \angle EBC=\angle AGC=90^\circ \Leftrightarrow D$ 为 $\triangle ACE$ 的垂心.

再证 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆的充要条件是 $D$ 为 $\triangle ACE$ 的垂心.

若 $AC \neq AE$,设 $AC < AE$,在 $GE$ 上取点 $E'$,使 $GE' = GC$,联结 $DE'$、$AE'$,则 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle DE'A = \angle DCA = \angle FCA = \angle DEA \Leftrightarrow A$、$D$、$E'$、$E$ 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle GAE = \angle GE'D = \angle GCD = \angle ECF \Leftrightarrow \angle CFE = \angle AGE = 90^\circ \Leftrightarrow D$ 为 $\triangle ACE$ 的垂心.

故在题设条件下,$\angle CDE + \angle CAE = 180^\circ \Leftrightarrow B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆.

**性质15**　如图21.31,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$P$ 为凸四边形 $ABDF$ 内一点,则 $\angle APB$ 与 $\angle DPF$ 互补的充要条件是 $\angle BPC = \angle EPF$.

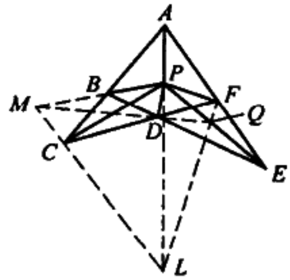



图21.31

**证法1**　必要性:在 $PE$ 上取一点 $Q$,使得 $P$、$D$、$Q$、$F$ 四点共圆.设直线 $FQ$ 与 $AP$ 交于点 $L$,直线 $QD$ 与 $PB$ 交于点 $M$.

对 $\triangle ABE$ 及截线 $FDC$,对 $\triangle EPB$ 及截线 $QDM$,对 $\triangle EAP$ 及截线 $FQL$ 分别应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{EF}{FA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DE} = 1 \qquad ①$$

$$\frac{EQ}{QP} \cdot \frac{PM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} = 1 \qquad ②$$

$$\frac{EF}{FA} \cdot \frac{AL}{LP} \cdot \frac{PQ}{QE} = 1 \qquad ③$$

由①÷②÷③得

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BM}{MP} \cdot \frac{PL}{LA} = 1$$

对 $\triangle ABP$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 $M$、$C$、$L$ 共线.于是

$$\angle MPL = 180^\circ - \angle APM = \angle DPF = \angle LQM$$

从而 $M$、$P$、$Q$、$L$ 共圆.则有

$$\angle PML = \angle PQF = \angle PDF$$

由此即知 $P$、$M$、$C$、$D$ 共圆.故

$$\angle BPC = \angle MPC = \angle MDC = \angle FDQ = \angle QPF = \angle EPF$$

充分性:上述反之稍作整理即证(略).

**证法2**　充分性:如图21.32,过点 $E$ 分别作 $PB$、$PA$ 的平行线分别交直线 $PD$、$PF$ 于 $R$、$S$.过点 $F$ 作 $FK \parallel PC$ 交 $PR$ 于点 $K$.

对 $\triangle DEF$ 及截线 $ABC$ 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FC}{CD}\cdot\frac{DB}{BE}=1$$

从而 $\frac{PF}{PS}=\frac{AF}{AE}=\frac{FC}{CD}\cdot\frac{DB}{BE}=\frac{PK}{PD}\cdot\frac{BD}{BE}=$

$$\frac{PK}{PD}\cdot\frac{PD}{PR}=\frac{PK}{PR}$$

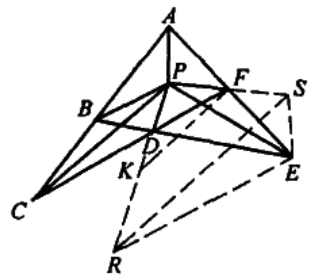



图 21.32

故 $$KF\ /\!/\ RS$$

即 $$\angle SRE=\angle BPC=\angle EPF=\angle EPS$$

于是 $P$、$R$、$E$、$S$ 共圆,从而

$$\angle APB+\angle DPF=\angle RES+\angle RPS=180^\circ$$

必要性:上述反之稍作整理即证(略).

**注** (1) 由 $\angle APB+\angle DPE=180^\circ$,可得 $\angle APD$ 与 $\angle BPF$ 的角平分线互相垂直.令 $\angle APB=\alpha$,$\angle APF=\beta$,$\angle APD$ 与 $\angle BPF$ 的角平分线所成的角为 $\theta$,则 $\theta=\beta+180^\circ-\beta+180^\circ-\alpha-\frac{1}{2}(180^\circ-\beta+180^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}(\beta+180^\circ-\alpha)=90^\circ$.



(2) 此题证法 2 的充分性参见了黄军华文《数学奥林匹克高中训练题(3)》.中等数学,2006(6):14-19.

**性质 16** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,对角线 $AD$ 与 $BF$ 交于点 $P$,过 $P$ 的直线交 $BD$ 于点 $G$,交 $AF$ 于点 $H$,联结 $AG$ 并延长交对角线 $CE$ 于点 $Q$,则 $H$、$D$、$Q$ 三点共线.

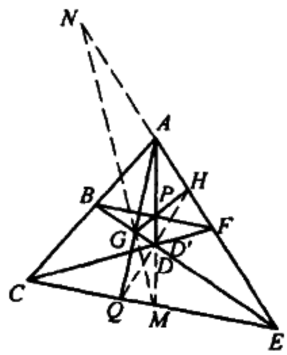



图 21.33

**证明** 如图 21.33,要证 $H$、$D$、$Q$ 三点共线,只须证直线 $AD$、$GE$、$QH$ 共点.延长 $AD$ 交 $CE$ 于 $M$,则又只须证有

$$\frac{QM}{ME}\cdot\frac{EH}{HA}\cdot\frac{AG}{GQ}=1 \qquad ①$$

延长 $EA$ 与直线 $MG$ 交于点 $N$,对 $\triangle AQE$ 及截线 $MGN$,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{QM}{ME}\cdot\frac{EN}{NA}\cdot\frac{AG}{GQ}=1 \qquad ②$$

由 ①、② 知,只须证明有

$$\frac{EH}{HA}=\frac{EN}{NA} \qquad ③$$

设 $QH$ 与 $GE$ 交于点 $D'$，则对完全四边形 $QMED'AG$，应用对象线调和分割的性质，即完全四边形性质 4(第 1 章第 3 节) 知式 ③ 成立. 故结论获证.

**性质 17**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，作 $BG\perp CE$ 于 $G$，作 $FH\perp CE$ 于 $H$，设 $BH$ 与 $FG$ 交于点 $P$，则直线 $DP$ 恒过一定点.

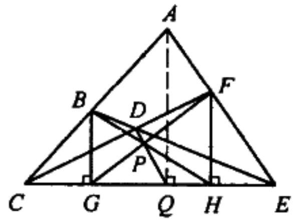


图 21.34

**证明**　如图 21.34，由 $\triangle ACF$ 及截线 $BDE$，应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{FD}{DC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AE}{EF}=1$$

即
$$\frac{FD}{DC}=\frac{BA}{CB}\cdot\frac{EF}{AE}$$

作 $AQ\perp CE$ 于 $Q$，则 $BG\parallel AQ\parallel FH$. 于是

$\triangle PBG\backsim\triangle PHF$，$\triangle BCG\backsim\triangle ACQ$，$\triangle EFH\backsim\triangle EAQ$

注意 $\triangle CFG$，有

$$\frac{FD}{DC}\cdot\frac{CQ}{QG}\cdot\frac{GP}{PF}=\left(\frac{BA}{CB}\cdot\frac{EF}{AE}\right)\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BG}{FH}=\frac{AC}{AE}\cdot\frac{BG}{CB}\cdot\frac{EF}{FH}=$$
$$\frac{AC}{AE}\cdot\frac{AQ}{CB}\cdot\frac{AE}{AQ}=1$$



根据梅涅劳斯定理的逆定理，知 $D$、$P$、$Q$ 三点共线，即直线 $DP$ 通过定点 $Q$.

**注**　当点 $D$ 在 $AQ$ 上时，有点 $P$ 在 $AQ$ 上，即为第 18 章第 1 节中性质 7.

**性质 18**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，过 $B$、$F$ 作与对角线 $AD$ 平行的线分别交对角线 $CE$ 于 $G$、$H$，交 $CD$ 于 $M$、交 $DE$ 于 $N$. 设 $ME$ 与 $CN$ 交于点 $R$，则点 $R$ 在直线 $AD$ 上.

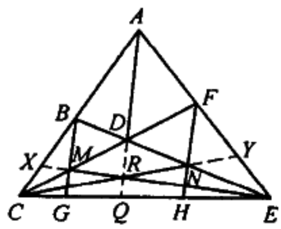


图 21.35

**证明**　如图 21.35，延长 $AD$ 交 $CE$ 于点 $Q$，延长 $EM$ 交 $AC$ 于 $X$，延长 $CN$ 交 $AE$ 于 $Y$.

对 $\triangle ABE$ 及截线 $YNC$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{EY}{YA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BN}{NE}=1$$

则

$$\frac{EY}{YA}=\frac{CB}{AC}\cdot\frac{NE}{BN}=\frac{CG}{CQ}\cdot\frac{HE}{HG}\qquad①$$

对 $\triangle ACF$ 及截线 $XME$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CM}{MF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$$

则

$$\frac{AX}{XC}=\frac{MF}{CM}\cdot\frac{EA}{FE}=\frac{HG}{CG}\cdot\frac{QE}{HE} \quad ②$$

由①、②得

$$\frac{EY}{YA}\cdot\frac{AX}{XC}=\frac{QE}{CQ}$$

即

$$\frac{EY}{YA}\cdot\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CQ}{QE}=1$$

对 $\triangle EAC$ 应用塞瓦定理的逆定理,知 $CY$、$EX$、$AQ$ 共点于 $R$,故 $R$ 在直线 $AD$ 上.

完全类似地,可证得如下结论:如图21.36所示.

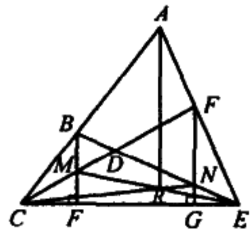


图21.36

**性质19** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,作 $BF\perp CE$ 于点 $F$,且交 $CD$ 于 $M$,作 $FG\perp CE$ 于点 $G$,且交 $BE$ 于 $N$.设 $CN$ 与 $EM$ 交于点 $R$,则 $AR\perp CE$.

**性质20** 过完全四边形 $ABCDEF$ 的顶点 $A$ 的直线交 $BF$ 于 $M$,交 $CE$ 于 $N$,交 $BD$ 于 $G$,交 $CD$ 于 $H$,则



$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{AH}$$

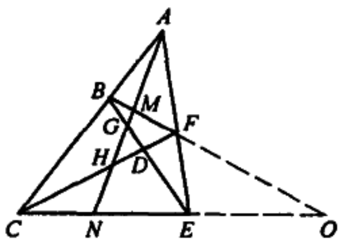


图21.37

**证明** 如图21.37,设 $CE$ 与 $BF$ 的延长线交于点 $O$(当 $CE \not\parallel BF$ 时).$\triangle ACN$ 和 $\triangle AEN$ 均被直线 $BO$ 所截,由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{CB}{BA}=\frac{MN}{AM}\cdot\frac{OC}{NO} \quad ①$$

$$\frac{EF}{FA}=\frac{MN}{AM}\cdot\frac{OE}{NO} \quad ②$$

由①$\cdot NE$+②$\cdot CN$,得

$$NE\cdot\frac{CB}{BA}+CN\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{MN}{AM}\cdot\frac{OC\cdot NE+OE\cdot CN}{NO} \quad ③$$

注意到直线上的托勒密定理,有

$$OC\cdot NE+OE\cdot CN=CE\cdot NO$$

则式③变为

$$NE\cdot\frac{CB}{BA}+CN\cdot\frac{EF}{FA}=CE\cdot\frac{MN}{AM} \quad ④$$

又由直线 $CF$ 截 $\triangle EAN$ 和直线 $BE$ 截 $\triangle ACN$,应用梅涅劳斯定理,有

$$CE \cdot \frac{NH}{HA} = CN \cdot \frac{FE}{AF}$$

$$CE \cdot \frac{NG}{GA} = NE \cdot \frac{BC}{AB}$$

将上述两式代入④得

$$\frac{NH}{HA} + \frac{NG}{GA} = \frac{MN}{AM}$$

即有
$$\frac{AN - AH}{AH} + \frac{AN - AG}{AG} = \frac{AN - AM}{AM}$$

故有
$$\frac{1}{AG} + \frac{1}{AH} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

当 $CE$ 与 $BF$ 平行时，结论仍成立(证略)．

注　特别地，当 $G$、$H$ 均与点 $D$ 重合时，有

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AD}$$

即 $M$、$N$ 调和分割 $AD$，此即为第 1 章第 3 节的性质 4．



性质 21　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，对角线 $AD$ 所在直线交 $BF$ 于 $M$，交 $CE$ 于 $N$，则

$$MD \leqslant (3 - 2\sqrt{2})AN$$

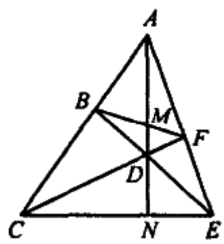


图 21.38

证明　如图 21.38，令 $\frac{CN}{NE} = m$，$\frac{EF}{FA} = n$，$\frac{AB}{BC} = p$，对 $\triangle ACE$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理，有

$$\frac{CN}{NE} \cdot \frac{EF}{FA} \cdot \frac{AB}{BC} = m \cdot n \cdot p = 1$$

对 $\triangle ANE$ 及截线 $CDF$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{EF}{FA} \cdot \frac{AD}{DN} \cdot \frac{NC}{CE} = 1$$

注意到 $\frac{NC}{CE} = \frac{m}{m+1}$，则

$$n \cdot \frac{AD}{DN} \cdot \frac{m}{m+1} = 1$$

即
$$\frac{AD}{DN} = \frac{m+1}{mn}$$

故
$$\frac{AD}{AN} = \frac{m+1}{mn+m+1}$$

又对 $\triangle CEF$ 及截线 $ADN$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{CN}{NE}\cdot\frac{EA}{AF}\cdot\frac{FD}{DC}=1$$

而
$$\frac{EA}{AF}=n+1$$

则
$$\frac{CD}{DF}=mn+m$$

故
$$\frac{CF}{FD}=mn+m+1$$

再对 $\triangle ACD$ 及截线 $BMF$ 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DM}{MA}=1$$

即有
$$\frac{DM}{MA}=\frac{1}{p(mn+m+1)}=\frac{1}{mp+p+1}$$

故
$$\frac{DM}{AD}=\frac{1}{mp+p+2}$$

于是
$$\frac{MD}{AN}=\frac{MD}{AD}\cdot\frac{AD}{AN}=\frac{1}{mp+p+2}\cdot\frac{m+1}{mn+m+1}=$$
$$\frac{1}{p(m+1)+2}\cdot\frac{1}{\frac{mn}{m+1}+1}=$$
$$\frac{1}{1+\frac{2mn}{m+1}+p(m+1)+2}\leqslant\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$



故
$$MD\leqslant(3-2\sqrt{2})AN$$

其中等号当且仅当$\frac{2mn}{m+1}=p(m+1)$即$p(m+1)=\sqrt{2}$时取得.

**性质22** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$H$、$G$ 是对角线 $AD$ 所在直线上的点.设直线 $HB$ 与直线 $CG$ 交于点 $I$,直线 $HF$ 与直线 $GE$ 交于点 $J$.则 $BJ$ 与 $FI$ 的交点 $P$ 在直线 $AD$ 上,直线 $CJ$ 与直线 $EI$ 的交点 $Q$ 在直线 $AD$ 上.

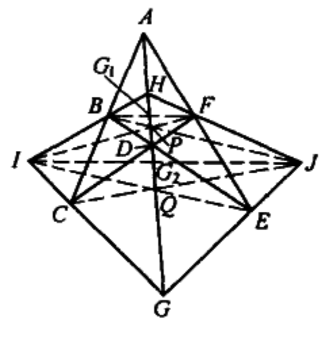



图 21.39

**证明** 如图 21.39,设 $BF$ 交 $AD$ 于 $G_1$,对 $\triangle ABF$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理,有

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FG_1}{G_1B}=1 \quad ①$$

对 $\triangle AHF$ 及截线 $GEJ$,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{HJ}{JF}\cdot\frac{FE}{EA}\cdot\frac{AG}{GH}=1 \quad ②$$

对$\triangle ABH$及截线$GCI$,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BI}{IH}\cdot\frac{HG}{GA}\cdot\frac{AC}{CB}=1 \quad ③$$

由①、②、③三式相乘得

$$\frac{BI}{IH}\cdot\frac{HJ}{JF}\cdot\frac{FG_1}{G_1B}=1$$

对$\triangle BHF$应用塞瓦定理的逆定理,知$BJ$、$FI$、$AD$三直线共点$P$,即证$P$在$AD$上.

设$IJ$交直线$AD$于$G_2$,对$\triangle HIJ$及点$P$应用塞瓦定理,有

$$\frac{HB}{BI}\cdot\frac{IG_2}{G_2J}\cdot\frac{JF}{FH}=1 \quad ④$$

对$\triangle HIG$及截线$CBA$,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{GC}{CI}\cdot\frac{IB}{BH}\cdot\frac{HA}{AG}=1 \quad ⑤$$

对$\triangle HJG$及截线$EFA$,应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{JE}{EG}\cdot\frac{GA}{AH}\cdot\frac{HF}{FJ} \quad ⑥$$



由④、⑤、⑥三式相乘得

$$\frac{GC}{CI}\cdot\frac{IG_2}{G_2J}\cdot\frac{JE}{EG}=1$$

对$\triangle GJI$应用塞瓦定理的逆定理,知$CJ$、$EI$、$AD$三直线共点$Q$,即证$Q$在$AD$上.

**性质23**　在完全四边形$ABCDEF$中,$P$、$P_1$、$P_2$分别为线段$AD$、$CD$、$DE$上的点(异于端点),$BP_1$、$BD$分别与$PE$交于点$P_3$、$P_5$,$FP_2$、$FD$分别与$PE$交于点$P_4$、$P_6$.设$BP_6$与$FP_3$交于点$A_1$,$BP_4$与$FP_5$交于点$A_2$,$CP_4$与$EP_3$交于点$A_3$,$CP_2$与$EP_1$交于点$A_4$,$BP_5$与$FP_2$的延长线交于点$G$.则

(1)$A_1$在直线$AD$上;

(2)$A_2\in AD\Leftrightarrow A_3\in AD\Leftrightarrow A_4\in AD\Leftrightarrow G\in AD$.

**证明**　如图21.40,设直线$AD$分别交$BF$、$CE$于$T_1$、$T_2$.

(1)对$\triangle ABF$及点应用塞瓦定理,有

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FT_1}{T_1B}=1 \quad ①$$

对$\triangle ABD$及截线$CP$应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BP_5}{P_5D}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AC}{CB}=1\qquad ②$$

对 $\triangle ADF$ 及截线 $PE$ 应用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{DP_6}{P_6F}\cdot\frac{FE}{EA}\cdot\frac{AP}{PD}=1\qquad ③$$

由 ①、②、③ 相乘得

$$\frac{BP_5}{P_5D}\cdot\frac{DP_6}{P_6F}\cdot\frac{FT_1}{T_1B}=1\qquad ④$$

从而对 $\triangle BDF$ 应用塞瓦定理的逆定理,知 $BP_6$、$FP_5$、$AD$ 三线共点,故 $A_1\in AD$.

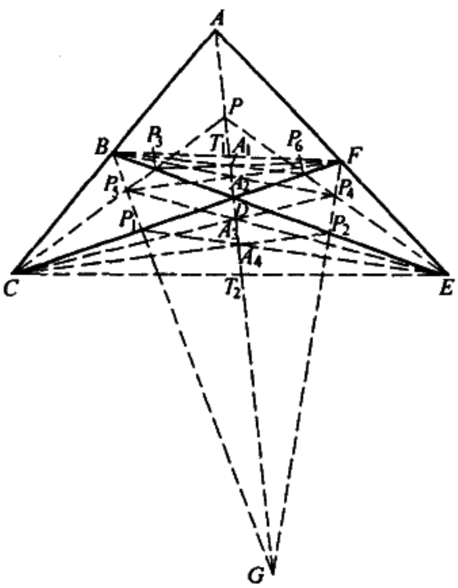



图 21.40

(2)(i) 若 $G\in AD$,对 $\triangle ACD$ 及截线 $BP_1$、对 $\triangle ADE$ 及截线 $FP_2$ 分别应用梅涅劳斯定理有



$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CP_1}{P_1D}\cdot\frac{DG}{GA}=1$$

$$\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DP_2}{P_2E}=1$$

故

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{EP_2}{P_2D}\cdot\frac{DP_1}{P_1C}\qquad ⑤$$

同理,对 $\triangle ACP$ 及截线 $BP_3$、对 $\triangle APE$ 及截线 $FP_4$ 有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{EP_4}{P_4P}\cdot\frac{PP_3}{P_3C}\qquad ⑥$$

对 $\triangle ACE$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CT_2}{T_2E}\cdot\frac{EF}{FA}=1\qquad ⑦$$

联立 ⑤、⑥、⑦,得

$$\frac{CT_2}{T_2E}\cdot\frac{EP_2}{P_2D}\cdot\frac{DP_1}{P_1C}=\frac{CT_2}{TE}\cdot\frac{EP_4}{P_4P}\cdot\frac{PP_3}{P_3C}=1$$

对 $\triangle CED$、$\triangle CEP$ 分别应用塞瓦定理的逆定理,知 $CP_4$、$EP_3$、$PT_2$ 三线共点,$CP_2$、$EP_1$、$DT_2$ 三线共点.故 $A_3\in AD$,$A_4\in AD$.

对 $\triangle BDG$ 及截线 $P_3P_5$、对 $\triangle DFG$ 及截线 $P_4P_3$ 分别应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{BP_5}{P_5D}\cdot\frac{DP}{PG}\cdot\frac{GP_3}{P_3B}=1,\frac{DP_6}{P_6F}\cdot\frac{FP_4}{P_4G}\cdot\frac{GP}{PD}=1$$

即

$$\frac{BP_5}{P_5D}\cdot\frac{DP_6}{P_6F}=\frac{BP_3}{P_3G}\cdot\frac{GP_4}{P_4F} \tag{8}$$

由 ④ 可得

$$\frac{BP_3}{P_3G}\cdot\frac{GP_4}{P_4F}\cdot\frac{FT_1}{T_1B}=1$$

对 $\triangle BGF$ 应用塞瓦定理的逆定理，知 $BP_4$、$FP_3$、$T_1G$ 三线共点. 故 $A_2\in AD$.

(ii) 若 $A_2\in AD$，设直线 $GA_2$ 交 $BF$ 于 $T'_1$，则由 $BP_4$、$FP_3$、$T'_1G$ 三线共点，从而有

$$\frac{BP_3}{P_3G}\cdot\frac{GP_4}{P_4F}\cdot\frac{FT'_1}{T'_1B}=1 \tag{9}$$

对 $\triangle BDG$ 及截线 $P_3P_5$、对 $\triangle DFG$ 及截线 $P_4P_3$ 分别应用梅涅劳斯定理，有式⑧.

考虑到 ⑧、⑨ 及 $A_1\in AD$，有式 ④，有

$$\frac{FT'_1}{T'_1B}=\frac{FT_1}{T_1B}$$

从而 $T'_1$ 与 $T_1$ 重合.

于是，直线 $T_1A_2G$ 与直线 $AT_1A_2$ 重合，故 $G\in AD$.

若 $A_3\in AD$，由 $CP_4$、$EP_3$、$AD$ 三线共点，有

$$\frac{CT_2}{T_2E}\cdot\frac{EP_4}{P_4P}\cdot\frac{PP_3}{P_3C}=1 \tag{10}$$

由 ⑩ 和 ⑦ 有式 ⑥.

若 $A_4\in AD$，由 $CP_2$、$EP_1$、$AD$ 三线共点，有

$$\frac{CT_2}{T_2E}\cdot\frac{EP_2}{P_2D}\cdot\frac{DP_1}{P_1C}=1 \tag{11}$$

由式 ⑪ 与 ⑦ 有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{EP_2}{P_2D}\cdot\frac{DP_1}{P_1C} \tag{12}$$

设直线 $BP_1$ 与直线 $AD$ 交于 $G_1$，直线 $FP_2$ 与直线 $AD$ 交于点 $G_2$.

对 $\triangle ACD$ 及截线 $BP_1$，对 $\triangle ADE$ 及截线 $FP_2$，对 $\triangle ACP$ 及截线 $BP_3$，对 $\triangle APE$ 及截线 $FP_4$ 分别应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CP_1}{P_1D}\cdot\frac{DG_1}{G_1A}=1,\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AG_2}{G_2D}\cdot\frac{DP_2}{P_2E}=1$$

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CP_3}{P_3P}\cdot\frac{PG_1}{G_1A}=1,\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AG_2}{G_2P}\cdot\frac{PP_4}{P_4E}=1$$

于是由上述前两式及式 ⑫,有

$$\frac{AG_1}{G_1D}=\frac{AG_2}{G_2D}$$

由上述后两式及式 ⑥ 亦有

$$\frac{AG_1}{G_1P}=\frac{AG_2}{G_2P}$$

从而 $G_1$ 与 $G_2$ 重合,即重合于点 $G$,故 $G\in AD$.

**性质 24** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$G$ 为 $AF$ 上一点,直线 $CG$ 与 $AD$ 交于点 $H$,直线 $HF$ 与 $DG$ 交于点 $P$,直线 $BP$ 交 $CG$ 于点 $T$,交 $AF$ 于 $Q$,直线 $CQ$ 交 $BE$ 于点 $S$,则 $A$、$T$、$S$ 三点共线.



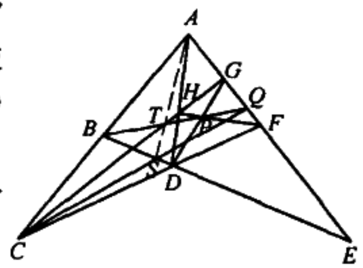


图 21.41

**证明** 如图 21.41,应用梅涅劳斯定理,对 $\triangle DEF$ 及截线 $ABC$,有

$$\frac{EB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FA}{AE}=1$$

对 $\triangle ADG$ 及截线 $HPF$,有

$$\frac{DP}{PG}\cdot\frac{GF}{FA}\cdot\frac{AH}{HD}=1$$

对 $\triangle ADF$ 及截线 $CHG$,有

$$\frac{AG}{GF}\cdot\frac{FC}{CD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

对 $\triangle DEG$ 及截线 $BPQ$,有

$$\frac{GP}{PD}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EQ}{QG}=1$$

对 $\triangle ACG$ 及截线 $QTB$,有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CT}{TG}\cdot\frac{GQ}{QA}=1$$

对 $\triangle ACQ$ 及截线 $BSE$,有

$$\frac{QS}{SC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AE}{EQ}=1$$

以上六式相乘,得

$$\frac{QS}{SC}\cdot\frac{CT}{TG}\cdot\frac{GA}{AQ}=1$$

对 $\triangle GCQ$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 $A$、$T$、$S$ 三点共线.

**注**　由如上性质 24 可简洁推证第 23 章试题 C 或其第 2 节中的例 7:

如图 21.42,设 $OP$ 的延长线交 $AE$ 于点 $Q$,$OP$ 交 $BF$ 于 $T$,联结 $QF$ 交 $OD$ 于点 $S$.

由性质 24,知 $E$、$T$、$S$ 三点共线. 从而 $\angle BOP=\angle DOP$,同理 $\angle COP=\angle AOP$,故 $\angle BOC=\angle AOD$.

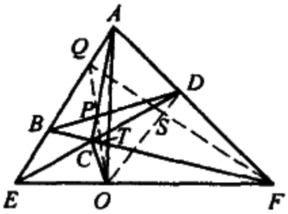



图 21.42

## 第 3 节　梅涅劳斯定理的第二角元形式①

我们在第 1 章第 1 节中介绍了角元形式的梅涅劳斯定理. 这里再介绍角元的另一种形式. 217

**定理**　设 $D$、$E$、$F$ 分别是 $\triangle ABC$ 三边 $BC$、$CA$、$AB$ 所在直线上的点,点 $O$ 不在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上,用 $\measuredangle$ 表有向角(一般规定逆时针方向为正,顺时针方向为负),则 $D$、$E$、$F$ 共线的充要条件是

$$\frac{\sin\measuredangle BOD}{\sin\measuredangle DOC}\cdot\frac{\sin\measuredangle COE}{\sin\measuredangle EOA}\cdot\frac{\sin\measuredangle AOF}{\sin\measuredangle FOB}=-1$$

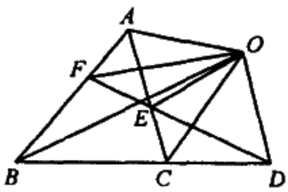



图 21.43

**证明**　如图 21.43,并注意到

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\frac{\overrightarrow{S_{\triangle BOD}}}{\overrightarrow{S_{\triangle DOC}}}=\frac{\frac{1}{2}OB\cdot OD\sin\measuredangle BOD}{\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\measuredangle DOC}=\frac{OB\sin\measuredangle BOD}{OC\sin\measuredangle DOC}$$

$$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\frac{OC\sin\measuredangle COE}{OA\sin\measuredangle EOA}$$

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{OA\sin\measuredangle AOF}{OB\sin\measuredangle EOA}$$

由梅涅劳斯定理,知

① 萧振纲. Menelaus 定理的第二角元形式[J]. 中学数学研究,2006(2):4-6.

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=-1$$

从而
$$\frac{\sin\measuredangle BOD}{\sin\measuredangle DOC}\cdot\frac{\sin\measuredangle COE}{\sin\measuredangle EOA}\cdot\frac{\sin\measuredangle AOF}{\sin\measuredangle FOB}=-1$$

如上定理适应于处理那些过某定点的直线与其他直线的交点共线的问题，或可以转化为三点共线的问题.

**例1** 设 $\triangle ABC$ 是非直角三角形，$AD$、$BE$、$CF$ 为三边上的高，$D$、$E$、$F$ 为垂足，过 $\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 分别作边 $BC$、$CA$、$AB$ 的平行线与直线 $EF$、$FD$、$DE$ 对应地交于点 $P$、$Q$、$R$. 求证：$P$、$Q$、$R$ 共线.

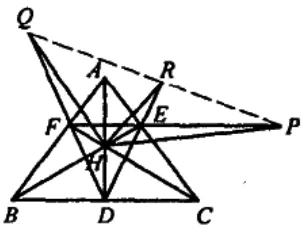



图 21.44

**证明** 如图 21.44，显然有

$$\measuredangle EHP=\measuredangle HBC,\measuredangle PHF=\measuredangle HCB$$
$$\measuredangle FHQ=\measuredangle HCA,\measuredangle QHD=\measuredangle HAC$$
$$\measuredangle DHR=\measuredangle HAB,\measuredangle RHE=\measuredangle HBA$$

从而等于

$$\frac{\sin\measuredangle EHP}{\sin\measuredangle PHF}\cdot\frac{\sin\measuredangle FHQ}{\sin\measuredangle QHD}\cdot\frac{\sin\measuredangle DHR}{\sin\measuredangle RHE}=$$
$$\frac{\sin\measuredangle HBC}{\sin\measuredangle HCB}\cdot\frac{\sin\measuredangle HCA}{\sin\measuredangle HAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle HAB}{\sin\measuredangle HBA}=$$
$$-\frac{\sin\measuredangle HBC}{\sin\measuredangle BCH}\cdot\frac{\sin\measuredangle HCA}{\sin\measuredangle CAH}\cdot\frac{\sin\measuredangle HAB}{\sin\measuredangle ABH}=-\frac{HC}{HB}\cdot\frac{HA}{HC}\cdot\frac{HB}{HA}=-1$$

因 $\triangle ABC$ 是非直角三角形，垂心 $H$ 不在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上，故由上述定理知 $P$、$Q$、$R$ 共线.

**例2** 设 $E$、$F$ 分别为四边形 $ABCD$ 的边 $BC$、$CD$ 上的点，$BF$ 与 $DE$ 交于点 $P$. 求证：若 $\angle BAE=\angle FAD$，则 $\angle BAP=\angle CAD$.

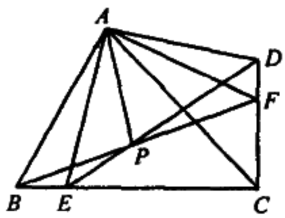



图 21.45

**证明** 如图 21.45，只须证明：当 $AF$ 关于 $\triangle BAD$ 的等角线交 $DE$ 于点 $P$ 时，$B$、$P$、$F$ 共线即可.

事实上，$B$、$P$、$F$ 分别为 $\triangle CDE$ 三边所在直线上的三点，点 $A$ 不在其三边所在直线上，而 $\measuredangle FAD=-\measuredangle EAB$，$\measuredangle DAP=-\measuredangle BAC$，$\measuredangle PAE=\measuredangle CAF$，故

$$\frac{\sin\measuredangle EAB}{\sin\measuredangle BAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CAF}{\sin\measuredangle FAD}\cdot\frac{\sin\measuredangle DAP}{\sin\measuredangle PAE}=-1$$

于是知 $B$、$P$、$F$ 共线，即有 $\angle BAP=\angle CAD$.

**注**　当 $AC$ 平分 $\angle BAD$ 时，即为 1999 年全国高中联赛题.

**例 3**　在筝形 $ABCD$ 中，$AB = AD$，$BC = CD$. 过 $BD$ 上一点 $P$ 作一条直线分别交 $AD$、$BC$ 于 $E$、$F$，再过点 $P$ 任作一直线分别交 $AB$、$CD$ 于 $G$、$H$，设 $GF$ 与 $EH$ 分别交 $BD$ 于 $I$、$J$. 求证：$\frac{PI}{PB} = \frac{PJ}{PD}$.

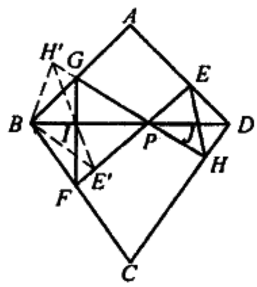



图 21.46

**证明**　如图 21.46，过 $B$ 作 $AD$ 的平行线交直线 $EF$ 于 $E'$，再过 $B$ 作 $CD$ 的平行线交直线 $GH$ 于 $H'$，则

$$\measuredangle E'BP = \measuredangle EDP = \measuredangle PBG$$

$$\measuredangle H'BP = \measuredangle HDP = \measuredangle PBF$$

进而　$$\measuredangle H'BG = \measuredangle H'BP - \measuredangle GBP = \measuredangle PBF - \measuredangle PBE' = \measuredangle E'BF$$

所以
$$\frac{\sin \measuredangle PBH'}{\sin \measuredangle H'BG} \cdot \frac{\sin \measuredangle GBI}{\sin \measuredangle IBF} \cdot \frac{\sin \measuredangle FBE'}{\sin \measuredangle E'BP} = \frac{\sin \measuredangle FBP}{\sin \measuredangle E'BF} \cdot \frac{\sin \measuredangle GBP}{\sin \measuredangle PBF} \cdot \frac{\sin \measuredangle FBE'}{\sin \measuredangle PBG} = -1$$

因 $H'$、$I$、$E'$ 分别为 $\triangle PGF$ 三边所在直线上的点，且点 $B$ 不在 $\triangle PGF$ 三边所在直线上. 对 $\triangle PGF$ 及点 $B$ 应用角元形式的梅涅劳斯定理，知 $H'$、$I$、$E'$ 三点共线.

于是，由 $\triangle PBE' \backsim \triangle PDE$，$\triangle PH'B \backsim \triangle PHD$，有 $E'H' \parallel EH$. 因此

$$\frac{PI}{PJ} = \frac{PE'}{PE} = \frac{PB}{PD}$$

故
$$\frac{PI}{PB} = \frac{PI}{PD}$$

**注**　当点 $P$ 为 $AC$ 与 $BD$ 的交点时，本例为第 31 届 IMO 中国代表队选拔赛题.

# 第22章　2000~2001年度试题的诠释

**试题A**　如图22.1,在锐角$\triangle ABC$的边$BC$上有两点$E$、$F$,满足$\angle BAE=\angle CAF$,作$FM\perp AB$,$FN\perp AC$($M$、$N$是垂足),延长$AE$交$\triangle ABC$的外接圆于点$D$.求证:四边形$AMDN$与$\triangle ABC$的面积相等.

**证法1**　联结$MN$、$BD$.因$FM\perp AB$,$FN\perp AC$,则$A$、$M$、$F$、$N$四点共圆.于是

$$\angle AMN=\angle AFN$$

$$\angle AMN+\angle BAE=\angle AFN+\angle CAF=90^\circ$$

即
$$MN\perp AD$$



故
$$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot MN$$

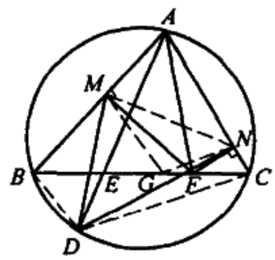



图22.1

因$\angle CAF=\angle DAB$,$\angle ACF=\angle ADB$,则$\triangle AFC\backsim\triangle ABD$,即$\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AD}$,从而

$$AB\cdot AC=AD\cdot AF$$

又因$AF$是过$A$、$M$、$F$、$N$四点的圆的直径,则

$$\frac{MN}{\sin\angle BAC}=AF$$

即
$$AF\sin\angle BAC=MN$$

故
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AD\cdot MN=S_{AMDN}$$

**证法2**　(由福建师大肖石给出)如图22.1,联结$BD$、$CD$,若$AF\perp BC$,则易知$MF\parallel BD$、$NF\parallel CD$,从而$S_{\triangle DFM}=S_{\triangle BFM}$,$S_{\triangle DFN}=S_{\triangle CFN}$,所以$S_{\triangle ABC}=S_{AMDN}$.

若$AF$不垂直于$BC$,则过$M$作$MG\parallel BD$交$BC$于$G$,联结$NG$,则

$$\angle MGB=\angle DBC=\angle DAC=\angle BAF$$

从而 $A$、$M$、$G$、$F$ 四点共圆.

又 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆，则 $A$、$M$、$G$、$F$、$N$ 五点共圆，即

$$\angle NGF = \angle NAF = \angle BAD = \angle BCD$$

从而 $$GN \parallel CD$$

（当点 $G$ 位于点 $F$ 右侧时类似可证）

于是 $$S_{\triangle DGM} = S_{\triangle BGM}, S_{\triangle DGN} = S_{\triangle CGN}$$

故 $$S_{\triangle ABC} = S_{AMDN}$$

以下3种证法由湖北孝感中学叶迎东给出.①

**证法3**　如图22.2，设 $AG$ 为圆的直径，联结 $BG$、$CG$、$MG$、$NG$、$FG$、$DG$、$MN$，则 $BG \perp AB$，$CG \perp AC$，$DG \perp AD$.又因 $FM \perp AB$，$FN \perp AC$，则

$$BG \parallel FM, CG \parallel FN$$

从而 $$S_{\triangle BMF} = S_{\triangle GMF}, S_{\triangle CFN} = S_{\triangle GFN}$$

于是 $$S_{\triangle ABC} = S_{AMFN} + S_{\triangle BMF} + S_{\triangle CNF} = S_{AMFN} + S_{\triangle GMF} + S_{\triangle GFN} = S_{AMGN}$$

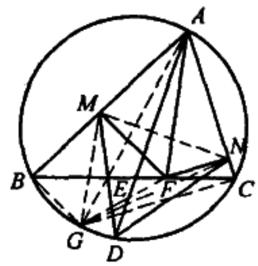


图22.2

而由 $AB \perp FM$，$AC \perp FN$ 得 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆.则

$$\angle FMN = \angle FAN = \angle BAE$$

又因 $FM \perp AB$，则 $MN \perp AD$，而 $DG \perp AD$，即 $DG \parallel MN$，于是

$$S_{\triangle GMN} = S_{\triangle DMN}$$

即 $$S_{AMGN} = S_{AMDN}$$

从而 $$S_{\triangle ABC} = S_{AMDN}$$

**证法4**　如图22.3，联结 $BD$，设 $\angle BAC = \alpha$，$\angle BAE = \angle CAF = \beta$，$\angle EAC = \gamma$，则 $\angle FAB = \gamma$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AFN$ 中，有

$$AM = AF\cos\gamma, AN = AF\cos\beta$$

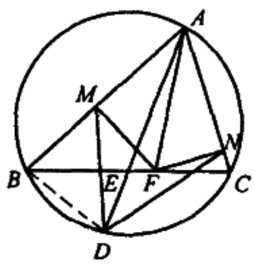


图22.3

因 $$\angle C = \angle ADB, \angle BAE = \angle FAC$$

则 $$\triangle ABD \backsim \triangle AFC$$

① 叶迎东.2000年全国高中数学联赛平面几何题的三种证法[J].数学通讯，2001(2,4):89.

即
$$\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AC}$$
亦即
$$AB\cdot AC=AD\cdot AF$$
从而
$$\begin{aligned}2S_{\triangle ABC}&=AB\cdot AC\sin\alpha=AD\cdot AF\sin\alpha=AD\cdot AF\sin(\beta+\gamma)=\\&AD[(AF\cos\gamma)\sin\beta+(AF\cos\beta)\sin\gamma]=\\&AD[AM\sin\beta+AN\sin\gamma]=2S_{\triangle ADM}+2S_{\triangle ADN}=\\&2S_{AMDN}\end{aligned}$$

**证法5** 如图22.4,过 $A$ 作 $AP\perp BC$ 于 $P$,联结 $BD$、$CD$、$MP$、$NP$.因
$$FM\perp AM,FN\perp AN,FP\perp AP$$
则 $A$、$M$、$F$、$P$、$N$ 都在以 $AF$ 为直径的圆上.即
$$\begin{aligned}\angle MPF&=\angle MAP=\angle BAE+\angle EAF=\\&\angle CAF+\angle EAF=\angle DAC=\\&\angle DBC\end{aligned}$$

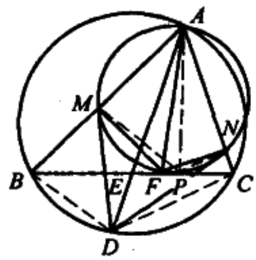


图22.4



从而
$$MP\parallel BD$$
即
$$S_{\triangle BDM}=S_{\triangle BDP}$$
又因
$$\angle CPN=\angle FAN=\angle BAD=\angle BCD$$
则
$$NP\parallel CD$$
即
$$S_{\triangle CDN}=S_{\triangle CDP}$$
故
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{ABDC}-S_{\triangle BDP}-S_{\triangle CDP}=S_{ABDC}-\\&S_{\triangle BDM}-S_{\triangle CDN}=S_{AMDN}\end{aligned}$$

以下3种证法由重庆一中邹发明给出.①

**证法6** 如图22.5,联结 $DB$、$DC$,过 $D$ 作 $DP\perp AB$,$DQ\perp BC$,$DR\perp AC$,垂足分别是 $P$、$Q$、$R$.联结 $PQ$、$QR$.又易知 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆,设该圆交 $BC$ 的另一交点为 $K$,联结 $KM$、$KN$.由作图知 $D$、$C$、$R$、$Q$ 四点共圆,$D$、$P$、$B$、$Q$ 四点共圆.则
$$\begin{aligned}\angle DRQ&=\angle QCD=\angle BCD=\angle BAD=\\&\angle BAE=\angle CAF=\angle NAF=\end{aligned}$$

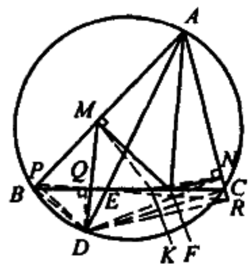


图22.5

① 邹发明.2000年全国高中联赛加试平面几何题的5种证法[J].数学教学通讯,2001(11):48-49.

$$\angle FKN = \angle CKN$$

又 $$\angle RDQ = \angle QCR = \angle KCN$$

所以 $$\triangle KCN \backsim \triangle RDQ$$

所以 $$\frac{KC}{CN} = \frac{RD}{DQ}$$

即

$$KC \cdot DQ = CN \cdot RD \quad ①$$

又 $\angle DPQ = \angle DBQ = \angle DBC = \angle DAC = \angle BAF = \angle MAF = \angle MKB$

又 $$\angle PDQ + \angle PBQ = 180^\circ = \angle PBQ + \angle KBM$$

所以 $$\angle PDQ = \angle KBM$$

所以 $$\triangle KBM \backsim \triangle PDQ$$

所以 $$\frac{KB}{BM} = \frac{PD}{DQ}$$

所以

$$KB \cdot DQ = BM \cdot PD \quad ②$$

①+②得 $$KC \cdot DQ + KB \cdot DQ = CN \cdot RD + BM \cdot PD$$

即 $$BC \cdot DQ = CN \cdot RD + BM \cdot PD$$

所以 $$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle DCN} + S_{\triangle BMD}$$

则 $$S_{\triangle ABC} = S_{AMDN}$$

**证法7**　如图22.6,联结 $MN$、$BD$,易知 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆,且由 $\angle AMN = \angle AFN$ 推证 $AD \perp MN$.

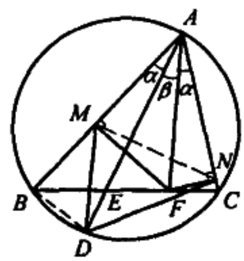


图22.6

设 $\angle BAE = \angle CAF = \alpha$,$\angle EAF = \beta$,有

$$S_{AMDN} = \frac{1}{2} AD \cdot MN$$

由正弦定理(设 $R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径)有

$$AD = 2R\sin(B + \angle DBE) = 2R\sin(B + \alpha + \beta)$$

$$MN = AF\sin(2\alpha + \beta) = \frac{AC}{\sin\angle AFC} \cdot \sin C\sin(2\alpha + \beta) = \frac{AC}{\sin(B + \alpha + \beta)} \cdot \sin C\sin(2\alpha + \beta)$$

所以 $$S_{AMDN} = \frac{1}{2} AD \cdot MN = R \cdot AC\sin C\sin\angle BAC$$

而由正弦定理$\frac{AB}{\sin C}=2R$,得

$$\frac{AB}{2}=R\sin C$$

所以 $$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=S_{\triangle ABC}$$

**证法 8** 如图 22.7,联结 $MN$、$BD$、$CD$.

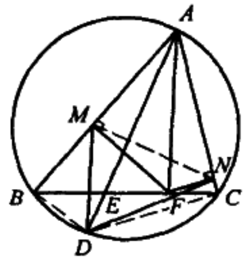


图 22.7

易知 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆.所以

$$\angle NMA=\angle AFN$$

又 $\angle AFN+\angle FAN=90^\circ$,$\angle NAF=\angle MAE$

所以 $$\angle NMA+\angle MAE=90^\circ$$

所以 $$AD\perp MN$$

所以 $$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot MN$$

又 $$\angle FMN=\angle FAN=\angle BAD=\angle BCD$$



$$\angle MNF=\angle BAF=\angle CAD=\angle CBD$$

所以 $$\triangle MFN\backsim\triangle CDB$$

所以 $$\frac{FM}{CD}=\frac{FN}{BD}=\frac{MN}{BC}$$

对四边形 $ABDC$ 由托勒密定理得

$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

于是 $$AB\cdot CD\cdot\frac{FM}{CD}+AC\cdot BD\cdot\frac{FN}{BD}=AD\cdot BC\cdot\frac{MN}{BC}$$

即 $$AB\cdot FM+AC\cdot FN=AD\cdot MN$$

所以 $$\frac{1}{2}AB\cdot FM+\frac{1}{2}AC\cdot FN=\frac{1}{2}AD\cdot MN$$

即 $$S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}AD\cdot MN=S_{AMDN}$$

从而 $$S_{\triangle ABC}=S_{AMDN}$$

**证法 9** (由江西贵溪一中刘飞才、浙江兰溪一中舒林军等给出)设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$,$\angle EAF=\beta$,则

$$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AM\cdot AD\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot AN\sin(\alpha+\beta)=$$

$$\frac{1}{2}AD[AF\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha+AF\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)]=$$

$$\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin(2\alpha+\beta)=\frac{AF}{4R}\cdot AD\cdot BC$$

又
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AF\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}AC\cdot AF\sin\alpha=\frac{AF}{4R}(AB\cdot CD+AC\cdot BD)$$

由托勒密定理 $AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC$,故结论成立.

**证法 10** （由江苏兴化中学姚伟给出）如图22.8,只要证明 $S_{\triangle BMD}+S_{\triangle CND}=S_{\triangle BCD}$.

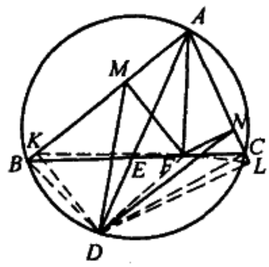


图 22.8

设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$,$\triangle ABC$ 各内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,则

$$AF=\frac{AB\sin B}{\sin(C+\alpha)}=\frac{2R\sin C\sin B}{\sin(C+\alpha)}$$

$$AM=AF\cos(A-\alpha)$$

其中 $R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.则

$$BM=AB-AM=2R\sin C\cdot\frac{\cos B\sin(A-\alpha)}{\sin(C+\alpha)}$$

故
$$S_{\triangle BMD}=\frac{1}{2}BM\cdot BD\sin\angle ABD=2R^2\sin\alpha\sin(A-\alpha)\cos B\sin C$$

同理
$$S_{\triangle CND}=2R^2\sin\alpha\sin(A-\alpha)\cos C\sin B$$

故
$$S_{\triangle BMD}+S_{\triangle CND}=2R^2\sin\alpha\sin(A-\alpha)\sin(B+C)=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha 2R\sin(A-\alpha)\sin A=\frac{1}{2}BD\cdot DC\sin\angle BDC=S_{\triangle BCD}$$

**证法 11** （由江苏兴化张乃贵给出）如图22.8,作 $DK\perp AB$,$DL\perp AC$,垂足分别为 $K$、$L$,则只要证明 $S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FDM}+S_{\triangle FDN}$.利用

$$S_{\triangle FDM}=S_{\triangle FKM},S_{\triangle FDN}=S_{\triangle FLN}$$

只需要证明 $S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCM}=S_{\triangle FKM}+S_{\triangle FLN}$,即

$$FM\cdot BM+FN\cdot CN=FM\cdot MK+FN\cdot NL$$

因此,只需要证明

$$FM\cdot BK=FN\cdot CL$$

由于 $\triangle BKD\backsim\triangle CLD$,所以

$$\frac{BK}{CL}=\frac{DK}{DL}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}=\frac{FN}{FM}$$

故结论成立.

**证法 12** (由陕西永寿中学朱冬茂给出)如图 22.9,作 $DG // MN$,交 $AC$ 的延长线于 $G$,只要证明 $S_{\triangle AMG}=S_{\triangle ABC}$.

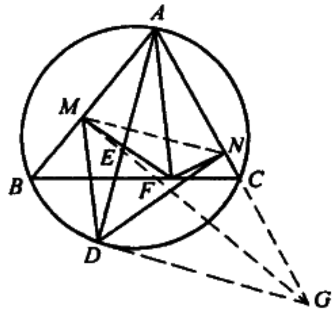


图 22.9

由于 $\angle AGD=\angle ANM=\angle AFM$,所以

$$\triangle AGD\backsim\triangle AFM$$

从而 $$AD\cdot AF=AM\cdot AG$$

又由于 $\triangle ABD\backsim\triangle AFC$,有

$$AD\cdot AF=AB\cdot AC$$

故 $$AM\cdot AG=AB\cdot AC$$

即 $$S_{\triangle AMG}=S_{\triangle ABC}$$



**注** 关于此试题的背景问题:

不妨称此试题为命题 1,据安徽黄全福老师介绍[①],这道题中当 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle A$ 时,即为第 28 届 IMO 中一道试题.

这道试题他是怎样编成的呢?不妨用动态的观点来看图 22.10,视 $AE$、$AF$ 为两条叠合的线段,当点 $D$ 在 $BC$ 弧上运动($AD$ 顺时针)、点 $F$ 在 $BC$ 边上运动($AF$ 逆时针)时,只要满足 $\angle BAE=\angle CAF$,如图 22.10 所示,就可达到两个图形面积相等的目的.当然,这仅仅是个猜想,猜想是不能代替证明的.经过一番认真的探讨,这道题的结论不但能够成立,还可以给出它的许多形态互异、各具特色的证法.并且还可从中获得重要的推论.为此,我们来看:

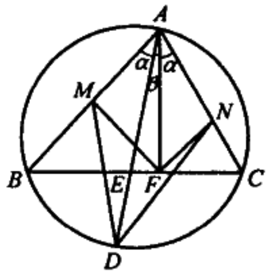


图 22.10

**命题 2** 如图 22.11,在锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线 $AF$ 交外接圆于 $D$,过 $F$ 作 $FM\perp AB$,$FN\perp AC$,垂足分别为 $M$、$N$.证明:四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等.

(1987 年第 28 届 IMO 试题)

① 黄全福.编拟平面几何竞赛题的几点思考[J].现代中学数学,2004(2):16-18.

找到了题目的原型，那么就可以类比于原题的解法来证明它．命题2的证法很多，其最简单的方法，莫过于以下两种．

**证法1**　因 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆，$AF$ 为其直径．作此圆，设交 $BC$ 于另一点 $K$，则 $K$ 在此圆上．联结 $MK$、$NK$，易证 $MK \parallel BD$，$NK \parallel CB$，于是 $S_{\triangle BMK} = S_{\triangle DMK}$，$S_{\triangle CNK} = S_{\triangle DNK}$．证明四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等．

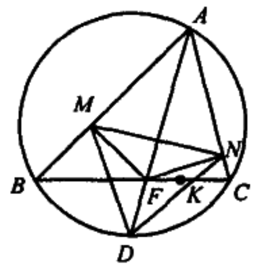



图 22.11

**证法2**　因 $AMDN$ 是筝形，则 $AD \perp MN$．从而

$$S_{AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN \qquad ①$$

又利用正弦定理，有

$$AD = AB\sin(B+\alpha)/\sin C \qquad ②$$

$$MN = AF\sin A = AC\sin C\sin A/\sin(B+\alpha) \qquad ③$$

（其中 $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$）

将②、③代入式①，有

$$S_{AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin A = S_{\triangle ABC}$$

得证．

对于命题1，类比于命题2的证法1，可以一字不差地得出证明——不妨也称为“证法1”．但是，因为不知道 $MN$ 是否垂直 $AD$，所以不能套用证法2．然而公式②、③照样成立．

现假设 $MN$ 与 $AF$ 的夹角为 $\theta$，那么应该有

$$S_{AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN\sin\theta \qquad ④$$

将②、③代入④，得

$$S_{AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN\sin\theta = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin A\sin\theta = S_{\triangle ABC}\sin\theta$$

但是，由证法1可知，$S_{AMDN} = S_{\triangle ABC}$，从而得知 $\sin\theta = 1$，即 $\theta = 90°$．

由此我们有了新的发现，可以把它写成以下推论．

**推论1**　如图22.11中所设，则有 $AD \perp MN$．

这个推论是从证法1间接得到的．其实，我们可以直接得到．

由 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆，有 $\angle ANM = \angle AFM$，$\angle BAD = \angle CAF = \alpha$，

$\angle DAF=\beta$,但$\angle AFM$与$\angle FAM=\alpha+\beta$互余,故$\angle ANM$与角$\angle CAD=\alpha+\beta$互余,即$AD\perp MN$.

**推论2** 如图22.11所设,不论$\alpha$大小,$AD\cdot MN$都等于定值——$\triangle ABC$面积的2倍.

**试题B** 给定$a,\sqrt{2}<a<2$.内接于单位圆$\Gamma$的凸四边形$ABCD$适合以下条件:(1)圆心在这凸四边形内部;(2)最大边长是$a$,最小边长是$\sqrt{4-a^2}$.过点$A$、$B$、$C$、$D$依次作圆$\Gamma$的四条切线$L_A$、$L_B$、$L_C$、$L_D$.已知$L_A$与$L_B$、$L_B$与$L_C$、$L_C$与$L_D$、$L_D$与$L_A$分别交于点$A'$、$B'$、$C'$、$D'$.求面积之比$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}$的最大值与最小值.

**解** 记圆$\Gamma$的圆心为$O$,并记$\angle AOB=2\theta_1$,$\angle BOC=2\theta_2$,$\angle COD=2\theta_3$,$\angle DOA=2\theta_4$.于是$\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$都是锐角且$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$.不难求得

$$S_{A'B'C'D'}=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4)$$



所以有

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4)}{\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4} \quad ①$$

由于式①右端关于$\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$对称,故不妨设$AD=a$,$CD=\sqrt{4-a^2}$.于是

$$\sin\theta_4=\frac{a}{2},\sin\theta_3=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$$

又因

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_3\sin\theta_4=\sqrt{1-(\frac{a}{2})^2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(4-a^2)}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}=0$$

所以

$$\theta_3+\theta_4=\frac{\pi}{2}$$

从而

$$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$$

由三角公式有

$$\tan\theta_3+\tan\theta_4=\frac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\cos\theta_3\cos\theta_4}=\frac{1}{\sin\theta_4\sin\theta_3}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}} \quad ②$$

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=\frac{1}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=\frac{2}{\sin 2\theta_1} \quad ③$$

$$\sin 2\theta_3 + \sin 2\theta_4 = 2\sin 2\theta_3 = 4\sin \theta_3\cos \theta_3 = 4\sin \theta_3\sin \theta_4 = a\sqrt{4-a^2} \quad ④$$

$$\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 = 2\sin 2\theta_1 \quad ⑤$$

简记 $\alpha = \tan \theta_3 + \tan \theta_4, \beta = \sin 2\theta_3 + \sin 2\theta_4, t = \sin 2\theta_1$，于是 $\alpha$、$\beta$ 为常数而 $t$ 为变数.将 ② ~ ⑤ 代入 ①，得

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{2\alpha + \frac{4}{t}}{\beta + 2t} \quad ⑥$$

容易看出，式 ⑥ 右端是 $t$ 的严格递减函数，而 $t$ 的最大值为 1，故得

$$\min \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$$

另一方面，由于 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$、$\theta_4$ 都是锐角且 $a$ 是最大边长，$\sqrt{4-a^2}$ 是最小边长，故有 $\theta_3 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant \theta_4$.

又因 $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \theta_3 + \theta_4$，故知 $t$ 的最小值为

$$t_0 = 2\sin \theta_3\sin \theta_4 = \frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}$$



于是，由式 ⑥ 右端函数的严格递减性即得

$$\max \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{8}{a^2(4-a^2)}$$

**试题 C1**　平面上给定凸四边形 $ABCD$ 及其内点 $E$ 和 $F$，适合 $AE = BE, CE = DE, \angle AEB = \angle CED, AF = DF, BF = CF, \angle AFD = \angle BFC$.求证：$\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

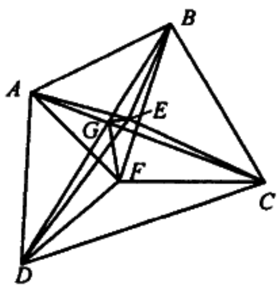



图 22.12

**证明**　如图 22.12，约定将凸四边形对角线 $AC$ 与 $BD$ 的交点记为 $G$，并记 $\angle EAB = \angle ABE = \theta, \angle FAD = \angle ADF = \varphi$.

因为 $\triangle AEC$ 可通过绕点 $E$ 的旋转与 $\triangle BDE$ 重合，所以 $\angle GAE = \angle GBE$，有 $A$、$B$、$E$、$G$ 四点共圆.又因为 $\triangle AFC$ 可通过绕点 $F$ 的旋转与 $\triangle BDF$ 重合，所以 $\angle GAF = \angle GDF$，有 $A$、$D$、$F$、$G$ 四点共圆.依据圆内接四边形的等角关系可知

$$\angle EGB = \angle EAB = \theta, \angle FGD = \angle FAD = \varphi$$

$$\angle EGC = \angle ABE = \theta, \angle FGC = \angle ADF = \varphi$$

又因

$$\angle EGB + \angle EGC + \angle FGC + \angle FGD = \pi$$

则 $$2\theta + 2\varphi = \pi$$

于是 $$(\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi$$

即 $$\angle AFD + \angle AEB = \pi$$

**试题 C2** 给定正 $\triangle ABC$，$D$ 是 $BC$ 边上任意一点，$\triangle ABD$ 的外心、内心分别为 $O_1$、$I_1$，$\triangle ADC$ 的外心、内心分别为 $O_2$、$I_2$，直线 $O_1I_1$ 与 $O_2I_2$ 相交于 $P$。试求：当点 $D$ 在 $BC$ 边上运动时，点 $P$ 的轨迹.

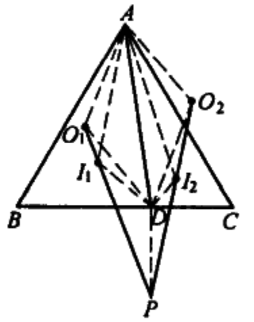


图 22.13

**解法 1** 如图 22.13，作辅助线. 由

$$\angle AO_2D = 2\angle C = 120^\circ$$

$$\angle AI_2D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C = 120^\circ$$

$$\angle B = 60^\circ$$

知 $O_2$、$I_2$ 均在圆 $O_1$ 上.

同理，$O_1$、$I_1$ 均在圆 $O_2$ 上.



显然，圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 是等圆，$\angle O_1DO_2 = 60^\circ$，因

$$\angle AI_2O_2 = 30^\circ = \angle I_1AI_2$$

则 $$AI_1 \parallel O_2P, \angle O_1PO_2 = \angle O_1I_1A = 30^\circ$$

于是，$D$ 是 $\triangle O_1PO_2$ 的外心.

在 $\triangle O_2DI_2$ 中，由

$$\angle DI_2O_2 = 150^\circ \Rightarrow \angle O_2DI_2 + \angle DO_2I_2 = 30^\circ$$

因 $$\angle O_2DC = \angle I_2DC + \angle O_2DI_2 = \angle ADI_2 + \angle O_2DI_2 =$$
$$\angle ADO_2 + \angle O_2DI_2 + \angle O_2DI_2 = 30^\circ + 2\angle O_2DI_2$$

于是，由 $\angle DO_2P = \angle DPO_2$，有

$$\angle PDC = 180^\circ - \angle CDO_2 - 2\angle DO_2P = 150^\circ - 2\angle O_2DI_2 - 2\angle DO_2P = 90^\circ$$

有 $$\angle PDC = 90^\circ$$

即 $$PD \perp BC$$

以及 $$AD = \sqrt{3}DO_1 = \sqrt{3}DP$$

现以边 $BC$ 所在的直线为 $x$ 轴，边 $BC$ 的中点 $O$ 为坐标原点建立直角坐标系，且不妨设正 $\triangle ABC$ 的边长为 2，点 $P$ 的坐标为 $(x, y)$. 则在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中

$$AD^2 - OD^2 = AO^2$$

即 $$(\sqrt{3}y)^2 - x^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1, -1 < x < 1, y < 0$$

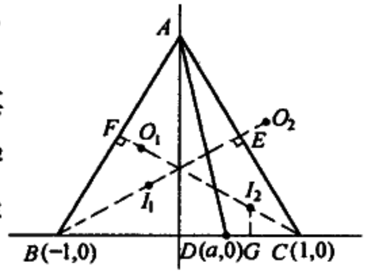



图 22.14

**解法2** 如图22.14,建立坐标系,$BE\perp AC$,$CF\perp AB$.设点$D$的坐标为$(a,0)$,不妨设$0\leqslant a<1$.则$O_2$、$I_1$在$BE$或其延长线上,$O_1$、$I_2$在$CF$或其延长线上.由于$O_2$在$DC$的垂直平分线上,故$O_2$的横坐标为$\frac{a+1}{2}$.由$\angle CBO_2=30°$知,$O_2$的纵坐标为$\frac{3+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$.因此,点$O_2$的坐标为$(\frac{a+1}{2},\frac{3+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3})$.点$I_2$的纵坐标为$\triangle ADC$内切圆的半径长$r_2$.由$AD=\sqrt{a^2+3}$及面积关系有

$$(2+1-a+\sqrt{a^2+3})r_2=(1-a)\sqrt{3}$$

即

$$r_2=\frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3})$$

过$I_2$作$I_2G\perp BC$交$BC$于$G$.则由$\angle GCI_2=30°$知

$$CG=r_2\cot 30°=\sqrt{3}r_2$$

点$I_2$的横坐标为

$$1-CG=1-\frac{1}{2}(3-a-\sqrt{a^2+3})=\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3})$$

因此,点$I_2$的坐标为

$$(\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}),\frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3}))$$

同理,点$I_1$的坐标为

$$(\frac{1}{2}(a+1-\sqrt{a^2+3}),\frac{\sqrt{3}}{6}(3+a-\sqrt{a^2+3}))$$

点$O_1$的坐标为$(\frac{a-1}{2},\frac{3-a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3})$.

$O_2I_2$的方程为

$$\frac{y-\frac{a+3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{x-\frac{a+1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}$$

即

$$y-\frac{\sqrt{3}(a+3)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}\left(x-\frac{a+1}{2}\right) \qquad ①$$

$O_1I_1$ 的方程为

$$\frac{y-\frac{a-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{x-\frac{a-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a-\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}$$

即

$$y-\frac{\sqrt{3}(3-a)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a-\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}\left(x-\frac{a-1}{2}\right) \qquad ②$$

由 ① 和 ②，解得 $x=a$. 代入 ② 有

$$y=\frac{\sqrt{3}(3-a)}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a-\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}\left(a-\frac{a-1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+3}$$

因此

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3+3}$$



即

$$y^2-\frac{x^2}{3}=1,\ -1<x<1,\ y<0$$

## 第 1 节　三角形中共顶点的等角问题

**命题 1**　设 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的高，$AE$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径，则 $\angle BAE=\angle DAC$，且 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$(图 22.15).

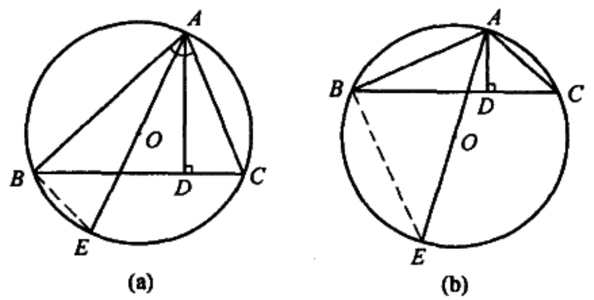



图 22.15

**证明**　如图 22.15，联结 $BE$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，有

$$\angle BEA=\angle DCA$$

从而

$$\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADC$$

即知 $$\angle BAE = \angle DAC$$

且 $$AB : AD = AE : AC$$

即 $$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

不难看出，若点 $D$ 在线段 $BC$ 上，点 $E$ 在 $\overset{\frown}{BC}$（$\angle A$ 所对的弧）上运动但仍保持 $\angle BAE = \angle DAC$ 时，则在运动过程中，$\triangle ADC$ 与 $\triangle ABE$ 的相似关系依然成立，于是仍有 $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

特别地，当 $AD$ 成为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线时，点 $E$ 必成为 $AD$ 的延长线与外接圆的交点，这时同样有 $AD \cdot AE = AB \cdot AC$，如图 22.16 所示.

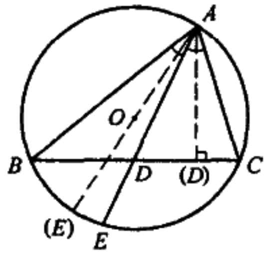



图 22.16

若点 $D$ 在 $BC$ 的延长线上，点 $E$ 在 $\overset{\frown}{BA}$（$\angle C$ 所对的弧）上运动，但同样保持 $\angle BAE = \angle DAC$ 时，则在运动过程中，$\triangle ADC$ 与 $\triangle ABE$ 的相似关系依然成立，即仍有 $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

特别地，当 $AD$ 成为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 外角平分线时，则点 $E$ 必为 $\angle A$ 外角平分线的反向延长线与外接圆的交点，这时同样仍有 $AD \cdot AE = AB \cdot AC$. 如图 22.17 所示.

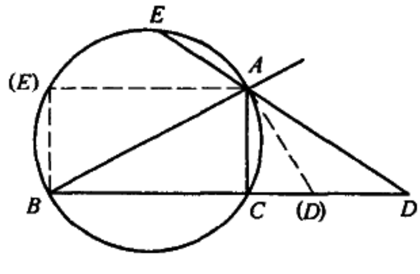



图 22.17



由以上讨论，我们可得

**命题 2**[①] 从三角形的一个顶点出发，在三角形的内（外）部引与过此点的两边（一边及另一边的反向延长线）交成等角的直线，若分别交第三边（第三边的延长线）和外接圆于两点，则从顶点到这两点的线段之积等于三角形过这顶点的两边之积.

由命题 2，还可得到

**推论 1** 三角形一边上的高与外接圆直径的积等于其他两边的积.

**推论 2** 三角形的一内角平分线上从顶点到对边交点及从顶点到外接圆交点的两线段的积等于夹这角的两边的积.

**推论 3** 三角形一内角的外角平分线上从顶点到对边延长线交点及从顶点到其反向延长线与外接圆交点的两线段之积等于夹这角的两边之积.

① 方亚斌. 一道平面几何例题的演变及其应用[J]. 中学数学，1991(7)：42-43.

由命题 1 又可得到与其关联的问题：

**命题 3**① 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，三条直线 $L_A$、$L_B$、$L_C$ 分别通过顶点 $A$、$B$、$C$，并以下述方式作出：在 $\triangle ABC$ 的高线 $AH$ 所在直线上任取一点 $P$，以 $AP$ 为直径作圆，分别交 $AB$、$AC$ 或其延长线于 $M$、$N$，$M$、$N$ 异于 $A$，$L_A$ 为过 $A$ 与 $MN$ 垂直的直线，直线 $L_B$、$L_C$ 类似作出．那么 $L_A$、$L_B$、$L_C$ 三直线共点．

**证明** 由于点 $P$ 的任意性，此命题的图形有如下几种情形，如图 22.18 所示．

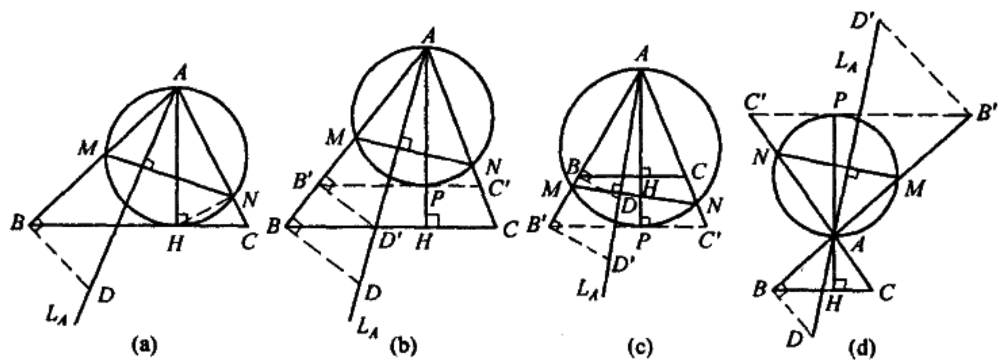





图 22.18

仅就图 22.18(a) 的情形给出证明．过 $B$ 作 $BD \perp AB$ 交 $L_A$ 于 $D$，联结 $HN$，由 $A$、$M$、$H$、$N$ 四点共圆，有

$$\angle AMN = \angle AHN$$

又注意到
$$\angle BDA = \angle AMN, \angle BCA = \angle AHN$$

故
$$\angle BDA = \angle BCA$$

即 $A$、$B$、$D$、$C$ 共圆且 $AD$ 为其直径，从而 $L_A$ 过 $\triangle ABC$ 的外心．

同理，$L_B$、$L_C$ 过 $\triangle ABC$ 的外心．

故 $L_A$、$L_B$、$L_C$ 三直线共点．

对于其他几种情形，只需要过 $P$ 作 $B'C' \parallel BC$ 交直线 $AB$ 于 $B'$，交直线 $AC$ 于 $C'$，再过 $B'$ 作 $B'D' \parallel BD$ 交直线 $AD$ 于 $D'$，则可推证得 $A$、$B$、$D$、$C$ 四点共圆．从而可证得结论成立．

**注** 此题中，若联结 $MN$ 交 $AH$ 于 $Q$，则 $BH \cdot HC = AH^2 \cdot \frac{QP}{QA}$．

**命题 4** 任意给定锐角 $\triangle ABC$，在其边 $BC$ 上有两点 $E$、$F$ 满足 $\angle BAE = \angle CAF$，在边 $AB$、$AC$ 上分别取点 $M$、$N$，使得 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆，延长 $AE$ 交

① 郭璋．一道 IMO 备选题的证明及演变[J]．中学教研(数学)，1994(9)：32-34．

$\triangle ABC$ 的外接圆于点 $D$. 证明: $S_{AMDN}=S_{\triangle ABC}$.

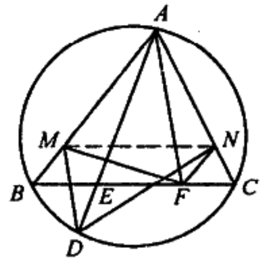


图 22.19

**证明**　如图 22.19, 联结 $MN$. 记 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$, $\angle EAF=\beta$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$. 则

$$S_{AMDN}=S_{\triangle AMD}+S_{\triangle ADN}=\frac{1}{2}AD[AM\sin\alpha+AN\sin(\alpha+\beta)] \quad ①$$

因为 $A$、$M$、$F$、$N$ 四点共圆, 由托勒密定理得

$$AF\cdot MN=AM\cdot FN+AN\cdot MF \quad ②$$

又设 $\triangle AMN$ 的外接圆的半径为 $r$. 由正弦定理得

$$MF=2r\sin(\alpha+\beta)$$
$$MN=2r\sin(2\alpha+\beta)$$
$$FN=2r\sin\alpha$$

将以上三式代入式 ② 并整理得

$$AF\sin(2\alpha+\beta)=AM\sin\alpha+AN\sin(\alpha+\beta) \quad ③$$

再将式 ③ 代入式 ① 得

$$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin(2\alpha+\beta)=\frac{AF}{4R}\cdot AD\cdot BC$$

又
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle AFC}=\frac{AF}{2}[AB\sin(\alpha+\beta)+AC\sin\alpha]$$

即
$$S_{\triangle ABC}=\frac{AF}{4R}(AB\cdot CD+AC\cdot BD)$$

再由托勒密定理得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AF}{4R}\cdot AD\cdot BC$$

故
$$S_{AMDN}=S_{\triangle ABC}$$

**注**　显然, 下面两题即为此命题的特例.

**题1**　锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的平分线交 $BC$ 于点 $L$, 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 $N$, $LK\perp AB$ 于点 $K$, $LM\perp AC$ 于点 $M$. 则 $S_{\triangle ABC}=S_{AKNM}$.

(1987 年第 28 届 IMO 试题)

**题2**　在锐角 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上有两点 $E$、$F$ 满足 $\angle BAE=\angle CAF$, 作 $FM\perp AB$ 于点 $M$, $FN\perp AC$ 于点 $N$, 延长 $AE$ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 $D$. 证明: $S_{AMDN}=S_{\triangle ABC}$.

(2000 年全国高中数学联赛试题)

将上面的题2推广,又可得命题4的特例:

**命题5** 在锐角$\triangle ABC$的$BC$边或其延长线上有两点$E$、$F$,使得$\angle BAE=\angle CAF$,作$FM\perp AB$,$FN\perp AC$(垂足为$M$、$N$);$AE$交$\triangle ABC$外接圆于$D$,则$MN\perp AD$,$MN\cdot AD$等于定值——$\triangle ABC$面积的2倍;四边形(凸的或凹的)的面积等于$\triangle ABC$面积.

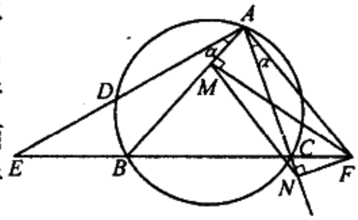


图 22.20

**证明** 如图22.20,由$FM\perp AB$,$FN\perp AC$,知$A$、$M$、$N$、$F$四点共圆,即有

$$\angle ANM=\angle AFM$$

而$\angle AFM$与$\angle MAF=\angle BAC+\angle CAF$互余,从而$\angle ANM$与$\angle BAC+\angle BAE=\angle EAC$互余,故$MN\perp AD$.

又由正弦定理,并令$\angle BAE=\angle CAF=\alpha$.则有

$$AD=\frac{AB\sin\angle ACD}{\sin\angle ACB}=\frac{AB\sin(A+B+\alpha)}{\sin C}$$

$$AF=\frac{AC\sin\angle ACF}{\sin\angle AFC}=\frac{AC\sin(A+B)}{\sin(A+B+\alpha)}$$

$$MN=AF\sin\angle MAN=\frac{AC\sin(A+B)\sin A}{\sin(A+B+\alpha)}$$

从而
$$S_{AMDN}=\frac{1}{2}AD\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB\sin(A+B+\alpha)}{\sin C}\cdot\frac{AC\sin(A+B)\sin A}{\sin(A+B+\alpha)}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=S_{\triangle ABC}$$



**命题6** 设$D$、$E$是$\triangle ABC$的边$BC$上任意两点(不与$B$、$C$重合),则$\angle BAD=\angle CAE$的充要条件是

$$\frac{AB^2}{BD\cdot BE}=\frac{AC^2}{CD\cdot CE}\qquad(*)$$

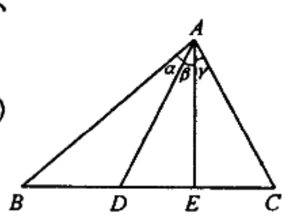


图 22.21

**证明** 如图22.21,由正弦定理有

$$\frac{AB^2}{BD\cdot BE}=\frac{AB\cdot AB}{BD\cdot BE}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle AEB}{\sin\angle BAE}$$

$$\frac{AC^2}{CD\cdot CE}=\frac{AC}{CD}\cdot\frac{AC}{CE}=\frac{\sin\angle AEC}{\sin\angle CAE}\cdot\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}$$

记$\angle BAD=\alpha$,$\angle DAE=\beta$,$\angle CAE=\gamma$.

充分性：当 $\alpha=\gamma$，注意到 $B$、$D$、$E$、$C$ 共线，显然有

$$\frac{AB^2}{BD\cdot BE}=\frac{AC^2}{CD\cdot CE}$$

必要性：当式（*）成立时，易得

$$\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)$$

视“$\alpha+\beta+\gamma$”为一整体，则可得

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

由于 $$0<\alpha+\beta+\gamma<180^\circ,0<\alpha,\gamma<90^\circ$$

所以 $$\alpha=\gamma$$

**例1**　已知 $ABCD$ 为圆内接四边形，求证：

$$\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}=\frac{AC}{BD}$$

（1987年江苏省青少年数学夏令营选拔题）

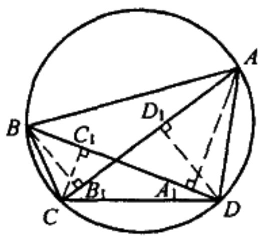


图22.22

**证明**　如图22.22，作 $AA_1\perp BD$，$CC_1\perp BD$，$BB_1\perp AC$，$DD_1\perp AC$，垂足分别是 $A_1$、$C_1$、$B_1$、$D_1$，设四边形 $ABCD$ 外接圆直径为 $d$。由推论1，得

$$DA\cdot AB=AA_1\cdot d,BC\cdot CD=CC_1\cdot d$$

$$AB\cdot BC=BB_1\cdot d,CD\cdot DA=DD_1\cdot d$$

所以

$$\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}=\frac{AA_1+CC_1}{BB_1+DD_1}\qquad①$$

又据 $$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle DAC}=S_{ABCD}$$

可得 $$\frac{1}{2}(AA_1+CC_1)BD=\frac{1}{2}(BB_1+DD_1)AC$$

即

$$\frac{AA_1+CC_1}{BB_1+DD_1}=\frac{AC}{BD}\qquad②$$

从①、②两式可知

$$\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}=\frac{AC}{BD}$$

**例2**　在等腰 $\triangle ABC$ 中，$M$ 为底边 $AB$ 的中点，在 $\triangle ABC$ 内有一点，使得 $\angle PAB=\angle PBC$。求证：$\angle APM+\angle BPC=\pi$。

（2000年波兰数学奥林匹克试题）

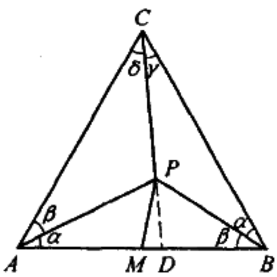


图22.23

**证明**　延长 $CP$ 与 $AB$ 交于点 $D$. 要证 $\angle APM+\angle BPC=\pi$, 只需要证 $\angle APM=\angle BPD$, 令

$$\angle PAB=\angle PBC=\alpha,\angle CAP=\angle ABP=\beta,\angle BCD=\gamma,\angle ACD=\delta$$

由角元形式塞瓦定理,有

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=1$$

即
$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

又在 $\triangle PAB$, 由正弦定理,有

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

而
$$\frac{AD}{BD}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot DC\sin\delta}{\frac{1}{2}BC\cdot DC\sin\gamma}=\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

所以,有
$$\frac{AP^2}{BP^2}=\frac{AD}{BD}=\frac{AD\cdot AM}{BD\cdot BM}$$



再对 $\triangle PAB$ 及点 $M$、$D$ 应用命题 6, 有

$$\angle APM=\angle BPD$$

故命题获证.

**例 3**　$H$ 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $AH=2$, $BH=CH=1$. 求 $AB$、$BC$、$CA$ 的长.

**解**　如图 22.24, 延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $D$, 易知 $HD\perp BC$, $\triangle HBC$ 为等腰三角形, 从而 $\triangle ABC$ 也是等腰三角形.

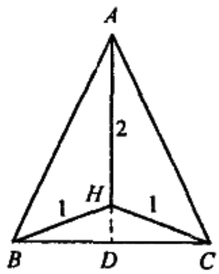


图 22.24

又 $H$ 是垂心, 故

$$\angle HBC+\angle HCB=90^\circ-\angle BCA+90^\circ-\angle CBA=180^\circ-(\angle BCA+\angle CBA)=\angle BAC$$

故 $\angle BHC$ 与 $\angle BAC$ 互补, 据正弦定理知 $\triangle HBC$ 与 $\triangle ABC$ 有相等的外接圆, 令它们的外接圆直径都是 $d$, 且令 $HD=x$, $AB=AC=y$, 由命题 2 的推论 1, 得

$$|x|=x\cdot d,y\cdot y=(2+x)\cdot d$$

消去 $d$, 并整理可得

$$2+x=xy^2 \quad ①$$

又由 $AB^2 = AD^2 + BD^2$ 得

$$y^2 = (2 + x)^2 + (1 - x^2) = 4x + 5 \qquad ②$$

从①、②两式可得

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, y = \sqrt{2\sqrt{3} + 3}$$

在 Rt$\triangle BDH$ 中，$BD^2 = BH^2 - HD^2 = 1 - x^2$，则

$$BD = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3} - 1}{2})^2} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$$

于是 $$AB = AC = \sqrt{2\sqrt{3} + 3}, BC = 2BD = \sqrt[4]{12}$$

**例4**　设 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的边 $AC$ 上一点，$E$ 和 $F$ 分别为线段 $BD$ 和 $BC$ 上的点. 满足 $\angle BAE = \angle CAF$. 再设 $P$、$Q$ 为线段 $BC$ 和 $BD$ 上的点，使得 $EP \parallel QF \parallel DC$. 求证：$\angle BAP = \angle QAC$.

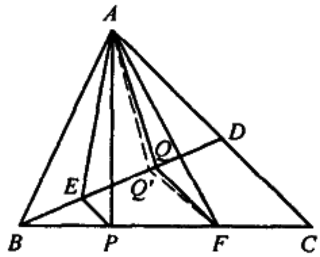



图22.25

**证明**　如图22.25，作 $\angle CAQ' = \angle BAP$，交 $BD$ 于 $Q'$，联结 $QF'$，则

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle DAE}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle CAF}$$

因为 $\angle BAE = \angle CAF$，所以 $\angle DAE = \angle BAF$，两式相乘得

$$\frac{BE}{ED} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{AB^2}{AD \cdot AC}$$

同理 $$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{BQ'}{Q'D} = \frac{AB^2}{AD \cdot AC}$$

所以 $$\frac{BE}{ED} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{BQ'}{Q'D}$$

又 $$EP \parallel DC$$

所以 $$\frac{BE}{ED} = \frac{BP}{PC}$$

故 $$\frac{BF}{FC} = \frac{BQ'}{Q'D}$$

因此 $$FQ' \parallel DC$$

所以 $$Q' = Q, \angle BAP = \angle CAQ$$

证毕.

**例5**　如图22.26，$G$、$H$ 是 $\triangle ABC$ 内两点，且满足 $\angle ACG = \angle BCH$，

$\angle CAG=\angle BAH$.过点 $G$ 分别作 $GD\perp BC$,$GE\perp CA$,$GF\perp AB$,垂足分别为 $D$、$E$、$F$.若 $\angle DEF=90^\circ$,求证:$H$ 为 $\triangle BDF$ 的垂心.

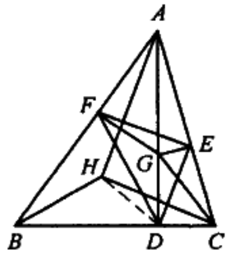


图 22.26

**证明** 联结 $DH$.因为 $GD\perp BC$,$GE\perp CA$,所以 $C$、$D$、$G$、$E$ 四点共圆.故

$$\angle GDE=\angle ACG=\angle BCH$$

从而 $DE\perp CH$,同理 $EF\perp AH$.

又 $\angle DEF=90^\circ$,所以 $\angle AHC=90^\circ$,因为

$$\frac{CD}{CH}=\frac{GC\cos\angle GCD}{AC\cos\angle HCA}=\frac{GC}{AC}$$

$$\angle HCD=\angle ACG$$

所以
$$\triangle HCD\backsim\triangle ACG$$

则
$$\angle CHD=\angle CAG=\angle EFG$$

又因为 $CH/\!/EF$,所以 $DH/\!/GF$,于是 $DH\perp AB$,同理 $FH\perp BC$,故 $H$ 是 $\triangle BDF$ 的垂心.



## 第 2 节　正三角形的分割三角形问题

从正三角形一顶点出发的直线将其分为两个三角形的问题,称之为正三角形的分割问题.对这个问题,闵飞先生进行了深入地探讨,现介绍如下.①

**命题 1** 在正 $\triangle ABC$ 中,$D$ 是边 $BC$ 上任意一点,$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心分别为 $I_1$、$I_2$,如图22.27所示.若直线 $I_1I_2$ 与 $AB$、$AC$ 分别交于 $M$、$N$,则 $S_{\triangle AMN}\geqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

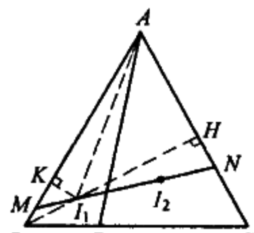


图 22.27

**证明** 设 $AC$ 的中点为 $H$,则 $B$、$I_1$、$H$ 共线.如图 22.27 所示,过 $I_1$ 作 $AB$ 的垂线,垂足为 $K$.

由 $\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 中必有一个角不大于 $30^\circ$,可设 $\angle BAD\leqslant 30^\circ$.则

$$\angle I_1AB\leqslant 15^\circ,\angle I_1AC\geqslant 45^\circ$$

有
$$I_1H=I_1A\sin\angle I_1AC\geqslant I_1A\sin 45^\circ$$

① 闵飞.图形变式——命题的一种重要思路[J].中等数学,2005(6):13-15 及 2005(7):12-14.

$$I_1B = 2I_1K = 2I_1A\sin\angle I_1AB \leqslant 2I_1A\sin 15^\circ$$

而
$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} > 2\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

则
$$I_1H > I_1B$$

又
$$I_1N \geqslant I_1H > I_1B \geqslant I_1M$$
$$\angle HI_1N = \angle BI_1M$$

从而
$$S_{\triangle HI_1N} = \frac{1}{2}I_1H\cdot I_1N\sin\angle HI_1N \geqslant \frac{1}{2}I_1B\cdot I_1M\sin\angle BI_1M = S_{\triangle I_1BM}$$

故
$$S_{\triangle AMN} \geqslant S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

**命题2** 如图22.28,给定正$\triangle ABC$,$D$是边$BC$上任意一点,$\triangle ABC$的外心、内心分别为$O_1$、$I_1$,$\triangle ACD$的外心、内心分别为$O_2$、$I_2$,$\triangle ABC$的中心为$O$.求证:

(1)$OO_1 + OO_2$为定值.

(2)$AI_1$平分$\angle OAO_1$,$AI_2$平分$\angle OAO_2$.

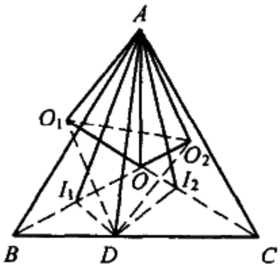


图22.28

**证明** 不妨设$\angle ADB \geqslant 90^\circ$.因为
$$\angle AO_2D = 2\angle C = 120^\circ$$
$$\angle AI_2D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C = 120^\circ$$
$$\angle B = 60^\circ$$

所以,$A$、$O_2$、$I_2$、$D$、$B$五点共圆且圆心为$O_1$、半径为$O_1O_2$.

同理,$A$、$O_1$、$I_1$、$D$、$C$五点共圆且圆心为$O_2$、半径为$O_1O_2$.

故$\triangle AO_1O_2$、$\triangle DO_1O_2$是等边三角形.从而
$$\angle O_1AD = \angle O_2AD = 30^\circ$$

则
$$\angle O_1AI_1 = 30^\circ - \angle DAI_1 = \angle OAB - \angle BAI_1 = \angle OAI_1$$

因此,$AI_1$平分$\angle OAO_1$.

同理,$AI_2$平分$\angle OAO_2$.

又因为$B$、$O$、$O_2$三点共线,且$C$、$O$、$O_1$三点共线,所以
$$\angle O_1OO_2 = \angle BOC = 120^\circ$$

结合$\angle O_1AO_2 = 60^\circ$,即得$A$、$O_1$、$O$、$O_2$四点共圆.从而,$O$为正$\triangle AO_1O_2$

外接圆圆弧$\overset{\frown}{O_1O_2}$上一点.故 $OO_1 + OO_2 = OA$(定值).

**命题 3** 如图 22.29,给定正 $\triangle ABC$,$D$ 是边 $BC$ 上任意一点,$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心分别为 $I_1$、$I_2$,以 $I_1I_2$ 为边作正 $\triangle I_1I_2E$(点 $D$、$E$ 在 $I_1I_2$ 异侧).求证:$DE \perp BC$.

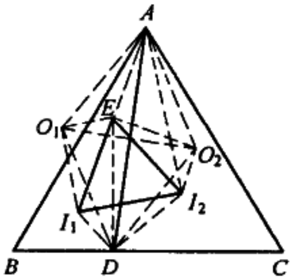


图 22.29

**证明** 取 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的外心 $O_1$、$O_2$,辅助线如图 22.29 所示.

由命题 2 可知 $A$、$O_1$、$I_1$、$D$,$A$、$O_2$、$I_2$、$D$ 分别四点共圆,且两圆半径相等.所以

$$\angle O_1AI_1 = \angle O_1AD - \angle DAI_1 = 30° - \angle DAI_1 = \angle I_1AI_2 - \angle DAI_1 = \angle DAI_2$$

故
$$O_1I_1 = DI_2$$

同理,$DI_1 = O_2I_2$,且

$$\angle O_1I_1D = 180° - \angle O_1AD = 150°$$

因此
$$\angle O_1I_1E + \angle DI_1I_2 = 90°$$



结合 $\angle DI_1I_2 + \angle DI_2I_1 = 90°$,知

$$\angle O_1I_1E = \angle DI_2I_1$$

所以
$$\triangle O_1I_1E \cong \triangle DI_2I_1$$

同理
$$\triangle O_2I_2E \cong \triangle DI_1I_2$$

故
$$\triangle EO_1O_2 \cong \triangle I_1DO_1 \cong \triangle I_2O_2D$$

从而,$\angle O_1EO_2 = \angle DI_1O_1 = 150°$,且 $\triangle DO_1O_2$ 是正三角形.于是,点 $E$ 在以点 $D$ 为圆心、$DO_1$ 长为半径的圆上.因此

$$DO_2 = DE = DO_1$$

$$\angle CDE = \angle O_2DC + \angle O_2DE = (\angle O_2DI_2 + \angle ADI_2) + 180° - 2(60° + \angle O_2DI_2) =$$
$$60^2 + \angle ADI_2 - \angle O_2DI_2 = 60° + \angle ADO_2 = 90°$$

故
$$DE \perp BC$$

**命题 4** 如图 22.30,给定正 $\triangle ABC$,$D$ 是边 $BC$ 上任意一点,$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心分别为 $I_1$、$I_2$,在 $AD$ 上取两点 $E$、$F$,使得 $AE = CD$,$AF = BD$.求证:

(1)$I_1I_2^2 = I_1E^2 + I_2F^2$.

(2)$I_1E \perp I_2F$.

**证明** (1) 设 $\triangle ABD$ 的内切圆与 $AD$ 切于点 $H$,联结 $DI_1$、$DI_2$、$I_1H$.因为

$$DE = AD - AE = AD - CD = AD - (AB - BD) = 2DH$$

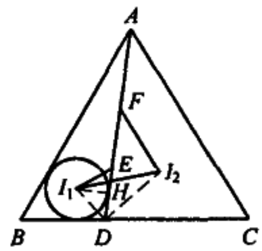



图 22.30

所以　　　　$EH = DH$

结合 $I_1H \perp DE$，知

$$I_1E = I_1D$$

同理　　　　$I_2F = DI_2$

因此　$I_1I_2^2 = DI_1^2 + DI_2^2 = I_1E^2 + I_2F^2$

(2) 又

$$\overrightarrow{DI_1} \cdot \overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HI_1}) \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$$

同理　　$\overrightarrow{DI_2} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$

所以

$$\overrightarrow{I_1E} \cdot \overrightarrow{I_2F} = (\overrightarrow{I_1D} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{I_2D} + \overrightarrow{DF}) =$$
$$\overrightarrow{I_1D} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{I_2D} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$$

因此，$I_1E \perp I_2F$.

**命题 5**　如图 22.31，给定正 $\triangle ABC$，$D$ 是边 $BC$ 上任意一点，$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内切圆分别为圆 $I_1$、圆 $I_2$，此两圆的异于 $BC$ 的外公切线交 $AD$、$AB$、$AC$ 于 $F$、$M$、$N$，以 $I_1I_2$ 为边作等边 $\triangle I_1I_2E$（点 $D$、$E$ 在 $I_2I_2$ 异侧）. 求证：$EF \perp MN$.

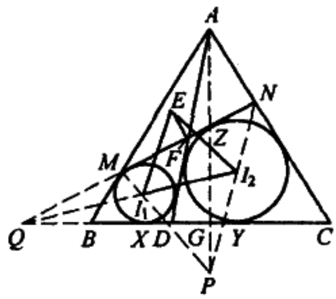



图 22.31

**证明**　显然，$MN \parallel BC$ 时结论成立.

不妨设 $NM$ 与 $CB$ 交于点 $Q$，显然 $I_2I_1$ 过点 $Q$. 设 $MI_1$ 与 $NI_2$ 交于点 $P$，显见 $P$ 是 $\triangle AMN$ 的旁心，故 $AP$ 平分 $\angle BAC$. 设 $AP$ 交 $BC$ 于点 $G$，则有

$$PG \perp BC \qquad ①$$

由于 $I_2$ 是 $\triangle CNQ$ 的内心且 $\angle C = 60°$，所以 $\angle NI_2Q = 120°$. 又

$$\angle MI_1I_2 = \angle MQI_2 + \angle QMI_1 = \frac{1}{2}\angle MQB + \left(90° + \frac{1}{2}\angle BMQ\right) =$$
$$90° + \frac{1}{2}\angle ABC = 120°$$

所以，$\triangle PI_1I_2$ 是正三角形.

从而，点 $P$、$E$ 关于 $I_1I_2$ 对称. ②

记圆 $I_1$、圆 $I_2$ 分别与 $BC$ 相切于 $X$、$Y$，圆 $I_2$ 与 $MN$ 切于点 $Z$. 由圆 $I_1$、圆 $I_2$ 分别是 $\triangle QDF$ 的内切圆和旁切圆，知

$$DX = \frac{s}{2} - FQ = FZ$$

其中 $s$ 为 $\triangle DQF$ 的周长.又

$$GY = BD + DY - BG = BD + \frac{AD + CD - AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AD - CD}{2}$$

$$DX = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD - CD}{2}$$

则 $$GY = FZ$$

所以,点 $G$、$F$ 关于 $I_1I_2$ 对称. ③

由 ①、②、③,知 $EF \perp MN$.

**命题 6** 如图 22.32,给定正 $\triangle ABC$,$D$ 是边 $BC$ 上任意一点,$\triangle ABD$ 的外心、垂心分别为 $O_1$、$H_1$,$\triangle ACD$ 的外心、垂心分别为 $O_2$、$H_2$.求证:

(1)$\angle H_1O_1H_2 = \angle H_1O_2H_2$.

(2)$O_1H_1 + O_2H_2$ 为定值.

(3)$|S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD}| = 3S_{O_1H_1O_2H_2}$.

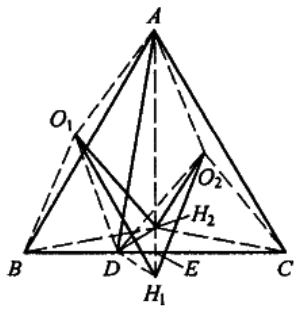


图 22.32



**证明** (1) 不妨设 $BD \leqslant CD$.因为 $O_2$ 是 $\triangle ACD$ 的外心,$H_2$ 是 $\triangle ACD$ 的垂心,则有

$$\angle AO_2D = 2\angle C = 120°$$

$$\angle AH_2D = 180° - \angle C = 120°$$

所以,$A$、$O_2$、$H_2$、$D$、$B$ 五点共圆,记半径 $O_1O_2 = R$.

同理,$A$、$O_1$、$D$、$H_1$、$C$ 五点共圆,半径为 $O_1O_2$.

因为

$$\angle DH_2H_1 = 180° - \angle AH_2D = 60°, \angle DH_1A = \angle C = 60°$$

所以,$\triangle DH_1H_2$ 为等边三角形.故 $H_1D = H_1H_2$,又 $O_1D = O_1H_2 = R$,则 $\triangle DO_1H_1 \cong \triangle H_2O_1H_1$,所以 $\angle DO_1H_2 = 2\angle H_1O_1H_2$.

同理 $\angle DO_2H_1 = 2\angle H_1O_2H_2$,再由 $O_1D = O_1H_2 = R = O_2D = O_2H_1$,且 $DH_2 = DH_1$,知 $\triangle O_1DH_2 \cong \triangle O_2DH_1$,所以 $\angle DO_1H_2 = \angle DO_2H_1$,从而 $\angle H_1O_1H_2 = \angle H_1O_2H_2$.

(2) 由(1)中 $A$、$D$、$H_2$、$O_2$ 四点共圆,有

$$\angle CO_2H_2 = \angle AH_2O_2 + \angle CAH_2 + \angle ACO_2 = 60° + \angle ACO_2$$

又 $$\triangle AO_1B \cong \triangle AO_2C$$

则 $$\angle O_1BA = \angle O_2CA$$

故 $$\angle O_1BD = 60° + \angle O_1BA = 60° + \angle O_2CA = \angle CO_2H_2$$

因为 $$\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D} = \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{CH_2}$$

则 $$|\overrightarrow{CH_2}| = |\overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2D}| = R$$

故 $\triangle O_1BD \cong \triangle CO_2H_2$(腰长均为 $R$),所以 $BD = O_2H_2$.

同理,$CD = O_1H_1$,因此,$O_1H_1 + O_2H_2 = BC$(定值).

(3) 由(1)、(2) 的证明易知

$$\triangle O_1H_1H_2 \cong \triangle CDH_2, \triangle O_2H_1H_2 \cong \triangle BH_2D$$

故 $$S_{O_1H_1O_2H_2} = S_{\triangle H_1O_1H_2} + S_{\triangle H_1O_2H_2} = S_{\triangle CH_2D} + S_{\triangle BH_2D} = S_{\triangle BH_2C}$$

又 $$S_{\triangle BH_2C} = \frac{1}{2}BC \cdot H_2E = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC \cdot DE = \frac{1}{3}AE \cdot \frac{1}{2}(CD - BD) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}AE \cdot CD - \frac{1}{2}AE \cdot BD) = \frac{1}{3}(S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ABD})$$

其中 $E$ 是$BC$ 的中点,所以

$$|S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD}| = 3S_{O_1H_1O_2H_2}$$



**命题 7**　如图 22.33,设 $D$ 是正 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 $O$ 的 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点,$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内切圆分别为圆 $I_1$、圆 $I_2$,此两圆的一条外公切线与 $AD$、$AB$、$AC$ 交于点 $F$、$M$、$N$.求证:

(1)$MN = BM + CN$.

(2)$F$ 为$AD$ 的中点.

(3)$I_1I_2^2 = BI_1^2 + CI_2^2$.

(4) 若以 $I_1I_2$ 为边作正 $\triangle I_1I_2E$(点 $A$、$E$ 在$I_1I_2$ 同侧),则 $EF \perp MN$.

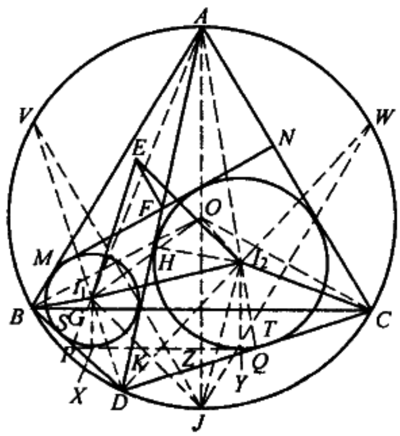



图 22.33

**证明**　(1) 如图 22.33,设直线 $AI_1$ 交 $BD$ 于$P$、交 $BC$ 于$G$,直线 $AI_2$ 交 $CD$ 于$Q$.

由 $AP$ 平分 $\angle BAD$ 知

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{DP}$$

由 $AI_2$ 平分 $\angle CAD$ 知 $$\frac{AC}{AD} = \frac{CQ}{DQ}$$

又 $AB = AC$,则 $$\frac{BP}{DP} = \frac{CQ}{DQ}$$

故 $PQ \parallel BC$.所以 $\angle BGP = \angle GPQ$.

过 $I_1$、$I_2$ 分别作 $PQ$ 的垂线,垂足为 $X$、$Y$,记圆 $I_1$ 与 $BD$ 切于 $S$,圆 $I_2$ 与 $CD$ 切于 $T$.则

$$\angle BPG = \angle BDA + \angle PAD = \angle ABG + \angle BAG = \angle BGP$$

故 $$\angle BPG = \angle GPQ$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle I_1SP \cong \mathrm{Rt}\triangle I_1XP$$

从而 $$I_1S = I_1X$$

因此,$PQ$ 与圆 $I_1$ 相切,切点为 $X$.

同理,$PQ$ 与圆 $I_2$ 相切,切点为 $Y$.

设 $AD$ 与 $PQ$ 交于 $K$.由 $\angle APB = \angle APK$ 知 $\triangle ABP \cong \triangle AKP$.结合 $PS = PX$ 知 $BS = KX$.

同理 $CT = KY$.



再由切线长关系知

$$MN - (BM + CN) = XY - (BS + CT) = (KX + KY) - (BS + CT) = 0$$

即 $$MN = BM + CN$$

(2) 由外切四边形边长关系知

$$BD + MF = BM + DF$$

$$CD + NF = CN + DF$$

且有 $$AD = BD + CD$$

由以上三式及(1) 中结论知 $AD = 2DF$,即 $F$ 为 $AD$ 的中点.

(3) 易知 $\angle AI_1B = 120°$,$\angle AOB = 120°$.

于是,$A$、$O$、$I_1$、$B$ 四点共圆.

同理,$A$、$O$、$I_2$、$B$ 四点共圆.

故

$$\angle BOI_1 = \angle BAI_1 = \angle DAI_1 = 30° - \angle DAI_2 = 30° - \angle CAI_2 = \angle OAI_2 = \angle OCI_2 \quad ①$$

同理 $\angle OBI_1 = \angle COI_2$.

又因为 $OB = OC$,所以

$$\triangle OBI_1 \cong \triangle COI_2$$

故 $$BI_1 = OI_2, OI_1 = CI_2$$

再由式①知

$$\angle BOI_1 + \angle COI_2 = \angle OAI_2 + \angle CAI_2 = 30°$$

结合 $\angle BOC = 120°$,则有

$$\angle I_1OI_2 = 90°$$

所以 $$I_1I_2^2 = OI_1^2 + OI_2^2 = BI_1^2 + CI_2^2$$

(4) 设 $AO$ 与圆 $O$ 交于 $J$、与 $PQ$ 交于 $Z$, $AD$ 与圆 $I_2$ 切于 $H$.

因为 $A$、$O$、$I_2$、$C$ 四点共圆,所以

$$\angle I_2OZ = \angle ACI_2 = \angle DCI_2$$

$$\angle OI_2H = 90° - \angle OI_2A - \angle DAI_2 = 90° - \angle OCA - \angle DAI_2 =$$
$$60° - \angle DAI_2 = \angle DCI_2$$

故 $$\angle I_2OZ = \angle OI_2H$$

在(2)中已证 $F$ 为 $AD$ 的中点,则 $OF \perp AD$,且 $I_2H \perp AD$.所以

$$FH = OI_2\sin\angle OI_2H$$

由(1)中所证 $PQ \parallel BC$,再结合 $OJ \perp PQ$,且 $I_2Y \perp PQ$,则有

$$ZY = OI_2\sin\angle I_2OZ$$

故 $$FH = ZY$$

所以,$F$ 到 $MN$ 与圆 $I_2$ 的切点距离等于 $Z$ 到 $PQ$ 与圆 $I_2$ 的切点距离.

因此,$F$ 与 $Z$ 关于 $I_1I_2$ 对称.

另一方面,设 $DI_1$ 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 $V$, $DI_2$ 交 $\overset{\frown}{AC}$ 于 $W$.易证

$$\triangle I_1VJ \cong \triangle I_2WJ$$

则 $$I_1J = I_2J$$

且 $$\angle I_1JI_2 = \angle VJW = 60°$$

所以,$\triangle I_1JI_2$ 是等边三角形.因此,$E$ 与 $J$ 关于 $I_1I_2$ 对称.结合 $JZ \perp PQ$, $MN$ 与 $PQ$ 关于 $I_1I_2$ 对称,则有 $EF \perp MN$.

## 第3节　爱尔可斯定理[①②]

**爱尔可斯定理 Ⅰ**　如图 22.34,$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 为同一平面内的两个正

① 汪江松,黄家礼.几何明珠[M].武汉:中国地质大学出版社,1988:168-174.
② 齐世荫.爱尔可斯定理的证明、推广与应用[J].中学教研(数学),1988(6):16-19.

三角形，$P$、$Q$、$R$ 分别是$AA'$、$BB'$ 和$CC'$ 的中点，试证明 $\triangle PQR$ 也是正三角形.

**证法 1**　联结 $AB'$、$CB'$，取其中点 $D$、$E$；联结 $PD$、$QD$、$RE$、$QE$. 显然有

$$RE \perp\!\!\!\!\!= \frac{1}{2}C'B',\ QE \perp\!\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$$

$$PD \perp\!\!\!\!\!= \frac{1}{2}A'B',\ QD \perp\!\!\!\!\!= \frac{1}{2}AB$$

于是有　　$RE = PD, EQ = DQ$

又 $\angle REQ$、$\angle PDQ$ 分别等于 $B'C'$ 与 $BC$ 所成之角和 $A'B'$ 与 $AB$ 所成之角，而后二角显然是相等的，故 $\angle REQ = \angle PDQ$，从而 $\triangle REQ \cong \triangle PDQ$，于是 $QR = PQ$，同理可证得 $PQ = RP$.

故 $\triangle PQR$ 为正三角形.

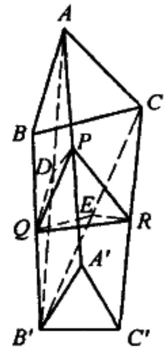


图 22.34

下面再利用复数方法来证明. 为行文方便，我们将这个题略作改动如下：



如果 $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle u_1u_2u_3$ 都是正绕向的正三角形，而 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 是线段 $z_1u_1$、$z_2u_2$、$z_3u_3$ 的中点，那么 $\triangle W_1W_2W_3$ 也是正绕向的正三角形.

利用复数方法证明须用到一个显然的引理：

$\triangle z_1z_2z_3$ 是正绕向的正三角形的充要条件是

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°)$$

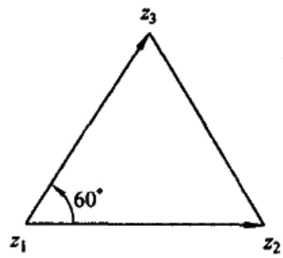


图 22.35

引理的正确性不难从图 22.35 看出，这里我们略去.

**证法 2**　因 $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle u_1u_2u_3$ 都是正绕向的正三角形，故有

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°) \quad ①$$

$$u_3 - u_1 = (u_2 - u_1)(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°) \quad ②$$

(① + ②) ÷ 2 得

$$\frac{z_3 + u_3}{2} - \frac{z_1 + u_1}{2} = \left(\frac{z_2 + u_2}{2} - \frac{z_1 + u_1}{2}\right)(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°) \quad ③$$

但 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 分别是 $z_1u_1$、$z_2u_2$、$z_3u_3$ 的中点，故式 ③ 即为

$$W_3 - W_1 = (W_2 - W_1)(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°)$$

所以 $\triangle W_1W_2W_3$ 是正绕向的正三角形.

爱尔可斯定理 Ⅰ(以下简称定理 Ⅰ) 可以多方面进行推广.

第一,可将定理 Ⅰ 中的"中点"换为"定比分点",这就是:

**推广 Ⅰ$_1$**　如果 $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle u_1u_2u_3$ 都是正绕向的正三角形,点 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 都分有向线段 $z_1u_1$、$z_2u_2$、$z_3u_3$ 成 $m:n$ 之比,则 $\triangle W_1W_2W_3$ 也是正绕向的正三角形.

推广 Ⅰ$_1$的证明与定理 Ⅰ 的证明几乎是一样的,只需要将证法2中的(①+②)÷2换成($n$①+$m$②)÷($m+n$)就行了.

第二,可将定理 Ⅰ 中的"正三角形"换为"正方形",这就是:

**推广 Ⅰ$_2$**　如果 $z_1z_2z_3z_4$ 和 $u_1u_2u_3u_4$ 都是正绕向的正方形,$W_1$、$W_2$、$W_3$ 和 $W_4$ 是 $z_1u_1$、$z_2u_2$、$z_3u_3$ 和 $z_4u_4$ 的中点,那么四边形 $W_1W_2W_3W_4$ 也是正绕向的正方形,如图22.36所示.

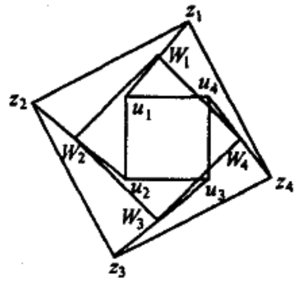



图22.36

推广 Ⅰ$_2$的证明与定理 Ⅰ 的证法也基本相同,只需要将证法2中的因式 $\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°$ 换成 $\mathrm{i}$(即 $\cos 90° + \mathrm{i}\sin 90°$)就可以了.当然其中所用的引理也相应地应改为:"$\triangle z_1z_2z_3$ 是以 $z_1$ 为直角顶点的正绕向的等腰三角形的充要条件是:$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\mathrm{i}$."证明略.

第三,还可进一步将"正方形"推广为"正 $n$ 边形",并将其与推广 Ⅰ$_1$ 结合起来,就是:

**推广 Ⅰ$_3$**　如果 $z_1z_2\cdots z_n$ 和 $u_1u_2\cdots u_n$ 都是正绕向的正 $n$ 边形,$W_1$、$W_2$、…、$W_n$ 都分有向线段 $z_1u_1$、$z_2u_2$、…、$z_nu_n$ 为 $m:n$ 之比,那么 $n$ 边形 $W_1W_2\cdots W_n$ 是正绕向的正 $n$ 边形.

(证略)

第四,将两个"正三角形"换为两个"相似三角形",这就是

**推广 Ⅰ$_4$**　如果 $\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle u_1u_2u_3$ 是两个正绕向的相似三角形($z_i$ 和 $u_i$ 对应,$i = 1,2,3$),而 $W_1$、$W_2$、$W_3$ 是 $z_1u_1$、$z_2u_2$、$z_3u_3$ 的中点,则 $\triangle W_1W_2W_3$ 也是一个与它们相似的正绕向的三角形,如图22.37所示.

证明推广 Ⅰ$_4$ 要用到下述引理:

$\triangle z_1z_2z_3$ 是一个两夹边 $|z_1z_3|$、$|z_1z_2|$ 之比为 $\rho$,夹角为 $\alpha$ 的正绕向三角形的充要条件是

$$z_3 - z_1 = \rho(z_2 - z_1)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

其中 $\alpha = \angle z_2z_1z_3$.

引理可由复数乘法的几何意义加以证明.

(证略)

下面证推广 Ⅰ$_4$.

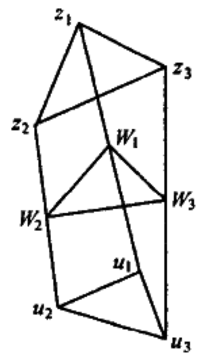


图 22.37

**证明** 由 $\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle u_1u_2u_3$,故 $\angle z_2z_1z_3 = \angle u_2u_1u_3$,设它们都等于 $\alpha$,又有

$$|z_1z_3|:|u_1u_3| = |z_1z_2|:|u_1u_2|$$

故有 $$|z_1z_3|:|z_1z_2| = |u_1u_3|:|u_1u_2|$$

设这两个比都等于 $\rho$,则有

$$z_3 - z_1 = \rho(z_2 - z_1)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \qquad ①$$

$$u_3 - u_1 = \rho(u_2 - u_1)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \qquad ②$$

(① + ②) ÷ 2 得

$$\frac{z_3 + u_3}{2} - \frac{z_1 + u_1}{2} = \rho\left(\frac{z_2 + u_2}{2} - \frac{z_1 + u_1}{2}\right)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

即 $$W_3 - W_1 = \rho(W_2 - W_1)(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

这就是说:$\triangle W_1W_2W_3$ 是一个夹角为 $\angle W_2W_1W_3 = \alpha$,二夹边 $|W_1W_3|$ 与 $|W_1W_2|$ 之比为 $\rho$ 的正绕向三角形.故 $\triangle W_1W_2W_3 \backsim \triangle z_1z_2z_3$.



我们还可以将推广 Ⅰ$_3$ 与 Ⅰ$_4$ 结合起来得到如下:

**推广 Ⅰ$_5$** 如果多边形 $z_1z_2\cdots z_n$ 和 $u_1u_2\cdots u_n$ 是两个正绕向的相似多边形.($z_i$ 与 $u_i$ 相对应,$i = 1,2,\cdots,n$),$W_1$、$W_2$、$\cdots$、$W_n$ 分别分有向线段 $z_iu_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 $m:n$ 之比,则多边形 $W_1W_2\cdots W_n$ 也是一个与它们相似的正绕向 $n$ 边形.(证略)

利用爱尔可斯定理及其推广,可以将某些题目的证题过程简化,还可以编制出许多新题.下面我们举例说明其应用,其中有些题出现了若干个点互相重合以及三角形退化成一个点的情况,请读者注意.

**例 1** 已知 $P$ 是正 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,$A'$、$B'$、$C'$ 分别是 $PA$、$PB$、$PC$ 的中点,如图22.38(a)所示.求证:$\triangle A'B'C'$ 也是正三角形.

**证明** 将图 22.38(a) 重新标记如图 22.38(b) 所示,由定理 Ⅰ 知 $\triangle W_1W_2W_3$ 为正三角形,即 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形.

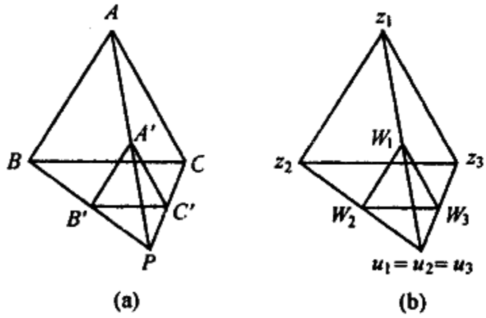
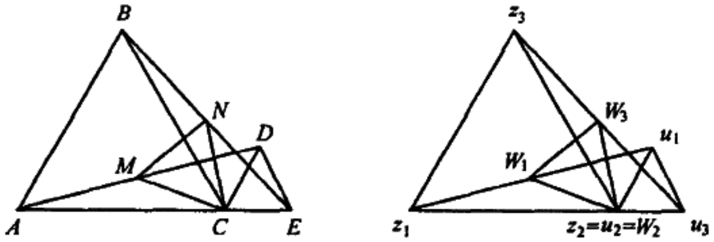


图 22.38

**例2**　已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，在 $AC$ 的延长线 $CE$ 上作同一侧的正 $\triangle CDE$，记 $AD$ 之中点为 $M$，$BE$ 之中点为 $N$，如图 22.39(a) 所示. 证明：$\triangle CMN$ 也是正三角形.

（苏联基辅市 1950 年中学数学竞赛题）



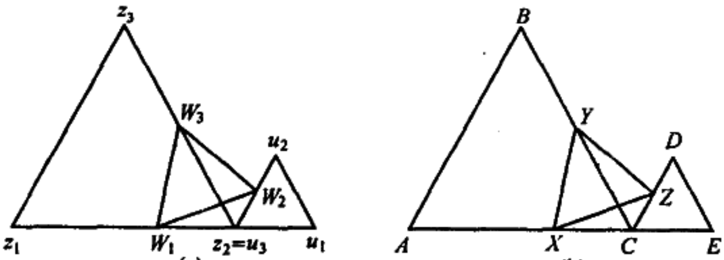
(a)　　(b)

图 22.39

**证明**　我们将图 22.39(a) 重新标记如图 22.39(b) 所示，由定理 Ⅰ 知 $\triangle W_1W_2W_3$ 即 $\triangle CMN$ 是一个正三角形.

显然这里 $E$ 在 $AC$ 延长线上是不必要的，也就是说只要 $\triangle CED$ 是一个正绕向的正三角形就行了.

有趣的是，对于图 22.39(a) 这样的图形重新标记为图 22.39(b) 可以"发现"一个新题目："已知 $\triangle ABC$ 是一个正三角形，在 $AC$ 的延长线上作同一侧的正 $\triangle CDE$，记 $AE$ 中点为 $X$，$BC$ 中点为 $Y$，$CD$ 中点为 $Z$，则 $\triangle XYZ$ 也是一个正三角形，如图22.40 所示.



(a)　　(b)

图 22.40

**例3**　以 $AB$、$CD$ 为上下底的等腰梯形中，对角线 $AC$、$BD$ 相交于 $O$，$AE\perp BD$，$DF\perp AC$，$E$、$F$ 是垂足，且 $G$ 为 $AD$ 的中点，如图 22.41(a) 所示，当 $\angle BOA=60°$ 时，$\triangle EFG$ 具有什么特征？证明你的结论.

（1982 年武汉市武昌区数学竞赛题）

**解**　这时 $\triangle EFG$ 是一个等边三角形. 证明如下：$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 都是正

三角形. 且 $E$、$F$ 分别是 $OB$、$OC$ 的中点, 将图22.41(a) 重新标记画线成图 22.41(b), 由定理 Ⅰ 知 $\triangle W_1W_2W_3$ 即 $\triangle EFG$ 为一正三角形.

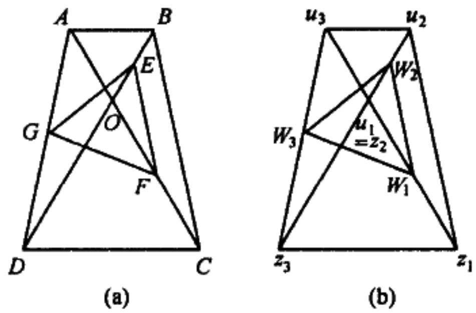


图 22.41

**爱尔可斯定理 Ⅱ**(简称定理 Ⅱ) 如图 22.42, 如果 $\triangle z_1z_2z_3$、$\triangle u_1u_2u_3$、$\triangle v_1v_2v_3$ 都是正绕向的正三角形, 而 $w_1$、$w_2$、$w_3$ 分别是 $\triangle z_1u_1v_1$、$\triangle z_2u_2v_2$、$\triangle z_3u_3v_3$ 的重心, 那么, $\triangle w_1w_2w_3$ 也是正绕向的正三角形.

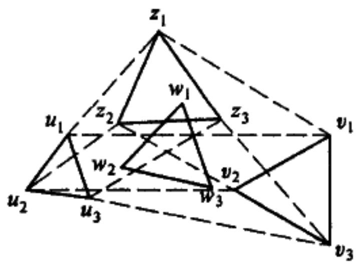


图 22.42

定理 Ⅱ 本也可以用纯几何法来解, 但很繁琐, 故我们用复数来证明, 而用复数证明定理 Ⅱ 几乎和证明定理 Ⅰ 相同, 故证略.



下面我们对爱可尔斯定理 Ⅱ 作若干推广.

第一, 可将"正三角形"换成"正方形". 即

**推广 Ⅱ₁** 如果 $z_1z_2z_3z_4$、$u_1u_2u_3u_4$、$v_1v_2v_3v_4$ 是三个正绕向的正方形, 而 $w_1$、$w_2$、$w_3$ 和 $w_4$ 分别是 $\triangle z_1u_1v_1$、$\triangle z_2u_2v_2$、$\triangle z_3u_3v_3$ 和 $\triangle z_4u_4v_4$ 的重心, 则四边形 $w_1w_2w_3w_4$ 也是一个正绕向的正方形. (证略)

第二, 可将"正三角形"换成"相似三角形", 即

**推广 Ⅱ₂** 如果 $\triangle z_1z_2z_3$、$\triangle u_1u_2u_3$、$\triangle v_1v_2v_3$ 都是正绕向的三个相似三角形($z_i$, $u_i$ 和 $v_i$ 对应, $i = 1,2,3$), 而 $w_1$、$w_2$、$w_3$ 分别是 $\triangle z_1u_1v_1$、$\triangle z_2u_2v_2$、$\triangle z_3u_3v_3$ 的重心, 则 $\triangle w_1w_2w_3$ 是一个与它们相似的正绕向的三角形. (证略)

当然, 推广 Ⅱ₁ 与推广 Ⅱ₂ 中的"正方形""三角形"还可改为"正 $n$ 边形"、"多边形", 若将重心的概念拓广, 我们可以证明:

**推广 Ⅱ₃** 如果有 $n$ 个彼此相似的、正绕向的多边形 $z_1z_2\cdots z_m$、$u_1u_2\cdots u_m$、$\cdots$、$v_1v_2\cdots v_m$($z_i$, $u_i$, $\cdots$ 和 $v_i$ 对应, $i = 1,2,\cdots,m$), 而 $w_1$、$w_2$、$\cdots$、$w_m$ 分别是 $n$ 边形 $z_1u_1\cdots v_1$、$z_2u_2\cdots v_2$、$\cdots$、$z_mu_m\cdots v_m$ 的重心, 那么多边形 $w_1w_2\cdots w_m$ 也是一个与上述 $n$ 个多边形相似的、正绕向的多边形. (证略)

# 第 23 章　2001 ~ 2002 年度试题的诠释

2001 年 9 月首次举办了中国西部数学奥林匹克，其试题我们简记为西部赛试题. 这一届 8 道试题中有 2 道平面几何题.

**西部赛试题 1**　设 $ABCD$ 是面积为 2 的长方形，$P$ 为边 $CD$ 上的一点，$Q$ 为 $\triangle PAB$ 的内切圆与边 $AB$ 的切点. 乘积 $PA \cdot PB$ 的值随着长方形 $ABCD$ 及点 $P$ 的变化而变化，当 $PA \cdot PB$ 取最小值时

(1) 证明：$AB \geqslant 2BC$；

(2) 求 $AQ \cdot BQ$ 的值.

**解**　(1) 由于 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} S_{矩形ABCD} = 1$，从而

$$\frac{1}{2} PA \cdot PB \sin \angle APB = 1$$

即

$$PA \cdot PB = \frac{2}{\sin \angle APB} \geqslant 2$$

等号仅当 $\angle APB = 90°$ 时成立. 这表明点 $P$ 在以 $AB$ 为直径的圆上，该圆应与 $CD$ 有公共点.

于是 $PA \cdot PB$ 取最小值时，应有 $BC \leqslant \frac{AB}{2}$，即 $AB \geqslant 2BC$.

(2) 设 $\triangle APB$ 的内切圆半径为 $r$，则

$$PA \cdot PB = (r + AQ)(r + BQ) = r(r + AQ + BQ) + AQ \cdot BQ$$

而

$$PA \cdot PB = 2S_{\triangle APB}, r(r + AQ + BQ) = S_{\triangle APB}$$

于是

$$AQ \cdot BQ = S_{\triangle APB} = 1$$

**西部赛试题 2**　设 $P$ 为圆 $O$ 外一点，过 $P$ 作圆 $O$ 的两条切线，切点分别为 $A$、$B$. 设 $Q$ 为 $PO$ 与 $AB$ 的交点，过 $Q$ 作圆 $O$ 的任意一条弦 $CD$. 证明：$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 有相同的内心.

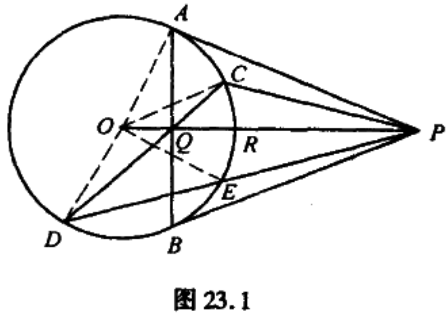


图 23.1

**证明**　如图 23.1，记 $R$ 为线段 $OP$ 与圆 $O$ 的交点，$E$ 为 $PD$ 与圆 $O$ 的交点(不

同于 $D$).因为

$$CQ \cdot QD = AQ \cdot QB = AQ^2$$

$$PQ \cdot QO = AQ^2$$

所以
$$CQ \cdot QD = PQ \cdot QO$$

于是,$P$、$C$、$O$、$D$ 四点共圆.故

$$\angle OPC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OPD$$

即 $PO$ 为 $\angle CPD$ 的平分线.

又由 $P$、$C$、$O$、$D$ 四点共圆,得 $\angle COR = \angle CDE$,而 $\angle COE = 2\angle CDE$,故 $\angle COR = \angle ROE$,即有 $\overset{\frown}{CR} = \overset{\frown}{RE}$,从而 $\angle CDR = \angle EDR$,故 $R$ 为 $\triangle PCD$ 的内心.

又显然 $R$ 为 $\triangle PAB$ 的内心,所以命题成立.

**试题 A** 如图 23.2,$\triangle ABC$ 中,$O$ 为外心,三条高 $AD$、$BE$、$CF$ 交于点 $H$,直线 $ED$ 和 $AB$ 交于点 $M$,$FD$ 和 $AC$ 交于点 $N$,求证:



(1) $OB \perp DF$,$OC \perp DE$.

(2) $OH \perp MN$.

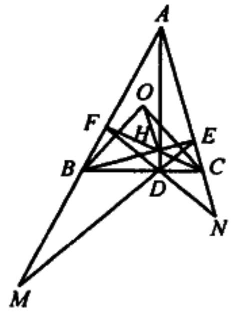


图 23.2

**证法 1** 如图 23.2.

(1) 因 $A$、$C$、$D$、$F$ 四点共圆,则 $\angle BDF = \angle BAC$,又因

$$\angle OBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = 90^\circ - \angle BAC$$

则 $OB \perp DF$,同理 $OC \perp DE$.

(2) 由 $CF \perp MA$,知

$$MC^2 - MH^2 = AC^2 - AH^2 \quad ①$$

又 $BE \perp NA$,则

$$NB^2 - NH^2 = AB^2 - AH^2 \quad ②$$

由 $DA \perp BC$,有

$$BD^2 - CD^2 = BA^2 - AC^2 \quad ③$$

由 $OB \perp DF$,有

$$BN^2 - BD^2 = ON^2 - OD^2 \quad ④$$

由 $OC \perp DE$,有

$$CM^2 - CD^2 = OM^2 - OD^2 \quad ⑤$$

① - ② + ③ + ④ - ⑤,得

$$NH^2 - MH^2 = ON^2 - OM^2$$
$$MO^2 - MH^2 = NO^2 - NH^2$$

所以 $$OH \perp MN$$

**证法 2**[①]　(1) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$,由相交弦定理,有

$$R^2 - OF^2 = AF \cdot FB, R^2 - OD^2 = BD \cdot DC$$

从而 $$OF^2 - OD^2 = BD \cdot DC - AF \cdot FB$$

又 $A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆,有

$$BD \cdot BC = BF \cdot BA$$

即 $$BD(BD + DC) = BF(BF + AF)$$

亦即 $$BF^2 - BD^2 = BD \cdot DC - AF \cdot FB = OF^2 - OD^2$$

故 $$OB \perp DF$$

同理 $$OC \perp DE$$

(2) 作 $OP \perp AB$ 于 $P$,则 $BP = AP$,于是

$$OM^2 - OB^2 = (MP^2 + OP^2) - (BP^2 + OP^2) = MP^2 - BP^2 = MA \cdot MB$$

同理 $$ON^2 - OC^2 = NC \cdot NA$$

从而 $$OM^2 - ON^2 = MA \cdot MB - \cdot NC \cdot NA$$

延长 $MH$ 至 $Q$,使 $Q$、$H$、$D$、$E$ 共圆,则 $MH \cdot MQ = MD \cdot ME$,且

$$\angle MQE = \angle MDH = 180° - \angle ADE = 180° - \angle ABE = \angle MBE$$

从而 $M$、$B$、$Q$、$E$ 共圆,即有 $MH \cdot HQ = BH \cdot HE$,于是

$$MH^2 = MH \cdot (MQ - HQ) = MH \cdot MQ - MH \cdot HQ =$$
$$MD \cdot ME - BH \cdot HE$$

同理 $$NH^2 = ND \cdot NF - CH \cdot HF$$

注意到 $$BH \cdot HE = CH \cdot HF$$
$$MA \cdot MB = MD \cdot ME$$
$$ND \cdot NF = NC \cdot NA$$

即有 $$OM^2 - ON^2 = MH^2 - NH^2$$

故 $$OH \perp MN$$

**证法 3**　(1) 过 $B$ 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 $BT$,如图 23.3 所示,则由 $A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆,知 $\angle TBA = \angle ACB = \angle BFD$,有 $DF \parallel BT$. 而 $OB \perp BT$,故

① 沈文选. 2001 年高中联赛平面几何题的新证法[J]. 中学数学杂志, 2002(2):33-34.

$OB \perp DF$.同理,$OC \perp DE$.

(2)取 $OH$ 的中点 $V$,下证 $V$ 为 $\triangle DEF$ 的外心.如图 23.4,设 $A'$、$B'$、$C'$ 分别为 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点.

由 $A$、$B$、$D$、$E$ 共圆,有

$$\angle BED = \angle BAD = 90^\circ - \angle B$$

同理

$$\angle BEF = \angle BCF = 90^\circ - \angle B$$

从而

$$\angle DEF = \angle BED + \angle BEF = 180^\circ - 2\angle B$$

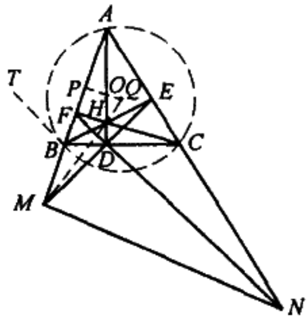


图 23.3

又 $A'$ 为 Rt$\triangle BFC$ 的斜边 $BC$ 上的中点,知 $\angle FA'B = 2\angle FCB = 180^\circ - 2\angle B$,从而,知 $F$、$A'$、$D$、$E$ 四点共圆.

同理,$O$、$F$、$B'$、$E$,$C'$、$F$、$D$、$E$ 分别四点共圆,从而,知 $A'$、$B'$、$C'$、$D$、$E$、$F$ 六点共圆.

又 $OA' \perp BC$,$DH \perp BC$,$V$ 为 $OH$ 的中点,即知 $V$ 在 $A'D$ 的垂直平分线上.

同理,$V$ 在 $B'E$、$FC'$ 的垂直平分线上.

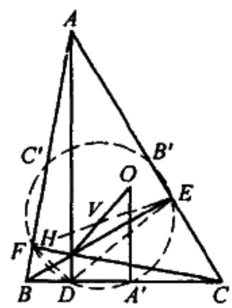


图 23.4

故 $V$ 是 $\triangle DEF$ 的外心(注:若用九点圆定理,可直接由设 $V$ 是 $OH$ 的中点,得 $V$ 为 $\triangle DEF$ 的外心.)

又由 $D$、$E$、$A$、$B$,$D$、$F$、$A$、$C$ 分别四点共圆,有 $MD \cdot ME = MB \cdot MA$,$ND \cdot NF = NC \cdot NA$.

由此,即知 $M$、$N$ 对 $\triangle ABC$ 的外接圆与 $\triangle DEF$ 的外接圆的幂相等,从而 $M$、$N$ 在这两个外接圆的根轴上,即有 $MN \perp OV$,故 $MN \perp OH$.

**证法 4** (由天津实验中学冯振国给出)如图 23.5,过 $B$ 作圆 $O$ 的切线 $MN$,有 $\angle CBN = \angle BAC$.

因 $OB$ 为半径,则

$$OB \perp MN$$

由

$$AD \perp BC, CF \perp AB$$

知 $A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆.故

$$\angle BAC = \angle FDB$$

于是

$$\angle CBN = \angle FDB$$

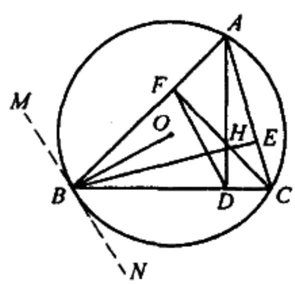


图 23.5

从而　　$FD \parallel MN$

故　　$BO \perp FD$

同理　　$CO \perp DE$

(2) 如图 23.6,联结 $MH$ 并延长交 $\triangle ABH$ 的外接圆于 $G$,设圆 $O$ 的半径为 $R$.

因 $A$、$B$、$H$、$G$ 四点共圆,$A$、$B$、$D$、$E$ 四点共圆,则

$$\angle BAD = \angle BGH, \angle BAD = \angle BED$$

则　　$$\angle BGH = \angle BED$$

因此,$B$、$G$、$E$、$M$ 四点共圆.

$$OM^2 - R^2 = MB \cdot MA = MH \cdot GM(A、B、H、G\text{共圆}) =$$
$$MH^2 + GH \cdot HM =$$
$$MH^2 + BH \cdot HE(G、B、M、E\text{共圆}) =$$
$$MH^2 + AH \cdot HD(A、B、D、E\text{共圆})$$

同理　　$ON^2 - R^2 = NH^2 + AH \cdot HD$

从而　　$OM^2 - MH^2 = ON^2 - NH^2$

故　　$OH \perp MN$

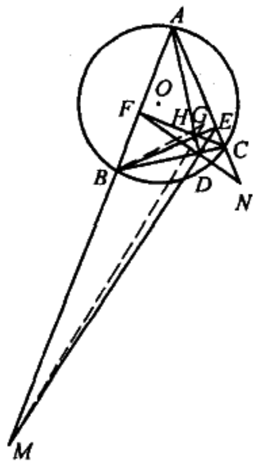


图 23.6



**证法 5** (由江西抚州一中张国清给出)

(1) 略.

(2) 先证如下引理.

**引理**　$H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,$P$ 是任一点,$HM \perp PB$ 于 $M$,交 $AC$ 于 $Y$,$HN \perp PC$ 于点 $N$,交 $AB$ 于点 $X$.则 $PH \perp XY$.

**证明**　令 $\triangle ABC$ 的边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的高的垂足为 $D$、$E$、$F$.由于 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心,知

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF = m$$

按题设知 $C$、$N$、$F$、$X$ 四点共圆,因而

$$HN \cdot HX = HC \cdot HF = m$$

同理　　$$HM \cdot HY = HB \cdot HE = m$$

联结 $PH$,在它上面取点 $Q$ 使 $HP \cdot HQ = m$.于是,$N$、$P$、$X$、$Q$ 四点共圆,因此 $\angle PQX = \angle PNX = 90°$,知 $PQ \perp XQ$.

仿此可证 $PQ \perp YQ$.所以,$X$、$Q$、$Y$ 三点共线.故 $PH \perp XY$.

下面来解决本问题.

如图 23.7,过 $H$ 分别作 $DF$ 的平行线交 $AC$ 延长线于点 $Y$,$DE$ 的平行线交 $AB$ 延长线于点 $X$,易证 $XY \parallel MN$.于是,由结论(1)及引理立得 $OH \perp MN$.

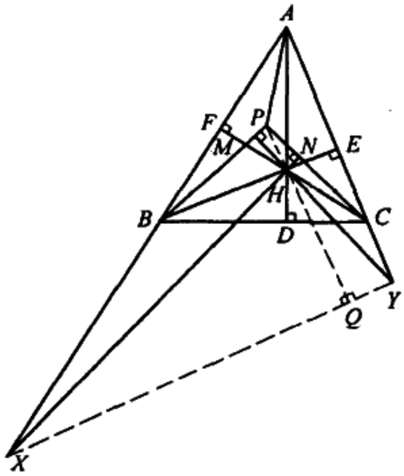


图 23.7

**证法 6** (由湖北朱达坤、余水能、叶迎东给出)如图23.8,过 $A$ 作 $AG \parallel MN$,交 $NF$ 延长线于点 $G$.因

$$\angle FDB = \angle BAE = \angle EDC = \angle BDM$$

则 $BD$ 为 $\angle MDF$ 的内角平分线.

由 $AD \perp BD$ 知 $AD$ 是 $\angle MDF$ 的外角平分线.则

$$\frac{FA}{MA} = \frac{FD}{DM} = \frac{BF}{MB}$$



即
$$\frac{AF}{MA} = \frac{AF - BF}{AB}$$

从而
$$MA = \frac{AB \cdot AF}{AF - BF}$$

$$MF = MA - AF = \frac{2AF \cdot BF}{AF - BF}$$

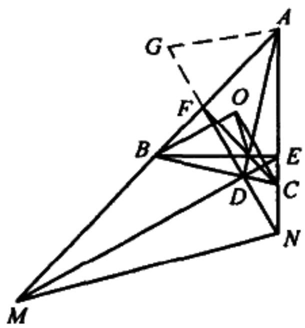


图 23.8

于是 $\frac{MF}{MA} = \frac{2BF}{AB} = \frac{FN}{NG}$(因 $AG \parallel MN$)

又
$$\angle DFC = \angle DAE$$

则
$$\triangle FNC \backsim \triangle AND$$

有
$$\frac{AD}{FC} = \frac{AN}{FN}$$

于是
$$\frac{AN}{NG} = \frac{2BF \cdot AD}{AB \cdot FC} = 2\sin B\cot B = 2\cos B$$

而
$$\frac{BH}{\sin \angle BCF} = \frac{BC}{\sin \angle BHC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2BO$$

则
$$\frac{BH}{BO} = 2\sin \angle BCF = 2\cos B$$

从而
$$\frac{BH}{BO} = \frac{AN}{NG}$$

又 $\angle OBH = \angle ABC - \angle ABO - \angle CBE = \angle ABC - (\frac{\pi}{2} - \angle ACB) -$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACB\right)=\angle ACB-\angle BAC$$

则 $$\angle ANG=\angle ACB-\angle NDC=\angle ACB-\angle BAC=\angle OBH$$

故 $$\triangle BOH \backsim \triangle NGA$$

由 $$OB\perp FN, BH\perp AN$$

有 $$OH\perp AG$$

则 $$OH\perp MN$$

**证法7** （由南开大学李成章教授给出）

(1) 因为点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，则

$$\angle BOC=2\angle BAC$$

故 $$\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=90^\circ-\angle BAC$$

因为 $A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆，所以

$$\angle BDF=\angle BAC$$

记 $OB\cap FD=P$. 于是



$$\angle BPD=180^\circ-\angle PBD-\angle PDB=90^\circ$$

因此 $$OB\perp DF$$

同理 $$OC\perp DE$$

(2) 过点 $O$ 作 $OG\perp MN$ 于 $G$. 因为

$$AD\perp BC, BE\perp AC, CF\perp AB$$

则 $$\angle COG=\angle NME, \angle GOB=\angle FNM$$

$$\angle OBE=\angle ANF, \angle EBC=\angle DAN$$

$$\angle BCF=\angle MAD, \angle FCO=\angle EMA$$

对 $\triangle AMN$ 和点 $D$ 应用角元塞瓦定理有

$$1=\frac{\sin\angle MAD}{\sin\angle DAN}\cdot\frac{\sin\angle ANF}{\sin\angle FNM}\cdot\frac{\sin\angle NME}{\sin\angle EMA}=$$

$$\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle OBE}{\sin\angle GOB}\cdot\frac{\sin\angle COG}{\sin\angle FCO}=$$

$$\frac{\sin\angle COG}{\sin\angle GOB}\cdot\frac{\sin\angle OBE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCO}$$

由角元塞瓦定理的逆定理知 $OG$、$BE$、$CF$ 三线共点，即 $OG$ 过点 $H$. 又因为 $OG\perp MN$，所以 $OH\perp MN$.

**证法 8** (由湖北叶迎东、余水能、朱达坤给出)记 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

(1) 略.

(2) 因 $AD\perp BC$,$CF\perp AB$,则 $A$、$C$、$D$、$F$ 四点共圆,于是

$$\angle BFD=\angle C,\angle FDB=\angle A$$

同理

$$\angle EDC=\angle A$$

又由

$$\angle BDM+\angle BMD=\angle B$$

有

$$\angle BMD=\angle B-\angle A$$

则

$$\frac{DM}{BD}=\frac{\sin B}{\sin(B-A)}$$

同理

$$\frac{DN}{CD}=\frac{\sin C}{\sin(C-A)}$$

则

$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM}=\frac{DN}{DM}=\frac{\dfrac{CD\sin C}{\sin(C-A)}}{\dfrac{BD\sin B}{\sin(B-A)}}=\frac{CD\sin C}{BD\sin B}\cdot\frac{\sin(B-A)}{\sin(C-A)}$$



又 $\angle OBH=\angle OBC-\angle HBC=\dfrac{\pi-2\angle A}{2}-(\dfrac{\pi}{2}-\angle C)=\angle C-\angle A$

则

$$\sin\angle BOH=\frac{\sin(C-A)BH}{OH}$$

同理

$$\sin\angle COH=\frac{\sin(B-A)CH}{OH}$$

则

$$\frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}=\frac{\sin(B-A)CH}{\sin(C-A)BH}$$

由 $F$、$B$、$D$、$H$ 四点共圆,且 $BH$ 为直径,有

$$BH\sin\angle BHD=BH\sin C=BD$$

同理

$$CH\sin B=CD$$

则

$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM}=\frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}$$

又

$$\angle DMN+\angle DNM=\angle BOC=\angle BOH+\angle COH$$

则

$$\frac{\sin(\angle BOC-\angle DNM)}{\sin\angle DNM}=\frac{\sin(\angle BOC-\angle BOH)}{\sin\angle BOH}$$

从而

$$\sin\angle BOC\cot\angle DNM-\cos\angle BOC=$$
$$\sin\angle BOC\cot\angle BOH-\cos\angle BOC$$

即

$$\cot\angle DNM=\cot\angle BOH$$

又因 $\angle DNM$ 和 $\angle BOH$ 均为锐角,则 $\angle DNM=\angle BOH$,由 $OB\perp ND$,故 $OH\perp MN$.

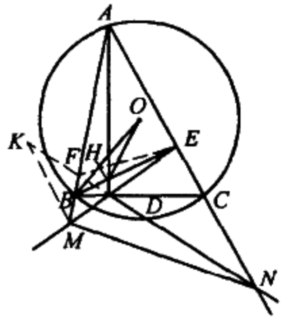


图23.9

**证法9**　（由大庆一中张利民给出）

(1) 略.

(2) 如图23.9,过 $M$ 作 $MK \parallel AC$,交 $DF$ 延长线于点 $K$.下证 $\triangle OBH \backsim \triangle NKM$.因

$$\frac{MK}{\sin \angle MFK}=\frac{KF}{\sin \angle KMA}$$

又 $$\angle KMA=\angle BAC$$

则 $$\frac{MK}{\sin C}=\frac{KF}{\sin A}$$

联结 $FE$.由

$$\frac{MF}{\sin \angle FEM}=\frac{FE}{\sin \angle FME}$$

又由共圆知 $$\angle FEM=180^\circ-2\angle B,\angle FME=\angle B-\angle A$$

则 $$\frac{MF}{\sin(180^\circ-2B)}=\frac{FE}{\sin(B-A)}$$

又 $$\frac{MA}{\sin B}=\frac{AE}{\sin(B-A)}$$

则 $$\frac{MF}{MA}=\frac{FE}{AE}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin B}$$

又 $$\frac{AE}{\sin C}=\frac{EF}{\sin A}$$

则 $$\frac{MF}{MA}=2\cos B\cdot\frac{\sin A}{\sin C}$$

因 $MK \parallel AC$,则$\frac{KF}{KN}=\frac{MF}{MA}$,从而

$$KF=KN\cdot 2\cos B\cdot\frac{\sin A}{\sin C}$$

则 $$\frac{MK}{\sin C}=\frac{KF}{\sin A}=KN\cdot\frac{2\cos B}{\sin C}$$

于是 $$\frac{MK}{KN}=2\cos B$$

又 $$\frac{BH}{OB}=\frac{2R\cos B}{R}=2\cos B$$

则 $$\frac{BH}{OB}=\frac{MK}{KN}$$

又 $$\angle MKN=\angle FNA=\angle C-\angle A$$

$$\angle OBH=(90^\circ-\angle A)-(90^\circ-\angle C)=\angle C-\angle A$$

则 $\angle MKN=\angle OBH$，因此 $\triangle OBH\backsim\triangle NKM$，又 $OB\perp KN$，$BH\perp KM$，故 $OH\perp MN$.

**证法 10** （由湖北徐胜林、朱达坤、余水能、叶迎东、冯丽珠等给出）

(1) 略.

(2) 如图 23.10，记 $\triangle ABC$ 的三个角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 设 $\angle DNM=\alpha$，$\angle DMN=\beta$，$\angle BOH=\alpha'$，$\angle COH=\beta'$.

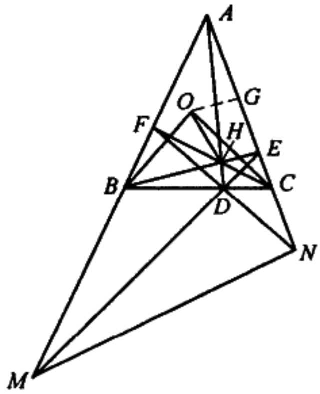



图 23.10

由 $A$、$F$、$D$、$E$ 四点共圆知 $\angle BDF=\angle CDE=\angle A$，则 $\angle BDM=\angle CDN=\angle A$，从而

$$\angle BMD=\angle B-\angle A,\angle CND=\angle C-\angle A$$

由正弦定理知



$$\frac{MD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin(B-A)}$$

$$\frac{DN}{\sin C}=\frac{CD}{\sin(C-A)},\frac{MD}{\cos\alpha}=\frac{DN}{\sin\beta}$$

则

$$\frac{MD}{DN}=\frac{\sin B\cdot BD}{\sin C\cdot CD}\cdot\frac{\sin(C-A)}{\sin(B-A)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad ①$$

由 $C$、$D$、$H$、$E$ 四点共圆知 $\angle CHE=\angle CDE=\angle A$，作 $OG\perp AC$，交 $AC$ 于点 $G$. 由 $O$ 是外心知，$OG\perp AC$ 且 $\angle COG=\angle B$. 又由 $BE\perp AC$，知 $BE/\!/OG$，则

$$\angle CPE=\angle COG=\angle B$$

即

$$\angle OCH=\angle CPE-\angle CHE=\angle B-\angle A$$

同理可求得

$$\angle OBH=\angle C-\angle A$$

由正弦定理

$$\frac{OH}{BH}=\frac{\sin(C-A)}{\sin\alpha'},\frac{OH}{CH}=\frac{\sin(B-A)}{\sin\beta'}$$

则

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{\sin(C-A)}{\sin(B-A)}\cdot\frac{BH}{CH} \quad ②$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BHD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CHD$ 中

$$BH=\frac{BD}{\sin\angle BHD}=\frac{BD}{\sin C},CH=\frac{CD}{\sin\angle CHD}=\frac{CD}{\sin B}$$

代入式②得

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{\sin(C-A)}{\sin(B-A)}\cdot\frac{BD\sin B}{CD\sin C} \qquad ③$$

由①、③可得

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad ④$$

而 $\alpha'+\beta'=\angle BOC=2\angle A=\angle BDM+\angle CDN=$

$$180°-\angle MDN=\alpha+\beta$$

$$0<\alpha'+\beta'<\pi,0<\alpha+\beta<\pi$$

由式④可得 $\alpha'=\alpha,\beta'=\beta$，即 $\angle COH=\angle DMN$，而 $OC\perp DE$，故 $OH\perp MN$.

**证法11** （由浙江镇海中学马洪炎给出）

(1) 略.

(2) 如图23.11，设 $OB$ 与 $FC$ 交于点 $L$，$OB$ 与 $FD$ 交于点 $G$，过 $G$ 作 $GK\perp MN$ 于 $K$. 不妨用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 表示 $\triangle ABC$ 的三内角，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$.

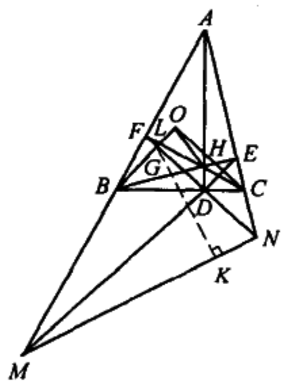



图23.11

由 $A$、$E$、$D$、$B$ 四点共圆，有

$$\angle AEM=\pi-\angle B$$

有 $$\angle AME=\angle B-\angle A$$

同理 $$\angle ANF=\angle C-\angle A$$

在 $\triangle AME$ 中，由正弦定理得

$$AM=\frac{AE\sin B}{\sin(B-A)}=\frac{AB\cos A\sin B}{\sin(B-A)}$$

则 $$AM=\frac{2R\sin C\cos A\sin B}{\sin(B-A)}$$

又 $$AF=AC\cos A=2R\sin B\cos A$$

则 $$MF=\frac{2R\sin C\cos A\sin B}{\sin(B-A)}-2R\sin B\cos A$$

在 $\triangle AFN$ 中，由

$$FN=\frac{\sin A2R\sin B\cos A}{\sin(C-A)}$$

有 $$\frac{MF}{FN}=\frac{[\sin C-\sin(B-A)]\sin(C-A)}{\sin A\sin(B-A)}$$

又 $$\sin C=\sin(A+B)$$

则
$$\frac{MF}{FN}=\frac{2\cos B\sin(C-A)}{\sin(B-A)}$$

由 $A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆，有
$$\angle BFG=\angle C$$

因 $\angle BFL=90^\circ$，由(1)知 $FG\perp BL$，则
$$\angle FLB=\angle BFG=\angle C$$

又
$$BF=BC\cos B$$
$$FL=BF\cot C=BC\cos B\cot C=\frac{2R\sin A\cos B\cos C}{\sin C}$$
$$BL=\frac{BF}{\sin C}=\frac{2R\sin A\cos B}{\sin C}$$

则
$$OL=OB-BL=R-\frac{2R\sin A\cos B}{\sin C}=\frac{R\sin(B-A)}{\sin C}$$

由 $F$、$B$、$D$、$H$ 四点共圆，有
$$\angle AHF=\angle B$$

于是
$$FH=AF\cot B=AC\cos A\cot B=2R\cos A\cos B$$
$$LH=FH-FL=2R\left(\cos A\cos B-\frac{\sin A\cos B\cos C}{\sin C}\right)=\frac{2R\cos B\sin(C-A)}{\sin C}$$



故
$$\frac{LH}{OL}=\frac{2\cos B\sin(C-A)}{\sin(B-A)},\frac{MF}{FN}=\frac{LH}{OL}$$

又
$$\angle OLH=\angle FLB=\angle BFG=\angle BFN$$

则
$$\triangle OLH\backsim\triangle NFM$$

有
$$\angle LOH=\angle FNM$$

又
$$\angle BGD=90^\circ,\angle GKN=90^\circ$$

则
$$\angle BGK=\angle FNM=\angle LOH$$

即
$$OH\parallel GK$$

又
$$GK\perp MN$$

故
$$OH\perp MN$$

**证法 12** （由重庆市一中石世银给出）

(1) 略.

(2) 如图 23.12，过 $O$ 作 $OG\perp AM$ 于 $G$，延长 $BH$ 交 $CO$ 延长线于点 $I$，延长 $OH$ 交 $MN$ 于点 $Q$，设 $FD$ 与 $BH$ 交于 $J$. 因

$$\angle BIG+\angle GBI=90^\circ,\angle BAE+\angle GBI=90^\circ$$

则

$$\angle BIG=\angle BAE,\angle OIH=\angle MAN \qquad ①$$

要证 $OH\perp MN$，只要证 $G$、$M$、$Q$、$O$ 四点共圆．由①知只要证 $\triangle OIH\backsim\triangle MAN$，即证

$$OI\cdot AN=AM\cdot IH \qquad ②$$

由式①得 $\qquad \angle OIB=\angle FAN$

因

$$\angle OBI=90^\circ-\angle BJF=90^\circ-\angle NJE=\angle FNA$$

则 $\qquad \triangle OBI\backsim\triangle FNA$

$$OI\cdot AN=AF\cdot BI \qquad ③$$

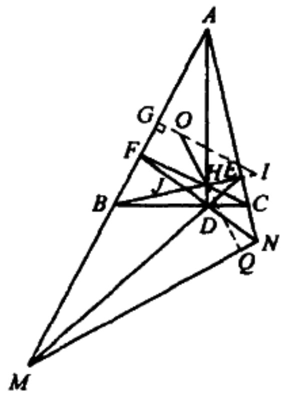



图 23.12

由式②、③只要证 $AM\cdot IH=AF\cdot BI$，即

$$\frac{AF}{AM}=\frac{IH}{BI}$$

又 $HF\ /\!/\ GI$，则只要证

$$\frac{AF}{AM}=\frac{GF}{GB} \qquad ④$$



在 $\triangle AME$ 中，有

$$\frac{AM}{\sin\angle AEM}=\frac{AE}{\sin\angle AME}$$

则

$$AM=\frac{AE\sin\angle AEM}{\sin\angle AME} \qquad ⑤$$

由 $\qquad \angle AEM=180^\circ-\angle B$

有 $\qquad \sin\angle AEM=\sin B$

而 $\qquad \angle AME=\angle B-\angle MDB=\angle B-\angle A$

则 $\qquad \sin\angle AME=\sin(B-A)$

代入式⑤得

$$AM=\frac{AE\sin B}{\sin(B-A)} \qquad ⑥$$

将 $AE=AB\cos A,AF=AC\cos A,GF=GB-BF=\frac{1}{2}AB-BC\cos B$ 代入式④，只要证

$$\frac{AC\cos A\sin(B-A)}{AB\cos A\sin B}=\frac{\frac{1}{2}AB-BC\cos B}{\frac{1}{2}AB}$$

即证
$$\frac{AC\sin(B-A)}{\sin B}=AB-2BC\cos B$$

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理,只要证

$$\sin B\sin(B-A)=\sin B(\sin C-2\sin A\cos B)$$

即证
$$\sin C=\sin(A+B)$$

此式显然成立.

**证法 13** (由四川方廷刚给出)

(1) 略.

(2) 如图 23.13,设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1,分别记 $EB$、$ED$ 与 $OC$ 的交点为 $P$ 和 $Q$,则由(1)有 $PE\perp EC$,$EQ\perp PC$.故 $\angle OPB=\angle EPC=\angle MEN=\angle B$.为证 $OH\perp MN$,要证 $\angle COH=\angle DMN$.可先证 $\triangle POH\backsim\triangle EMN$,为此要证



$$\frac{PO}{PH}=\frac{EM}{EN}$$

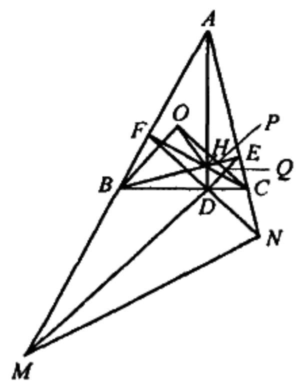


图 23.13

在 $\triangle POB$ 中

$$PO=\frac{BO\sin\angle OBE}{\sin\angle OPB}=\frac{\sin(C-A)}{\sin B}$$

在 $\triangle HCE$ 中

$$EH=CH\cos\angle EHC=2\cos C\cos A$$

在 $\triangle PCE$ 中

$$EP=PC\cos\angle EPC=(OC-OP)\cos B=\left[1-\frac{\sin(C-A)}{\sin B}\right]\cos B=2\cos C\sin A\cot B$$

由此可得
$$PH=EH-EP=2\cos C(\cos A-\sin A\cot B)=\frac{2\cos C\sin(B-A)}{\sin B}$$

于是
$$\frac{PO}{PH}=\frac{\sin(C-A)}{2\cos C\sin(B-A)}$$

又
$$ED=CH\sin C=2\cos C\sin C=\sin 2C$$

在$\triangle EDN$中，有

$$EN=\frac{ED\sin\angle EDN}{\sin\angle END}=\frac{\sin 2C\sin 2A}{\sin(C-A)}$$

$$DN=\frac{ED\sin\angle DEN}{\sin\angle END}=\frac{\sin 2C\sin B}{\sin(C-A)}$$

同理

$$DM=\frac{\sin 2B\sin C}{\sin(B-A)}$$

于是　$EM=ED+DM=\frac{\sin C}{\sin(B-A)}[2\cos C\sin(B-A)+\sin 2B]=$

$$\frac{\sin C}{\sin(B-A)}\cdot\sin 2A$$

从而

$$\frac{EM}{EN}=\frac{\sin(C-A)}{2\cos C\sin(B-A)}$$

这就证明了$\frac{PO}{PH}=\frac{EM}{EN}$成立.故

$$\triangle POH\backsim\triangle EMN,\angle COH=\angle DMN$$

所以

$$OH\perp MN$$



**证法14**　(同证法11人员给出)

(1)略.

(2)因$MF\perp CH,FN\perp OB,MD\perp OC,AN\perp BH,DF\perp OB,FA\perp CH,DA\perp BC$.则

$$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{CH}=0,\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BH}=0$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{CH}=0$$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

即　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FN})\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{OH}=$

$$\overrightarrow{MF}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH})+\overrightarrow{FN}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH})=\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{BH}=$$

$$(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{BH}=$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{FA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{BC}=$$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

故

$$MN\perp OH$$

**证法15**　(1)设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$，三边长依次为$a$、$b$、$c$，三个内角依次为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.则

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AD}=$$
$$R\cdot b\cos A\cos\frac{1}{2}(\pi-2C)-R\cdot c\sin B\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\pi-2A)\right]=$$
$$R\cdot 2R\sin B\cos A\sin C-R\cdot 2R\sin C\sin B\cos A=0$$

故
$$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{DF}$$
同理可证
$$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{DE}$$

(2) 设 $H'$ 满足$\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,由

$$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot$$
$$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

有$\overrightarrow{AH'}\perp\overrightarrow{BC}$,则 $AH'\perp BC$,同理 $BH'\perp AC$.

于是 $H'$ 与 $H$ 重合,故

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

又 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}$(因为$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp\overrightarrow{AM}$) =

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EM}=$$



$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}$(因为 $OC\perp DE$,所以$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{EM}$) =

$$|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cos(90^\circ-\angle B)=$$
$$|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\sin B=$$
$$|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A\sin B=$$
$$2R^2\cos A\sin B\sin C$$

同理
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}=2R^2\cos A\sin B\sin C$$
则
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$
从而
$$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{MN}$$
即
$$OH\perp MN$$

**证法16** 以 $BC$ 所在直线为 $x$ 轴,$BC$ 的中垂线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系(以 $AD$ 为 $y$ 轴亦可).设 $B(-a,0)$、$C(a,0)$、$A(b,c)$、$O(0,y)$、$D(b,0)$,且由 $|AO|=|OB|$ 即$(c-y)^2+b^2=a^2+y^2$,知 $y=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

(1) 由于 $k_{AB}=\dfrac{c}{a+b}$,$k_{CF}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{a+b}{c}$,知 $AB$、$CF$ 的方程分别为

$$y=\frac{c}{a+b}(x+a),y=-\frac{a+b}{c}(x-a)$$

从而
$$x_F=\frac{[(a+b)^2-c^2]a}{(a+b)^2+c^2},y_F=\frac{2(a+b)ac}{(a+b)^2+c^2}$$

即有
$$k_{FD}=\frac{2ac}{a^2-b^2-c^2}$$
而
$$k_{OB}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2ac}=-\frac{1}{k_{FD}}$$
故
$$OB\perp DF$$
同理
$$OC\perp DE$$

(2) 由于 $FD$、$AC$ 的方程分别为
$$y=\frac{2ac}{a^2-b^2-c^2}(x-b),y=\frac{c}{a-b}(x-a)$$
则求得
$$x_N=\frac{a(a^2-b^2-c^2)+2ab(a-b)}{3a^2-b^2-c^2-2ab}$$
$$y_N=\frac{2ac(a-b)}{3a^2-b^2-c^2-2ab}$$

又由于 $DE$、$AB$ 的方程分别为
$$y=\frac{2ac}{b^2+c^2-a^2}(x-b),y=\frac{c}{a+b}(x+a)$$
则求得
$$x_M=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+2ab(a+b)}{3a^2-b^2-c^2+2ab}$$
$$y_M=\frac{2ac(a+b)}{3a^2-b^2-c^2+2ab}$$
于是,得
$$k_{MN}=\frac{2bc}{3a^2-3b^2-c^2}$$

再由于 $x_H=x_A=b$,点 $H$ 在直线 $CF$ 上,求得
$$y_H=-\frac{a+b}{c}(x_H-a)=\frac{a^2-b^2}{c}$$
从而
$$k_{OH}=\frac{3a^2-3b^2-c^2}{2bc}=-\frac{1}{k_{MN}}$$
故
$$OH\perp MN$$



**证法 17**　(由安徽师大郭要红给出) 如图23.14,取 $D$ 为坐标原点,$BC$ 所在的直线为 $x$ 轴,设 $B(-b,0)$、$C(c,0)$、$A(0,a)$,$a$、$b$、$c>0$,则 $AC$ 的直线方程为
$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1 \qquad ①$$
由 $BE\perp AC$,有 $k_{BE}=\frac{c}{a}$,则 $BE$ 的直线方程为
$$y=\frac{c}{a}(x+b) \qquad ②$$

令 $x=0$,得 $y=\frac{bc}{a}$,所以 $H(0,\frac{bc}{a})$.

联立①、②,解方程组得

$$E(\frac{c(a^2-bc)}{a^2+c^2},\frac{ac(b+c)}{a^2+c^2})$$

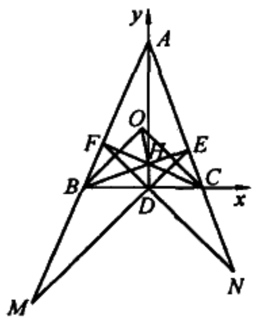


图 23.14

因为点 $E$ 不在 $AH$ 上,所以 $a^2-bc\neq0$,则 $ED$ 的直线方程为

$$y=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}x \quad ③$$

$AB$ 的直线方程为

$$\frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=1 \quad ④$$

联立③、④,解方程组得

$$M(\frac{b(a^2-bc)}{b^2+2bc-a^2},\frac{ab(b+c)}{b^2+2bc-a^2})$$



由 $CF\perp AB$,有 $k_{CF}=-\frac{b}{a}$,则 $CF$ 的直线方程为

$$y=-\frac{b}{a}(x-c) \quad ⑤$$

联立④、⑤,解方程组得

$$F(-\frac{b(a^2-bc)}{a^2+b^2},\frac{ab(b+c)}{a^2+b^2})$$

$FD$ 的直线方程为

$$y=-\frac{a(b+c)}{a^2-bc}x \quad ⑥$$

联立①、⑥,解方程组得

$$N(\frac{c(a^2-bc)}{a^2-2bc-c^2},\frac{-ac(b+c)}{a^2-2bc-c^2})$$

设 $AB$ 的中点为 $P$,则 $P(-\frac{b}{2},\frac{a}{2})$.直线 $OP$ 的方程为

$$y-\frac{a}{2}=-\frac{b}{a}(x+\frac{b}{2})$$

令 $x=\frac{c-b}{2}$,得 $y=\frac{a^2-bc}{2a}$,所以

$$O(\frac{c-b}{2},\frac{a^2-bc}{2a})$$

(1) 因为 $k_{OB}=\frac{a^2-bc}{a(b+c)}$，$k_{DF}=-\frac{a(b+c)}{a^2-bc}$，所以 $k_{OB}\cdot k_{DF}=-1$，即 $OB\perp DF$.

因为 $k_{OC}=-\frac{a^2-bc}{a(b+c)}$，$k_{ED}=\frac{a(b+c)}{a^2-bc}$，所以 $k_{OC}\cdot k_{ED}=-1$，即 $OC\perp DE$.

(2) 因为 $k_{MN}=\frac{a(b-c)}{a^2-3bc}$，$k_{OH}=\frac{a^2-3bc}{a(c-b)}$，所以 $k_{MN}\cdot k_{OH}=-1$，即 $OH\perp MN$.

**试题B1**　$\triangle ACB$ 的三边长分别为 $a$、$b$、$c$，$b<c$，$AD$ 是 $\angle A$ 的内角平分线，点 $D$ 在 $BC$ 上.

(1) 求在线段 $AB$、$AC$ 内分别存在点 $E$、$F$(不是端点)满足 $BE=CF$ 和 $\angle BDE=\angle CDF$ 的充分必要条件(用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 表示).

(2) 在点 $E$ 和 $F$ 存在的情况下，用 $a$、$b$、$c$ 表示 $BE$ 的长.

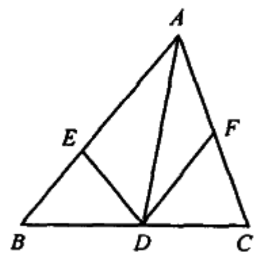



图23.15



**解**　(1) 如图23.15，若在线段 $AB$、$AC$ 内存的点 $E$、$F$，满足 $BE=CF$ 和 $\angle BDE=\angle CDF$，则因点 $D$ 到 $AB$ 和 $AC$ 的距离相等，所以，有

$$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDF}$$

从而有

$$BD\cdot DE=DC\cdot DF \quad ①$$

由余弦定理，有

$$BD^2+DE^2-2BD\cdot DE\cos\angle BDE=BE^2=CF^2=CD^2+DF^2-2CD\cdot DF\cos\angle CDF \quad ②$$

因 $\angle BDE=\angle CDF$，故由①和②可得

$$BD^2+DE^2=CD^2+DF^2 \quad ③$$

$$BD+DE=CD+DF \quad ④$$

由①和④可知下列两种情形之一成立，即

$$\begin{cases}BD=CD\\DE=DF\end{cases} \quad ⑤$$

$$\begin{cases}BD=DF\\DE=CD\end{cases} \quad ⑥$$

因 $b < c$,故式⑤不可能成立.所以,式⑥成立.从而 $\triangle DEB \cong \triangle DCF$,进而有

$$\angle B = \angle DFC, \angle C = \angle BED$$

所以
$$\angle B = \angle DFC > \angle DAF = \frac{1}{2}\angle A$$

即
$$2\angle B > \angle A$$

这是点 $E$ 和 $F$ 存在的必要条件.

反之,若 $2\angle B > \angle A$,则

$$\angle ADC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A > \angle A$$

$$\angle ADB = \angle C + \frac{1}{2}\angle A > \angle A$$

于是,可在 $\triangle ABC$ 内部作 $\angle BDE = \angle A, \angle CDF = \angle A$,且使点 $E$ 在 $AB$ 内,点 $F$ 在 $AC$ 内.这导致 $A、C、D、E$ 和 $A、B、D、F$ 都四点共圆.所以

$$\angle B = \angle DFC$$

从而
$$\triangle BDE \backsim \triangle FDC$$

 又因这两个三角形过点 $D$ 的高相等,所以 $\triangle BDE \cong \triangle FDC$,故 $BE = CF$.

综上可知,所求的充分必要条件是 $2\angle B > \angle A$

(2) 由(1)中论述知 $A、C、D、E$ 和 $A、B、D、F$ 都四点共圆.所以

$$BE \cdot BA = BD \cdot BC, CF \cdot CA = CD \cdot CB$$

又因
$$BE = CF$$

所以
$$BE(AB + AC) = BC(BD + DC) = BC^2$$

即
$$BE = \frac{a^2}{b + c}$$

**试题 B2** 对于平面上任意 4 个不同的点 $P_1、P_2、P_3、P_4$,求比值

$$\frac{\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} P_iP_j}{\min\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} P_iP_j} \qquad ①$$

的最小值.

**解** 先证如下的引理.

引理 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB \geqslant m, AC \geqslant m$, $\angle BAC = \alpha$,则 $BC \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$.

引理的证明 如图 23.16,作 $\angle A$ 的平分线 $AD$,由正弦定理有

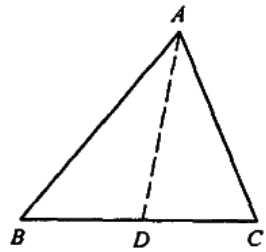


图 23.16

$$BC = BD + DC = AB\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB} + AC\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} =$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\angle ADB}(AB + AC) \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$$

回到原题的解.

记 $m = \min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j, k = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j$,分类估计式 ① 的值.

(i) 若 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 中有三点共线,不妨设前三点共线,于是,有

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_3 \geqslant 4m$$

从而 $k \geqslant 7m$,故 $\frac{k}{m} \geqslant 7$.

(ii) 若四点的凸包是三角形,不妨设点 $P_4$ 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内部,且不妨设 $\angle P_1P_4P_2 \geqslant 120^\circ$.由引理知

$$P_1P_2 \geqslant 2m\sin\frac{\angle P_1P_4P_2}{2} \geqslant 2m\sin 60^\circ = \sqrt{3}m$$

从而

$$\frac{k}{m} \geqslant 5 + \sqrt{3} \qquad ②$$



(iii) 凸包是四边形 $P_1P_2P_3P_4$.若凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 有一个内角不小于 $120^\circ$,不妨设为 $\angle P_2P_1P_4$,由引理有 $P_2P_4 \geqslant \sqrt{3}m$.从而式 ② 成立.

如图 23.17,设凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个内角都小于 $120^\circ$.于是,总有两个相邻内角之和不小于 $180^\circ$.不妨设 $\alpha + \beta = \angle P_4P_1P_2 + \angle P_1P_2P_3 \geqslant 180^\circ$ 且 $\alpha \geqslant \beta$.

由于 $\alpha < 120^\circ$,故 $\beta > 60^\circ$.所以

$$\frac{\alpha+\beta}{4} \geqslant 45^\circ, 0^\circ \leqslant \frac{\alpha-\beta}{4} < 15^\circ$$

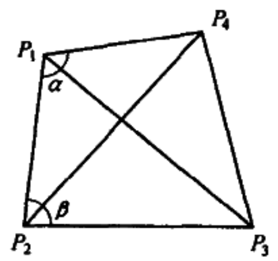



图 23.17

由引理有

$$P_2P_4 \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}, P_1P_3 \geqslant 2m\sin\frac{\beta}{2}$$

则
$$P_1P_3 + P_2P_4 \geqslant 2m\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) = 4m\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \geqslant$$
$$4m\sin 45^\circ\cos 15^\circ = 2m(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = (\sqrt{3}+1)m$$

所以,式 ② 成立.

综上可知,在所有情况下,式 ② 均成立.

另一方面,当 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 是有一个内角为 60° 的菱形的四个顶点时,式 ② 中等号成立.

所以,所求的 $\frac{k}{m}$ 的最小值为 $5+\sqrt{3}$.

**试题 C** 设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在的直线分别交于 $E$、$F$ 两点,两对角线的交点为 $P$,过 $P$ 作 $PO \perp EF$ 于 $O$.求证:$\angle BOC = \angle AOD$.

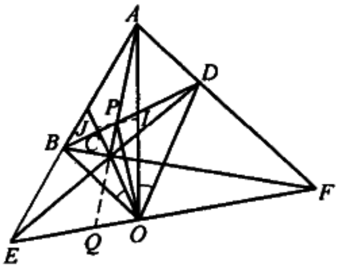



图 23.18

**证法 1** 如图 23.18,只需要证明 $OP$ 既是 $\angle AOC$ 的平分线,也是 $\angle DOB$ 的平分线即可.

不妨设 $AC$ 交 $EF$ 于 $Q$.考虑 $\triangle AEC$ 和点 $F$.由塞瓦定理可得

$$\frac{EB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DE} = 1 \qquad ①$$

再考虑 $\triangle AEC$ 与截线 $BPD$,由梅涅劳斯定理有



$$\frac{ED}{DC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1 \qquad ②$$

比较 ①、② 两式可得

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{PC}{QC} \qquad ③$$

过 $P$ 作 $EF$ 的平行线分别交 $OA$、$OC$ 于 $I$、$J$,则有

$$\frac{PI}{QO} = \frac{AP}{AQ}, \frac{JP}{QO} = \frac{PC}{QC} \qquad ④$$

由 ③、④ 可得
$$\frac{PI}{QO} = \frac{JP}{QO}$$

即
$$PI = PJ$$

又
$$OP \perp IJ$$

则 $OP$ 平分 $\angle IOJ$,即 $OP$ 平分 $\angle AOC$.

同理可证:当 $BD$ 与 $EF$ 相交时,$OP$ 平分 $\angle DOB$;而当 $BD \parallel EF$ 时,过 $B$ 作 $ED$ 的平行线交 $AC$ 于 $G$,如图 23.19 所示,则

$$\frac{AG}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}$$

故 $GD \parallel CF$,从而,$BCDG$ 为平行四边形.

于是,$P$ 为 $BD$ 的中点.因此,$OP$ 平分 $\angle DOB$.

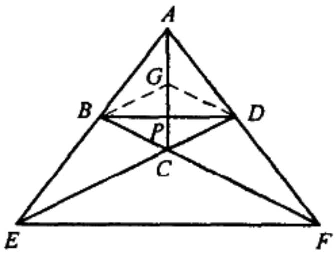



图23.19

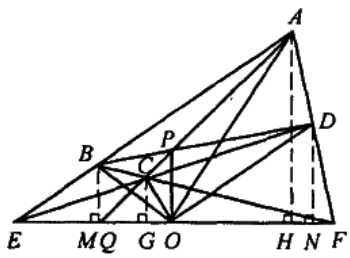



图23.20

**证法2**　如图23.20，作 $BM\perp EF$、$DN\perp EF$、$AH\perp EF$，垂足分别为 $M$、$N$、$H$，则 $BM\parallel AH\parallel DN$，则

$$\frac{PB}{PD}=\frac{OM}{ON} \quad ①$$

$$\frac{BM}{DN}=\frac{BM}{AH}\cdot\frac{AH}{DN}=\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AF}{DF} \quad ②$$

对 $\triangle ABD$ 及共点 $C$ 的直线 $AP$、$BF$、$DE$，由塞瓦定理得

$$\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AF}{DF}\cdot\frac{DP}{BP}=1 \quad ③$$

把①、②代入③整理得

$$\frac{BM}{DN}=\frac{OM}{ON}$$

则　$$\text{Rt}\triangle MOB\backsim\text{Rt}\triangle NOD$$

即　$$\angle MOB=\angle NOD$$

故　$$\angle BOP=\angle DOP$$

为证得 $\angle POC=\angle POA$，作 $CG\perp EF$ 于 $G$，延长 $AC$ 交 $EF$ 于 $Q$。只要证 $\text{Rt}\triangle CGO\backsim\text{Rt}\triangle AHO$。由 $CG\parallel PO\parallel AH$，又只要证 $\frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC}$。

对 $\triangle AEC$，一方面及点 $F$ 应用塞瓦定理，另一方面及截线 $BPD$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CD}{DE}=1,\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$$

由此即有　$$\frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC}$$

故　$$\angle BOC=\angle DOA$$

## 第1节　线段垂直的一个充要条件的应用

**定理**　如图23.21，若直线 $l\perp$ 线段 $AB$ 于 $H$，$M_1$ 与 $M$ 为 $l$ 上两点，则

$$M_1A^2-MA^2=M_1B^2-MB^2 \quad (*)$$

反之，若式(*)成立，则 $M_1M$ 所在的直线 $l\perp AB$。

**证明** 因 $l\perp$ 线段 $AB$,则由勾股定理得

$$AM_1^2-AH^2=HM_1^2, AM^2-AH^2=HM^2$$

两式相减得

$$AM_1^2-AM^2=HM_1^2-HM^2 \qquad ①$$

同理可得

$$BM_1^2-BM^2=HM_1^2-HM^2 \qquad ②$$

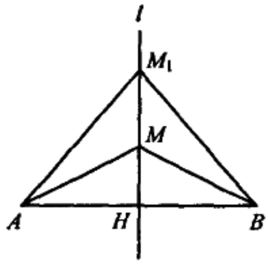



图 23.21

由 ①、② 得

$$AM_1^2-AM^2=BM_1^2-BM^2$$

反过来,可设 $\angle AHM_1=\theta$,则 $\angle BHM_1=\pi-\theta$,故

$$M_1A^2-AM^2=AH^2+HM_1^2-2AH\cdot HM_1\cos\theta-AH^2-HM^2+2AH\cdot MH\cos\theta=HM_1^2-HM^2-2AH\cdot M_1H\cdot\cos\theta+2AH\cdot MH\cos\theta$$

$$M_1B^2-MB^2=BH^2+HM_1^2-2BH\cdot HM_1\cos(\pi-\theta)-BH^2-HM^2+2BH\cdot HM\cos(\pi-\theta)=HM_1^2-HM^2+2BH\cdot HM_1\cos\theta-2BH\cdot HM\cos\theta$$



又 $$M_1A^2-AM^2=M_1B^2-MB^2$$

则 $-2AH\cdot M_1H\cos\theta+2AH\cdot MH\cos\theta=2BH\cdot HM_1\cos\theta-2BH\cdot HM\cos\theta$

即 $$MH\cos\theta(AH+HB)=HM_1\cos\theta(AH+HB)$$

从而 $$M_1M\cos\theta=0$$

得 $\cos\theta=0$,又 $0<\theta<\pi$,则 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

故直线 $l\perp$ 线段 $AB$.

**注** 此定理即为第 5 章第 2 节中命题 10 的等价说法.

由定理,我们不难得到如下几个推论:①

**推论 1** 已知两点 $A$ 和 $B$,则满足 $AM^2-MB^2=k^2$($k$ 为常数)的点 $M$ 的轨迹,是垂直于 $AB$ 的一条直线 $l$(其中若设 $l$ 交 $AB$ 于 $H$,则 $AH^2-BH^2=k^2$).

推论 1 所述的轨迹称为定差幂线,是一个常见的轨迹,此处不再叙述其证明.

**推论 2** 由 $\triangle ABC$ 所在平面上的点 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别向边 $BC$、$CA$、$AB$ 引的垂线共点的充分必要条件是

---

① 周春荔.联赛加试几何题证明随想[J].中等数学,2002(2):16-18.

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$$

**证明** 必要性：设自点 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别向边 $BC$、$CA$、$AB$ 引垂线相交于一点 $M$，垂足依次为 $H_1$、$H_2$、$H_3$，如图 23.22，由定理得

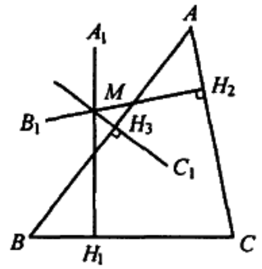



图 23.22

$$A_1B^2 - BM^2 = A_1C^2 - CM^2$$

即

$$A_1B^2 - A_1C^2 = BM^2 - CM^2 \quad ①$$

同理可得

$$B_1C^2 - B_1A^2 = CM^2 - AM^2 \quad ②$$

$$C_1A^2 - C_1B^2 = AM^2 - BM^2 \quad ③$$

① + ② + ③，得

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$$

即

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$$

充分性：设点 $M$ 是 $A_1$、$B_1$ 分别向 $BC$、$AC$ 引的垂线之交点，则有

$$MB^2 - MC^2 = A_1B^2 - A_1C^2 \quad ④$$

$$MC^2 - MA^2 = B_1C^2 - B_1A^2 \quad ⑤$$

④ + ⑤ 可得

$$MB^2 - MA^2 = A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 \quad ⑥$$

将式 ⑥ 代人已知条件

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$$

可得

$$MB^2 - MA^2 = BC_1^2 - C_1A^2$$

由推论 1 可知，点 $M$ 在过点 $C_1$ 向 $AB$ 引的垂线上，也就是过 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别向 $BC$、$CA$、$AB$ 引的三条垂线共点.

**推论 3** 给定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$，如果从 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别向 $BC$、$CA$、$AB$ 所在直线引的三条垂线共点，则从 $A$、$B$、$C$ 分别向 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 所在直线引的三条垂线亦共点.

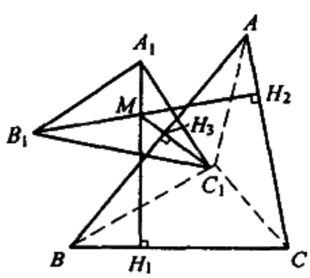



图 23.23

**证明** 如图 23.23，设 $A_1H_1$、$B_1H_2$、$C_1H_3$ 三条垂线相交于一点 $M$，则依推论 2，有

$$AB_1^2 - B_1C^2 + CA_1^2 - A_1B^2 + BC_1^2 - C_1A^2 = 0 \quad ⑦$$

式 ⑦ 表明，由 $A$、$B$、$C$ 分别向 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 所

在直线引的三条垂线亦共点.

**例1** 如图23.24,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$D$是$BC$的中点,$DE\perp AC$,$F$是$DE$的中点,求证:$AF\perp BE$.

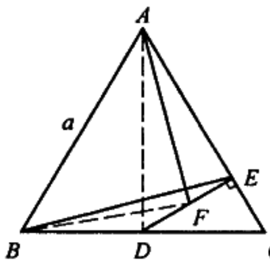


图23.24

**证明** 设$AB=a$,$\angle ABC=\alpha$,则$\angle ADE=\alpha$,即

$$AD=a\sin\alpha,AE=AD\sin\alpha=a\sin^2\alpha$$

$$DF=FE=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}a\sin\alpha\cos\alpha$$

又在$\triangle BDF$中,有

$$BF^2=BD^2+DF^2-2BD\cdot DF\cos(90^\circ+\alpha)$$

则

$$BF^2-FE^2=BD^2-2BD\cdot DF\cos(90^\circ+\alpha)=$$
$$a^2\cos^2\alpha-2a\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin\alpha\cos\alpha(-\sin\alpha)=$$
$$a^2\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)$$



又 $$AB^2-AE^2=a^2-a^2\sin^4\alpha=a^2(1-\sin^4\alpha)=$$
$$a^2(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)=a^2\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)$$

即 $$AB^2-AE^2=BF^2-FE^2$$

故 $$AF\perp BE$$

**例2** 在四边形$ABCD$中,$AB$、$CD$的中垂线相交于$P$,$AD$、$BC$的中垂线相交于$Q$,$M$、$N$分别是$AC$、$BD$的中点,求证:$PQ\perp MN$.

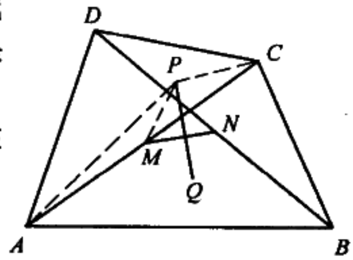


图23.25

**证明** 如图23.25,联结$PA$、$PC$、$PM$.在$\triangle PAC$中,由中线长公式得

$$PM^2=\frac{1}{2}(PA^2+PC^2)-\frac{1}{4}AC^2$$

同理 $$PN^2=\frac{1}{2}(PB^2+PD^2)-\frac{1}{4}BD^2$$

$$QM^2=\frac{1}{2}(QA^2+QC^2)-\frac{1}{4}AC^2$$

$$QN^2=\frac{1}{2}(QB^2+QD^2)-\frac{1}{4}BD^2$$

注意到$PA=PB$,$PC=PD$,$QA=QD$,$QC=QB$,便得

$$PM^2 + QN^2 = PN^2 + QM^2$$

故
$$PQ \perp MN$$

**例 3**　以四边形 $ABCD$ 的边为边长分别向外作四个正方形，如图 23.26 所示，其中心依次为 $L$、$M$、$N$、$K$，求证：$LN = MK$.

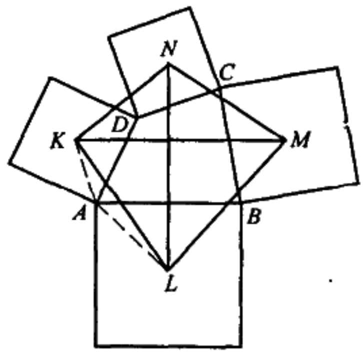



图 23.26

**证明**　联结 $KA$、$LA$，在 $\triangle ALK$ 中

$$AK^2 = \frac{1}{2}AD^2, AL^2 = \frac{1}{2}AB^2$$

所以 $$KL^2 = \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}AB^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}AB\cos(90° + A)$$

或 $$KL^2 = \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}AB^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}AB\cos[360° - (90° - A)]$$

总之有 $$KL^2 = \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}AB^2 + AD \cdot AB\sin A$$

同理 $$LM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 + AB \cdot BC\sin B$$

$$MN^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}CD^2 + BC \cdot CD\sin C$$

$$NK^2 = \frac{1}{2}CD^2 + \frac{1}{2}DA^2 + CD \cdot DA\sin D$$

注意到

$$AD \cdot AB\sin A + BC \cdot CD\sin C = AB \cdot BC\sin B + CD \cdot DA\sin D$$

便得
$$KL^2 + MN^2 = LM^2 + NK^2$$

故
$$LN \perp MK$$

**例 4**　已知圆内接四边形 $ABCD$ 中，$BA$ 与 $CD$ 交于 $P$，$AD$ 与 $BC$ 交于 $Q$，$AC$ 与 $BD$ 交于 $M$. 求证：圆心 $O$ 是 $\triangle PQM$ 的垂心.

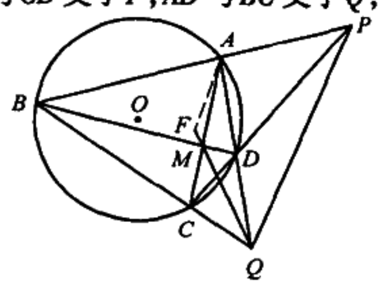



图 23.27

**证明**　设圆 $O$ 的半径为 $R$，如图 23.27 所示，由三角形外角大于其不相邻内角知

$$\angle QMD > \angle CBD = \angle DAM$$

延长 $QM$ 到 $F$，使

$$\angle FAD = \angle QMD$$

得 $A$、$D$、$M$、$F$ 共圆.又 $\angle QBD=\angle DAM=\angle DFM$,得 $B$、$F$、$D$、$Q$ 共圆,由圆幂定理,有

$$QM\cdot QF=QD\cdot QA=QO^2-R^2$$

$$QM\cdot MF=MB\cdot MD=R^2-MO^2$$

上两式相减,得 $$QM(QF-MF)=QO^2+MO^2-2R^2$$

即 $$QM^2=QO^2+MO^2-2R^2$$

同理可得 $$PM^2=PO^2+MO^2-2R^2$$

再相减,得 $$PM^2-QM^2=PO^2-QO^2$$

由此可得 $$OM\perp PQ$$

同理 $$PM\perp OQ, QM\perp OP$$

依定义,$O$ 是 $\triangle PQM$ 的垂心,故得证.

**例5** 已知圆$(A,r_A)$、圆$(B,r_B)$、圆$(C,r_C)$两两相交.证明:这三个圆两两相交所得的三条公共弦共点.



**证明** 如图23.28,由两圆连心线与公共弦垂直可知,问题可视为从诸圆的交点 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别向 $\triangle ABC$ 三边 $BC$、$CA$、$AB$ 引垂线,证这三条垂线共点.由于

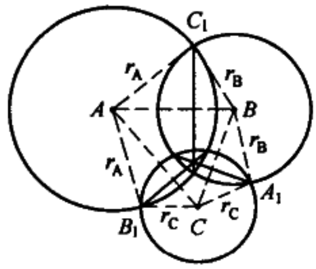



图23.28

$$A_1B^2-BC_1^2+C_1A^2-AB_1^2+B_1C^2-CA_1^2=$$
$$r_B^2-r_B^2+r_A^2-r_A^2+r_C^2-r_C^2=0$$

由推论2可得三条公共弦共点.

**例6** 如图23.29,$\triangle ABC$ 的三条高线 $AA_1$、$BB_1$、$CC_1$ 相交于点 $H$.求证:自 $A$、$B$、$C$ 分别作 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 的垂线也必交于一点.该点恰是 $\triangle ABC$ 的外心.

**证明** 图23.29中有两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$(垂足三角形),其中,自 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别作 $\triangle ABC$ 三边 $BC$、$CA$、$AB$ 的垂线共点于 $H$,根据推论3,自 $A$、$B$、$C$ 三点分别作 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 的垂线也必共点,记这点为 $O$.现证明点 $O$ 就是 $\triangle ABC$ 的外心.

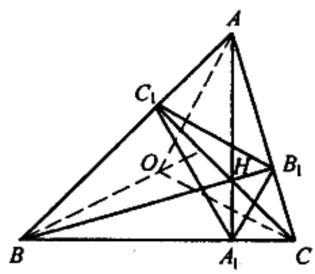



图23.29

由 $B$、$C$、$B_1$、$C_1$ 四点共圆,可得 $\angle AC_1B_1=\angle C$.而 $AO\perp B_1C_1$,所以 $\angle BAO=90°-\angle C$.

又由 $C$、$A$、$C_1$、$A_1$ 四点共圆，可得 $\angle A_1C_1B = \angle C$. 而 $BO \perp A_1C_1$，所以 $\angle ABO = 90° - \angle C$.

由此可知 $\angle BAO = \angle ABO$，于是 $AO = BO$.

同理可证 $BO = CO$.

故 $AO = BO = CO$，即点 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心.

**例7** 已知 $AA_1$、$BB_1$、$CC_1$ 分别为 $\triangle ABC$ 三边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的高. 设 $A_2$、$B_2$、$C_2$ 分别为 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 的中点，并设 $A_2R$、$B_2S$、$C_2T$ 是分别垂直于 $BC$、$CA$、$AB$ 的线段. 求证：$A_2R$、$B_2S$、$C_2T$ 三线共点.

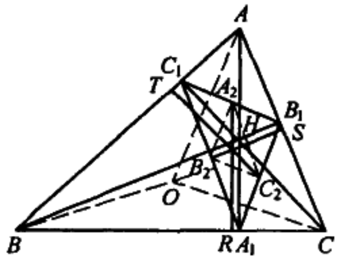



图 23.30

**证明** 如图 23.30，自 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 分别引 $BC$、$CA$、$AB$ 的三条垂线共点 $H$. 依例6可知，自 $A$、$B$、$C$ 分别引 $B_1C_1$、$C_1A_1$、$A_1B_1$ 的垂线共点于 $O$，且点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心.

由中位线定理可知 $B_1C_1 \parallel B_2C_2$，$A_1C_1 \parallel A_2C_2$，$A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

所以，$AO \perp B_2C_2$，$BO \perp C_2A_2$，$CO \perp A_2B_2$.

此时，对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 来说，自 $A$、$B$、$C$ 三点分别引 $B_2C_2$、$C_2A_2$、$A_2B_2$ 的垂线共点于 $O$，依据推论3，则有由 $A_2$、$B_2$、$C_2$ 分别引 $BC$、$CA$、$AB$ 的垂线 $A_2R$、$B_2S$、$C_2T$ 三线共点.

最后，我们回到2001年的全国高中数学联赛加试的平面几何题. 该题利用推论3进行解答，非常简洁.

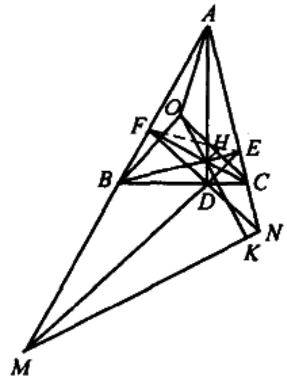



图 23.31

**证明** 如图 23.31.

(1) 由 $D$、$E$、$F$ 三点分别引 $BC$、$CA$、$AB$ 的垂线共点于 $H$，则由 $A$、$B$、$C$ 分别引 $EF$、$DF$、$DE$ 的垂线共点于 $\triangle ABC$ 的外心 $O$（见例6）. 故 $OB \perp DF$，$OC \perp DE$.

(2) 再看 $\triangle AMN$ 与 $\triangle OBC$ 自 $A$、$M$、$N$ 三点分别向 $\triangle OBC$ 三边 $BC$、$CO$、$OB$ 引的垂线 $AD$、$ME$、$NF$ 共点于 $D$，根据推论3，则有自 $O$、$B$、$C$ 三点分别引 $MN$、$AN$、$AM$ 的垂线 $OK$、$BE$、$CF$ 亦应共点. 但已知其中 $BE$、$CF$ 相交于点 $H$，所以 $OK$ 亦必过点 $H$. 换言之，$OH \perp MN$ 成立.

## 第2节　完全四边形的优美性质(五)[①]

我们在前面几节中给出了一般完全四边形的24条优美性质,其实,完全四边形还有一系列优美性质(如本节例5、6、7、8、9等).熟悉并应用这些优美性质,不仅能简捷地处理某些平面几何问题,还可使我们深刻地认识到一些几何问题间的密切联系.下面举几例说明之.

**例1**　在凸四边形 $ABCD$ 中,对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$,$E$ 是 $CD$ 边上一点,$BE$ 交 $AC$ 于 $G$,$DG$ 交 $BC$ 于 $F$.求证:$\angle FAC = \angle EAC$.

(1999年全国高中联赛加试题)

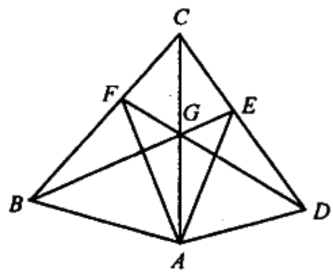


图23.32

**证明**　如图23.32,由于点 $A$ 是完全四边形 $CFBGDE$ 的对角线 $CG$ 所在直线上一点,满足 $\angle BAC = \angle DAC$,于是由完全四边形的性质12,即知 $\angle FAC = \angle EAC$.



**注**　我们针对性质12的图21.27指出如下几点.

(1) 显然,例1是性质12当 $G$ 在 $AD$ 的延长线上且 $0° < \angle AGC = AGE < 90°$ 时的情形.

(2) 若 $G$ 在 $AD$ 的延长线上,且 $\angle AGC = \angle AGE = 90°$ 时,则为1994年加拿大数学奥林匹克题或2003年保加利亚奥林匹克题:在锐角 $\triangle ABC$ 中,设 $AD$ 是 $BC$ 边上的高,$P$ 是线段 $AD$ 上任一点,$BP$ 和 $CP$ 的延长线分别交 $AC$、$AB$ 于 $E$、$F$.求证:$\angle EDP = \angle FDP$.

(3) 若 $G$ 在 $AD$ 的延长线上,且 $90° < \angle AGC = \angle AGE < 180°$ 时,则为《数学教学》杂志的数学问题561号:设 $A$ 为 $\triangle DBC$ 内一点,满足 $\angle DAC = \angle BAC$,$F$ 是线段 $AC$ 上任一点,直线 $DF$、$BF$ 分别交边 $BC$、$CD$ 于 $G$、$E$.求证:$\angle GAC = \angle EAC$.

(4) 若 $G$ 在对角线 $AD$ 上,且 $\angle AGC = \angle AGE = 90°$ 时,则为《数学教学》杂志的数学问题651号:在凸四边形 $ABCD$ 中,边 $AB$、$DC$ 的延长线交于点 $E$,边 $BC$、$AD$ 的延长线交于点 $F$.若 $AC \perp BD$,求证:$\angle EGC = \angle FGC$.

**例2**　给出性质5(即第1章第3节中的完全四边形的三条对角线的中点共线)的另一种证法.

---

① 沈文选.完全四边形的性质应用举例[J].中等数学,2006(10):16-20.

**证明**　如图23.33,设 $M$、$N$、$P$ 分别是完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线 $AD$、$BF$、$CE$ 的中点,$AD$ 与 $BF$ 交于点 $K$.由于边 $AB$、$FD$ 所在直线交于点 $C$,边 $AF$、$BD$ 所在直线交于点 $E$,则对完全四边形 $EFAKBD$ 和完全四边形 $CDFKAB$,分别应用性质10,即知

$$S_{ABDF}=4S_{\triangle EMN},S_{ABDF}=4S_{\triangle CMN}$$

故 $S_{\triangle EMN}=S_{\triangle CMN}$,即 $E$、$C$ 到直线 $MN$ 的距离相等.

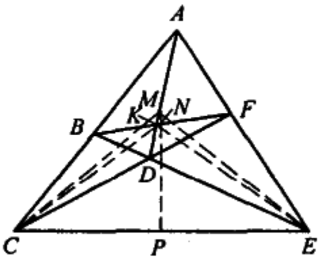



图23.33

设直线 $MN$ 交对角线 $CE$ 于点 $P'$,则由 $E$、$C$ 与直线 $MN$ 等距,知 $P'$ 为 $CE$ 的中点,即 $P'$ 与 $P$ 重合.故 $M$、$N$、$P$ 三点共线.

**例3**　如图23.34,四边形 $ABCD$ 的两组对边延长后得交点 $E$、$F$,对角线 $BD$ // $EF$,$AC$ 的延长线交 $EF$ 于 $G$.求证:$EG=GF$.

(1978年全国高中竞赛题)

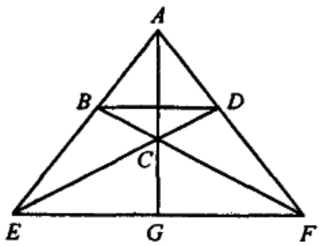



图23.34

**证法1**　由 $BD$ // $EF$,知$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$,即$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{FD}{DA}=1$.

在完全四边形 $ABECFD$ 中,应用性质2(或塞瓦定理)有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$$

故$\frac{EG}{GF}=1$,从而 $EG=GF$.

**证法2**　令$\frac{AC}{CG}=p_1,\frac{EC}{CD}=p_2,\frac{FC}{CB}=p_3$,由性质3知

$$\frac{AB}{BE}=\lambda_3=\frac{1+p_1}{1+p_2},\frac{AD}{DF}=\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1+p_1}{1+p_3},\frac{EG}{GF}=\lambda_1=\frac{1+p_2}{1+p_3}$$

因为 $BD$ // $EF$,有

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$$

亦即

$$1+p_2=1+p_3$$

而
$$\frac{EG}{GF}=\frac{1+p_2}{1+p_3}=1$$
故
$$EG=GF$$

**证法3** 由于 $BD\,/\!/\,EF$,按射影几何观点,可设直线 $BD$、$EF$ 相交于无穷远点 $P$,则由性质4,对角线 $EF$ 所在直线被调和分割,即$\frac{EG}{EP}=\frac{GF}{PF}$.而由射影几何知识有 $EP=PF$,故 $EG=GF$.

**例4** 如图 23.35,任意五角星形 $A_1A_2A_3A_4A_5C_1C_2C_3C_4C_5$ 的五个小三角形的外接圆分别交于星形外的五个点 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$.求证:$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$ 五点共圆.

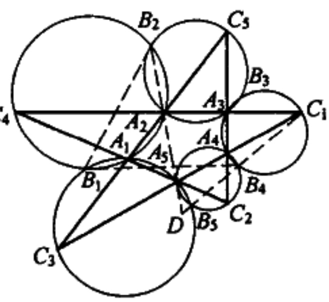


图 23.35

**证明** 由于五角星可看做是由五个完全四边形所组成,由性质 8,知每一个完全四边形有一个密格尔点,此题即证五个密格尔点 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$ 共圆.



设 $B_2A_2$ 的延长线与 $C_1B_4$ 的延长线交于点 $D$,令$\angle B_1B_4D=\angle 1$,$\angle B_1C_4A_3=\angle 2$,$\angle B_1B_2A_5=\angle 3$,$\angle D=\angle 4$,$\angle B_2B_3A_3=\angle 5$,$\angle A_3B_3B_4=\angle 6$,$\angle A_5A_2A_3=\angle 7$,$\angle A_3C_1B_4=\angle 8$.

注意到对完全四边形 $C_1A_2C_4A_1C_3A_5$ 及完全四边形 $C_4A_5C_2A_4C_1A_3$ 分别应用性质 8,知 $\triangle A_5C_1C_4$ 的外接圆要过 $B_1$ 及 $B_4$,因此 $B_1$、$B_4$、$C_1$、$C_4$ 四点共圆.

又 $A_2$、$B_2$、$C_4$、$B_1$ 共圆,则 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$,从而 $B_1$、$B_2$、$B_4$、$D$ 共圆.

再由 $A_2$、$B_2$、$A_3$、$B_3$ 共圆,知 $\angle 5=\angle 7$.又由 $A_3$、$B_3$、$C_1$、$B_4$ 共圆,知 $\angle 6=\angle 8$.因此 $\angle D+\angle B_3=\angle 4+\angle 5+\angle 6=\angle 4+\angle 7+\angle 8=180^\circ$,故 $B_2$、$B_3$、$B_4$、$D$ 共圆,即 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$D$ 五点共圆.

同样可证 $B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$ 共圆.故五个密格尔点共圆.

**例5** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,若 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$ 分别是 $\triangle ACF$、$\triangle ABE$、$\triangle DEF$、$\triangle BCD$ 外接圆的圆心,则 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$ 共圆.

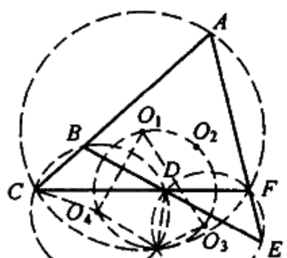


图 23.36

**证明** 由性质 8,知圆 $O_1$、圆 $O_2$、圆 $O_3$、圆 $O_4$ 共点于 $M$,如图 23.36 所示.

联结 $O_1O_4$、$CO_4$、$O_4M$、$MO_3$、$O_1O_3$,则

$$\angle O_1O_4M = 180° - \frac{1}{2}\angle CO_4M = 180° - \angle CDM$$

同理 $$\angle O_1O_3M = 180° - \angle FDM$$

所以 $$\angle O_1O_4M + \angle O_1O_3M = 360° - (\angle CDM + \angle FDM) = 180°$$

故 $\triangle ACF$ 的外心 $O_1$ 总在过 $O_4$、$O_3$ 和 $M$ 的定圆上.同理,$\triangle ABE$ 的外心 $O_2$ 也总在一个 $O_4$、$O_3$ 和 $M$ 的定圆上.故 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$ 四点共圆.

此例又是完全四边形的一条优美性质,不妨记为性质25.

其实,此例本质上是下述的2002年第43届IMO预选题或2003年中国国家队培训测试题.

已知圆 $S_1$ 与圆 $S_2$ 交于 $P$、$Q$ 两点,$A_1$、$B_1$ 为圆 $S_1$ 上不同于 $P$、$Q$ 的两个点,直线 $A_1P$、$B_1P$ 分别交圆 $S_2$ 于 $A_2$、$B_2$,直线 $A_1B_1$ 和 $A_2B_2$ 交于点 $C$.证明:当点 $A_1$ 和 $B_1$ 变化时,$\triangle A_1A_2C$ 的外心总在一个定圆周上.

**例6** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,若对角线 $CE$ 与对角线 $AD$ 的延长线交于点 $G$,联结 $BG$、$FG$、$BF$.则 $S_{\triangle GFB} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ACE}$.

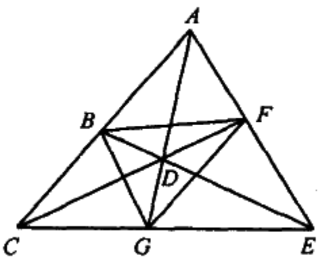


图23.37

**证明** 如图23.37,令 $\frac{AD}{DG} = p_1$,$\frac{CD}{DF} = p_2$,$\frac{ED}{DB} = p_3$,$\frac{CG}{GE} = \lambda_1$,$\frac{EF}{FA} = \lambda_2$,$\frac{AB}{BC} = \lambda_3$.则由性质3,知

$$p_1p_2p_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 2 = \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \geqslant 3\sqrt[3]{\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2} + 3\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_1\lambda_1} + 2 \geqslant 8$$

且 $$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{AF}{AE} = \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\cdot\frac{1}{1+\lambda_2} = \frac{p_1p_3-1}{p_1p_3+p_3}\cdot\frac{p_2+1}{p_2p_3+p_2} = \frac{p_1p_2p_3+p_1p_3-p_2-1}{p_2p_3(1+p_1)(1+p_3)} = \frac{2+p_1+p_2+p_3+p_1p_3-p_2-1}{p_2p_3(p_1+1)(p_3+1)} = \frac{(p_1+1)(p_3+1)}{p_2p_3(p_1+1)(p_3+1)} = \frac{1}{p_2p_3}$$

同理 $$\frac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{p_1p_3},\frac{S_{\triangle GEF}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{p_1p_2}$$

从而 $$S_{\triangle GFB} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle BCG} - S_{\triangle GEF} = S_{\triangle ACE}\left(1 - \frac{1}{p_2p_3} - \frac{1}{p_1p_3} - \frac{1}{p_1p_2}\right) =$$

$$S_{\triangle ACE}\frac{p_1p_2p_3-p_1-p_2-p_3}{p_1p_2p_3}=$$

$$\frac{2}{p_1p_2p_3}S_{\triangle ACE}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ACE}$$

此例也是完全四边形的一条优美性质.不妨记为性质26.

比例及其特殊情形,即为如下两道竞赛题.

(1) 设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内点,$Q$、$R$、$S$ 分别是 $A$、$B$、$C$ 与 $P$ 的连线和对边的交点.求证:$S_{\triangle QRS}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

(1990年第31届IMO预选题)

(2) 如果 $AD$、$BE$ 和 $CF$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.证明:$\triangle DEF$ 的面积不超过 $\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$.

(1981年民主德国数学奥林匹克题)



**例7** 在完全四边形 $ABECFD$ 中,对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $P$.若过点 $P$ 作 $PO$ 垂直于对角线 $EF$ 于 $O$,联结 $BO$、$DO$,则 $\angle BOC=\angle AOD$.

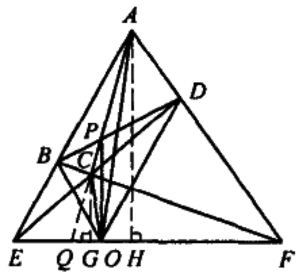



图 23.38

**证明** 如图23.38,设对角线 $AC$ 的延长线交 $EF$ 于点 $Q$.欲证 $\angle BOC=\angle AOD$,只要证 $\angle POC=\angle POA$ 及 $\angle POB=\angle POD$.

欲证 $\angle POC=\angle POA$,只要证 $\angle COE=\angle AOF$.为此,作 $CG\perp EF$ 于 $G$,作 $AH\perp EF$ 于 $H$.又只要证

$$\mathrm{Rt}\triangle CGO\backsim\mathrm{Rt}\triangle AHO$$

只须证
$$\frac{CG}{AH}=\frac{GO}{OH}$$

由
$$CG\parallel PO\parallel AH$$

知
$$\frac{GO}{OH}=\frac{PC}{PA},\frac{CG}{AH}=\frac{QC}{QA}$$

从而又只要证
$$\frac{PC}{PA}=\frac{QC}{QA}$$

即
$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}$$

对完全四边形 $ABECFD$,应用性质4(第1章第3节),即有

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PC}{QC}$$

同理,可证 $$\angle POB = \angle POD$$

故 $$\angle BOC = \angle AOD$$

此例又是完全四边形的一条优美性质.不妨记为性质27.

其实,此例即为2002年中国国家队选拔赛题当 $AC$ 或 $BC$ 均与 $EF$ 不平行的情形:设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边 $AB$ 与 $DC$、$AD$ 与 $BC$ 所在直线分别交于 $E$、$F$ 两点,两对角线的交点为 $P$,过 $P$ 作 $PO\perp EF$ 于 $O$.求证:$\angle BOC=\angle AOD$.

**例8**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中,点 $H$ 在对角线 $AD$ 上,点 $G$ 在 $AD$ 的延长线上,直线 $HF$、$GE$ 相交于点 $Q$,直线 $HB$、$GC$ 相交于点 $P$.

(1) 求证:直线 $PF$、$BQ$、$AD$ 三线共点.

(2) 若对角线 $FB$ 与 $EC$ 所在直线交于点 $R$,则 $R$、$P$、$Q$ 三点共线.

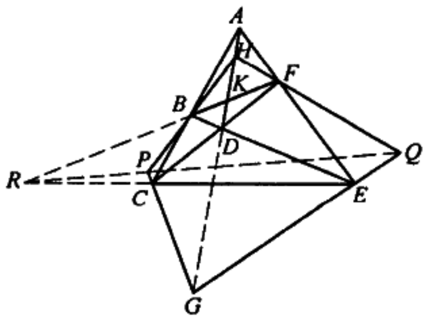



图23.39

**证明**　(1) 设 $AD$ 与 $BF$ 交于点 $K$.

对完全四边形 $ABCDEF$ 由性质2中⑤式(或对 $\triangle ABF$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理)有

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FK}{KB}=1$$

又分别对完全四边形 $GHABPG$、$GHAFQE$ 应用性质1(或分别对 $\triangle ABH$ 及截线 $PCG$、$\triangle AHF$ 及截线 $QEG$ 分别应用梅涅劳斯定理),有

$$\frac{BP}{PH}\cdot\frac{HG}{GA}\cdot\frac{AC}{CB}=1,\frac{HQ}{QF}\cdot\frac{FE}{EA}\cdot\frac{AG}{GH}=1$$

以上三式相乘,得 $$\frac{FK}{KB}\cdot\frac{BP}{PH}\cdot\frac{HQ}{QF}=1$$

对 $\triangle BFH$ 应用塞瓦定理之逆,知 $PF$、$BQ$、$AD$ 三线共点.

(2) 对完全四边形 $EFABRC$,应用性质4,知 $R$、$P$、$Q$ 三点共线.或根据笛沙格定理,注意到 $\triangle BHF$ 和 $\triangle CGE$ 三双对应顶点的连线交于点 $A$,则它们对应边所在直线的交点 $R$、$P$、$Q$ 三点共线.

此例也可作为完全四边形的优美性质.不妨记为性质28.

**例9**　如图23.40,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$P$、$Q$、$R$、$S$ 分别是 $AB$、$BD$、$DF$、$FA$ 上的点.试证:直线 $PQ$、$AD$、$SR$ 相互平行或共点的充要条件是

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DR}{RF}\cdot\frac{FS}{SA}=1 \qquad (*)$$

**证明**　必要性:若直线 $PQ$、$AD$、$SR$ 相互平行,则

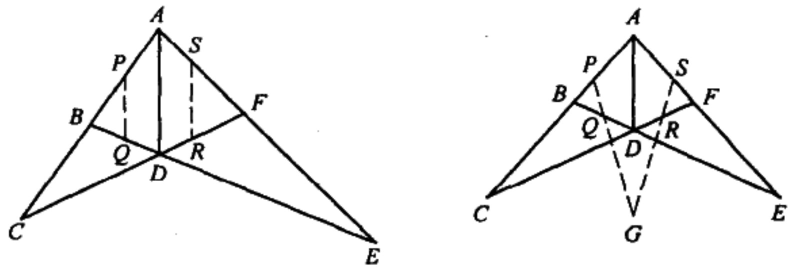



图 23.40

$$\frac{AP}{PB}=\frac{DQ}{QB},\frac{FS}{SA}=\frac{FR}{RD}$$

从而
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DR}{RF}\cdot\frac{FS}{SA}=1$$

若直线 $PQ$、$AD$、$SR$ 三线共点于 $G$，则图形中可以找到两个完全四边形 $APBQGD$、$ADGRFS$，分别由完全四边形的性质1中的②、①(或分别对 $\triangle ABD$ 及截线 $PQG$、对 $\triangle ADF$ 及截线 $SRG$ 应用梅涅劳斯定理)有



$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DG}{GA}=1,\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DR}{RF}\cdot\frac{FS}{SA}=1$$

上述两式相乘，即得

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DR}{RF}\cdot\frac{FS}{SA}=1$$

充分性：将上述证明逆过来，稍作整理即可(略).

由于完全四边形中既含有凸四边形，又含有凹四边形及折四边形. 上述例题可以说是针对凸四边形 $ABDF$ 而言的完全四边形的一条性质. 因此，也不妨称为性质 29.

由性质 29，我们可以看到或得到如下结论.

(1)2004 年中国数学奥林匹克平面几何题的背景：

凸四边形 $EFGH$ 的顶点 $E$、$F$、$G$、$H$ 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上，满足 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$；而点 $A$、$B$、$C$、$D$ 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 $H_1E_1$、$E_1F_1$、$F_1G_1$、$G_1H_1$ 上，满足 $E_1F_1 /\!/ EF$，$F_1G_1 /\!/ FG$，$G_1H_1 /\!/ GH$，$H_1E_1 /\!/ HE$. 已知 $\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$，求 $\frac{F_1C}{CG_1}$.

(2) 若四边形 $ABCD$ 外切于圆 $O$ 于点 $F$、$G$、$H$、$E$，则直线 $FE$、$BD$、$GH$ 相互

平行或共点.

事实上,如图 23.41,注意到圆的切线长定理,则知

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CH}{HD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BG}{BF}\cdot\frac{CH}{CG}\cdot\frac{DE}{DH}\cdot\frac{AF}{AE}=1$$

由性质 29,结论获证.

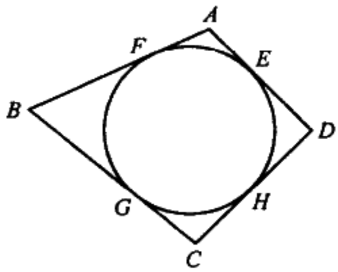



图 23.41

(3) 若四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$,由对角线 $AC$、$BD$ 的交点 $Q$ 向四边 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 作垂线得垂足 $F$、$G$、$H$、$E$,则直线 $FE$、$BD$、$GH$ 相互平行或共点.

事实上,如图 23.42 所示,令 $\angle BAC=\angle 1$, $\angle ABD=\angle 2$, $\angle DBC=\angle 3$, $\angle BCA=\angle 4$, $\angle ACD=\angle 5$, $\angle BDC=\angle 6$, $\angle ADB=\angle 7$, $\angle DAC=\angle 8$,则 $\angle 1=\angle 6$, $\angle 2=\angle 5$, $\angle 3=\angle 8$, $\angle 4=\angle 7$.

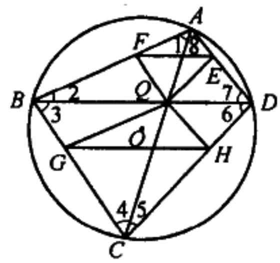



图 23.42

注意到直角三角形余切函数比值,则

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{GH}{HD}\cdot\frac{DE}{EA}=\frac{\cot\angle 1}{\cot\angle 2}\cdot\frac{\cot\angle 3}{\cot\angle 4}\cdot\frac{\cot\angle 5}{\cot\angle 6}\cdot\frac{\cot\angle 7}{\cot\angle 8}=1$$

由性质 29,结论获证.

# 第 24 章　2002 ~ 2003 年度试题的诠释

2002 年 8 月我国首次举办全国女子数学奥林匹克,其试题我们简记为女子赛试题.这一届 8 道试题中有 2 道平面几何试题.

**女子赛试题 1**　圆 $O_1$ 和圆 $O_2$ 相交于 $B$、$C$ 两点,且 $BC$ 是圆 $O_1$ 的直径,过点 $C$ 作圆 $O_1$ 的切线,交圆 $O_2$ 于另一点 $A$,联结 $AB$,交圆 $O_1$ 于另一点 $E$,联结 $CE$ 并延长,交圆 $O_2$ 于点 $F$.设点 $H$ 为线段 $AF$ 内的任意一点,联结 $HE$ 并延长,交圆 $O_1$ 于点 $G$,联结 $BG$ 并延长,与 $AC$ 的延长线交于点 $D$.求证:$\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$.

**证明**　如图 24.1,因 $BC$ 是圆 $O_1$ 的直径,$AC$ 与圆 $O_1$ 切于 $C$,故 $\angle BEC=\angle FEA=\angle BCA=\angle BCD=90°$.

设 $\angle ABC=\alpha\angle CBD=\beta$,则

$$\angle AFC=\alpha,\angle CEG=\beta$$

根据正弦定理,有

$$\frac{AH}{\sin\angle HEA}=\frac{HE}{\sin\angle HAE}$$

$$\frac{HF}{\sin\angle FEH}=\frac{HE}{\sin\angle HFE}$$

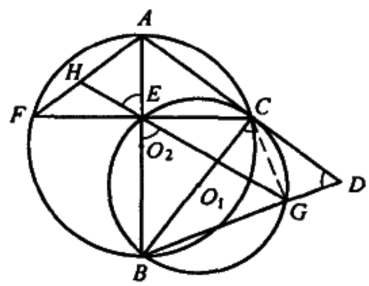



图 24.1

即
$$\frac{AH}{HE}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\frac{HF}{HE}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

两式相除得

$$\frac{AH}{HF}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \quad ①$$

在 Rt△$ABC$ 中,有
$$\frac{AC}{BC}=\tan\alpha$$

在 Rt△$BCD$ 中,有
$$\frac{CD}{BC}=\tan\beta$$

两式相除得

$$\frac{AC}{CD}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \quad ②$$

由 ①、② 知
$$\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$$

**女子赛试题 2**　锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 $AD$、$BE$、$CF$. 求证：$\triangle DEF$ 的周长不超过 $\triangle ABC$ 周长的一半.

**证法 1**　记 $\triangle ABC$ 各内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，各角所对边为 $a$、$b$、$c$，由于 $D$、$E$、$A$、$B$ 四点共圆，且 $AB$ 为该圆直径，根据正弦定理，可得
$$\frac{DE}{\sin\angle DAE}=AB=c$$
即
$$DE=c\sin\angle DAE$$
又
$$\angle DCA=90^\circ-\angle DAC$$
所以
$$DE=c\cos C$$
同理
$$DF=b\cos B$$
于是
$$\begin{aligned}DE+DF&=c\cos C+b\cos B=(2R\sin C)\cos C+(2R\sin B)\cos B=\\&R(\sin 2C+\sin 2B)=2R\sin(B+C)\cos(B-C)=\\&2R\sin A\cos(B-C)=a\cos(B-C)\leqslant a\end{aligned}$$
同理
$$DE+EF\leqslant b,EF+DF\leqslant c$$



将上述三式相加得
$$DE+EF+FD\leqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

**证法 2**　设 $M$ 为 $BC$ 中点，$E'$ 为 $E$ 关于 $BC$ 的对称点，$H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

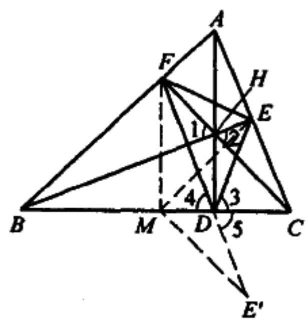


图 24.2

如图 24.2，因 $B$、$D$、$H$、$F$ 四点共圆，故 $\angle 1=\angle 4$. 同理，$\angle 2=\angle 3$. 又 $\angle 1=\angle 2$. 故 $\angle 4=\angle 3$. 又 $\angle 3=\angle 5$. 所以 $\angle 4=\angle 5$，$F$、$D$、$E'$ 三点共线.

在 Rt$\triangle BCE$ 和 Rt$\triangle BCF$ 中，有
$$EM=FM=\frac{1}{2}BC$$
而
$$ME'=ME$$
故
$$DE+DF=DE'+DF=E'F\leqslant MF+ME'=BC$$
同理
$$DE+EF\leqslant AC,EF+FM\leqslant AB$$
将上述三式相加，即知命题成立.

**证法 3**　先证 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的所有内接三角形中周长最短的三角形.

设点 $D'$ 是 $BC$ 边上任一固定点,如图 24.3 所示,作点 $D'$ 关于 $AB$、$AC$ 的对称点 $D_1$、$D_2$,联结 $D_1D_2$ 分别交 $AB$、$AC$ 于点 $E'$、$F'$,则 $\triangle D'E'F'$ 周长最短.

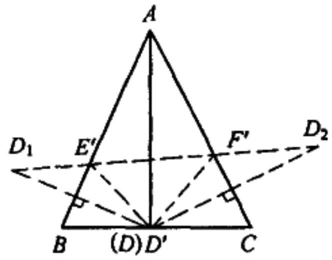


图 24.3

事实上

$$\triangle D'E'F' \text{ 的周长} = D'E' + E'F' + F'D' = D_1E' + E'F' + F'D_2 = D_1D_2$$

在 $AB$、$AC$ 上任取 $E_1$、$F_1$,则

$$\triangle DE_1F_1 \text{ 的周长} = DE_1 + E_1F_1 + F_1D = D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_2 \geqslant D_1D_2$$

当且仅当 $E_1$、$F_1$ 分别与 $E'$、$F'$ 重合时取等号. 所以,当点 $D'$ 固定时,上述 $\triangle D'E'F'$ 周长最短.

因 $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC$,$AD_1 = AD' = AD_2$,根据余弦定理,$D_1D_2$ 的长度仅与 $AD'$ 有关,当 $AD'$ 取最小值时,$D_1D_2$ 也取最小值. 此时,$\triangle D'E'F'$ 为 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形,故点 $D'$ 应为 $BC$ 边上高线的垂足 $D$.



如图 24.4,$\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形,则 $\triangle ABC$ 的三条高平分 $\triangle DEF$ 的内角,有

$$\angle AFE = \angle DFC = \angle CFD_2$$

从而,$E$、$F$、$D_2$ 三点共线.

同理,$D_1$、$E$、$F$ 三点共线.

综上所述,垂足 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形.

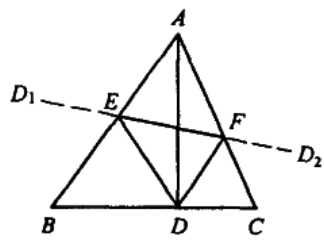


图 24.4

分别在 $\triangle ABC$ 的三边上取中点 $M$、$N$、$L$,则

$$DE + EF + FD \leqslant MN + NL + LM = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

**西部赛试题 1** 设 $O$ 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心,$P$ 为 $\triangle AOB$ 内部一点,$P$ 在 $\triangle ABC$ 的三边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的射影分别为 $D$、$E$、$F$. 求证:以 $FE$、$FD$ 为邻边的平行四边形位于 $\triangle ABC$ 内.

**证明** 如图 24.5,以 $FE$、$FD$ 为邻边作 $\square EFDG$. 为证命题成立,只需要证明

$$\angle FDE < \angle CED \quad ①$$

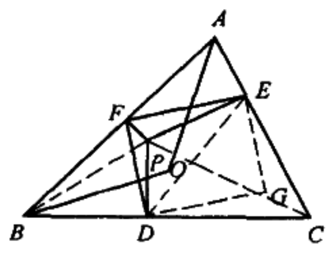


图 24.5

且

$$\angle FED < \angle EDC \qquad ②$$

注意到 ①、② 是对称的，故只需要证明其中一式成立，另一式子可以完全类似地证明.

对于式 ①，由于 $\angle FDE = \angle FDP + \angle EDP$，而 $B$、$D$、$P$、$F$ 四点共圆，故

$$\angle FDP = \angle FBP < \angle ABO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle C$$

(这里用到 $P$ 在 $\triangle AOB$ 内部及 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心)

又 $C$、$E$、$P$、$D$ 四点共圆，故

$$\angle PDE = \angle PCE$$

$$\angle CED = \angle CPD = 90° - \angle PCD$$

所以　$\angle FDE < (90° - \angle C) + \angle PCE = 90° - \angle PCD = \angle CED$

从而，式 ① 成立. 命题获证.

**西部赛试题 2**　在给定的梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$E$ 是边 $AB$ 上的动点，$O_1$、$O_2$ 分别是 $\triangle AED$、$\triangle BEC$ 的外心. 求证：$O_1O_2$ 的长为一定值.

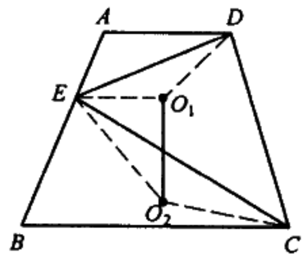



图 24.6

**证明**　如图 24.6，联结 $O_1E$、$O_1D$、$O_2E$、$O_2C$(不妨设 $\angle A \geqslant \angle B$). 注意到

$$\angle EO_1D = 360° - 2\angle A = 2(180° - \angle A) = 2\angle B$$

于是，有

$$\angle O_1ED = \frac{1}{2}(180° - \angle EO_1D) = 90° - \angle B$$

$$\angle O_2EC = \frac{1}{2}(180° - \angle EO_2C) = 90° - \angle B$$

从而，$\angle O_1ED = \angle O_2EC$. 故 $\angle O_1EO_2 = \angle DEC$.

另一方面，由正弦定理，可知

$$\frac{DE}{\sin A} = 2EO_1, \frac{EC}{\sin B} = 2EO_2$$

又因为 $\sin A = \sin B$，故

$$\frac{DE}{EC} = \frac{EO_1}{EO_2}$$

结合 $\angle O_1EO_2 = \angle DEC$，可知

$$\triangle O_1EO_2 \backsim \triangle DEC$$

所以
$$\frac{O_1O_2}{CD}=\frac{EO_1}{DE}=\frac{1}{2\sin A}$$
从而，$O_1O_2=\frac{CD}{2\sin A}$ 为定值.

**试题 A** 如图 24.7,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=60°$,$AB>AC$,点 $O$ 是外心,两条高 $BE$、$CF$ 交于点 $H$.点 $M$、$N$ 分别在线段 $BH$、$HF$ 上,且满足 $BM=CN$.求 $\frac{MH+NH}{OH}$ 的值.

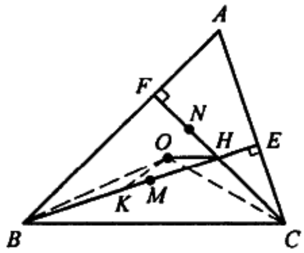


图 24.7

**解法 1** 如图 24.7,在 $BE$ 上取 $BK=CH$,联结 $OB$、$OC$、$OK$.由三角形外心的性质知 $\angle BOC=2\angle A=120°$.由三角形垂心的性质和 $\angle BHC=180°-\angle A=120°$.于是 $\angle BOC=\angle BHC$.故 $B$、$C$、$H$、$O$ 四点共圆.从而
$$\angle OBH=\angle OCH$$
又
$$OB=OC,BK=CH$$
有
$$\triangle BOK\cong\triangle COH$$
由
$$\angle BOK=\angle COH,OK=OH$$
有
$$\angle KOH=\angle BOC=120°,\angle OKH=\angle OHK=30°$$



观察 $\triangle OKH$,有 $\frac{KH}{\sin 120°}=\frac{OH}{\sin 30°}$,则 $KH=\sqrt{3}OH$,又 $BM=CN$,$BK=CH$,则 $KM=NH$,则
$$MH+NH=MH+KM=KH=\sqrt{3}OH$$
故
$$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$$

**解法 2** 联结 $OB$、$OC$,则 $\angle BOC=2\angle A=120°$.在 $\triangle BOC$ 中
$$\angle OBC=\angle OCB=30°$$
又
$$\angle BHC=\angle FHE=180°-60°=120°$$
则 $B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆,设该圆的半径为 $R$,记 $\angle OBH=\theta$,则 $\angle OCH=\theta$.从而
$$\angle HBC=30°-\theta,\angle HCB=30°+\theta$$
由正弦定理有
$$OH=2R\sin\theta,BH=2R\sin(30°+\theta)$$

$$CH = 2R\sin(30° - \theta)$$

又
$$BM = CN$$

则
$$MH + NH = (BH - BM) + (CN - CH) = BH - CH = 2R[\sin(30° + \theta) - \sin(30° - \theta)] = 2R \cdot 2\cos 30°\sin\theta$$

故
$$\frac{MH + NH}{OH} = 2\cos 30° = \sqrt{3}$$

**解法3** (由四川方廷刚给出)如图24.7,由 $BM = CN$ 易知 $MH + NH = BH - CH$.记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 为三个内角.由垂心余弦定理有

$$BH - CH = 2R(\cos B - \cos C) = -4R\sin\frac{B + C}{2}\sin\frac{B - C}{2}$$

由 $\angle A = 60°$ 知

$$\frac{\angle B + \angle C}{2} = 60°, \frac{\angle B - \angle C}{2} = 60° - \angle C$$



故
$$BH - CH = 2\sqrt{3}R\sin(C - 60°)$$

另一方面,由 $\angle BOC = \angle BHC = 120°$ 知 $O$、$B$、$C$、$H$ 共圆.$\angle OHB = \angle OCB = 30°$,$\angle OBH = \angle OBC - \angle EBC = 30° - (90° - \angle C) = \angle C - 60°$.由正弦定理得 $OH = 2R\sin(\angle C - 60°)$,从而,所求之比值为$\sqrt{3}$.

**解法4** (由浙江兰溪一中舒林军给出)如图24.8,作 $\triangle ABC$ 的外接圆,延长 $BE$ 交圆 $O$ 于 $X$,延长 $CF$ 交圆 $O$ 于 $Y$.联结 $BY$,过 $O$ 作 $OQ \perp CY$ 于 $Q$,$OP \perp BX$ 于 $P$.设 $G$ 为$\overset{\frown}{BC}$(劣弧)上的点.因 $BE \perp AC$,$\angle A = 60°$,则 $\angle ABE = 30°$,同理 $\angle ACF = 30°$.则 $\angle YBA = \angle YCA = 30°$,即 $\overset{\frown}{YAX} = \overset{\frown}{BGC} = 120°$.

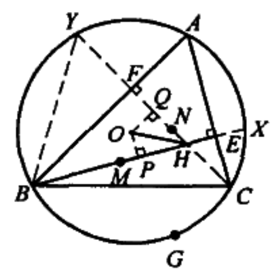


图24.8

由 $\overset{\frown}{YAC} = \overset{\frown}{BGX}$,知 $YC = BX$,亦知 $OQ = OP$,由 $BM = CN$,知 $NQ = PM$,即有 $\angle OHQ = \angle OHP = 30°$,从而

$$OH = \frac{HP}{\cos 30°}$$

于是
$$MH + NH = (PH + MP) + (HQ - NQ) = 2HP$$

故 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{2HP}{\frac{HP}{\cos 30^\circ}}=\sqrt{3}$$

**解法5** （由西南师大附中王勇给出）设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$，三个内角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，三条边为$a$、$b$、$c$. 由$BH=2R\cos B$，$CH=2R\cos C$，$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$，得

$$OH=\sqrt{9R^2-4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)}=$$
$$R\sqrt{9-4(\frac{3}{4}+\sin^2B+\sin^2C)}=$$
$$R\sqrt{6-4(\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2})}=$$
$$R\sqrt{2+4\cos(B+C)\cos(C-B)}=R\sqrt{2-2\cos(C-B)}=$$
$$2R\sqrt{\frac{1-\cos(C-B)}{2}}=2R\sin\frac{C-B}{2}$$

 所以 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{BH-HC}{OH}=\frac{2R(\cos B-\cos C)}{2R\sin\frac{C-B}{2}}=$$
$$\frac{-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}}=2\sin\frac{B+C}{2}=\sqrt{3}$$

以下5种解法由武昌实验中学朱达坤给出.①

**解法6** 联结$OB$、$OC$. 因$\angle BHC=\angle FHE=120^\circ$，又$\angle BOC=2\angle A=120^\circ$，则$B$、$O$、$H$、$C$四点共圆.

设$\angle OBC=\alpha=30^\circ$，$\angle EBC=\beta$，即知
$$\angle OBC=\angle OCB=30^\circ, \angle EBC=\angle HOC=\beta$$

则 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{BH-BM+CN-HC}{OH}=\frac{BH}{OH}-\frac{HC}{OH}$$

由正弦定理，在$\triangle OHB$中
$$\frac{BH}{OH}=\frac{\sin(120^\circ+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

在$\triangle OHC$中 $$\frac{HC}{OH}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

---

① 朱达坤. 2002年全国高中数学联赛加试试题另解[J]. 中学数学,2002(12):39-41.

故 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{\sin(120^\circ+\beta)-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin(30^\circ-\beta)\sin 60^\circ}{\sin(30^\circ-\beta)}=\sqrt{3}$$

**解法7** 联结 $OA$、$OB$、$OC$、$OM$、$ON$、$MN$,则 $OA=OB=OC$.

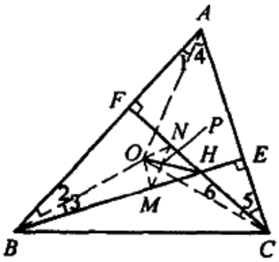


图24.9

如图24.9,$\angle 1=\angle 2$,$\angle 4=\angle 5+\angle 6$,$\angle A=60^\circ$,$\angle 2+\angle 3=30^\circ$,$\angle 5=30^\circ$,$\angle 4=60^\circ-\angle 1$,$\angle 6=60^\circ-\angle 1-\angle 5=30^\circ-\angle 1$,则 $\angle 3=\angle 6$,由 $BM=CN$,有

$$\triangle BOM\cong\triangle CON$$

则 $$OM=ON,\angle OMB=\angle ONC$$

即 $$\angle OMH+\angle ONH=180^\circ$$

故 $O$、$M$、$H$、$N$ 四点共圆.

联结 $MN$,由 $OM=ON$,有 $\angle OHM=\angle OHN$,设 $OH$ 与 $MN$ 交于点 $P$,则 $\triangle MHP\backsim\triangle OHN$,即

$$\frac{MH}{OH}=\frac{MP}{ON} \quad ①$$

因 $\triangle HNP\backsim\triangle HOM$,则

$$\frac{HN}{OH}=\frac{NP}{OM} \quad ②$$

① + ② 得 $$\frac{MH}{OH}+\frac{NH}{OH}=\frac{MN}{OM}$$

因 $\angle MHN=60^\circ$,则 $\angle MON=120^\circ$,又 $OM=ON$,故

$$\frac{MN}{OM}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3}$$

即 $$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$$

**解法8** 如图24.10,设 $AB=c$,$AC=b$,$BM=CN=t$.

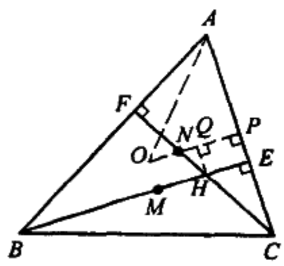


图24.10

由 $\angle A=60^\circ$,且 $CF\perp AB$,$BE\perp AC$,有

$$\angle ABE=\angle ACF=30^\circ$$

即 $BF=BA-AF=c-\dfrac{b}{2}$,$CE=b-\dfrac{c}{2}$

从而
$$CH=\frac{CE}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}(b-\frac{c}{2})$$
$$BH=\frac{2}{\sqrt{3}}(c-\frac{b}{2})$$

于是
$$MH+NH=BH-CH=\sqrt{3}(c-b) \quad ①$$

又
$$BC=\sqrt{c^2+b^2-2cb\cos 60^\circ}=\sqrt{c^2+b^2-cb}$$

因
$$\frac{BC}{\sin A}=2R$$

则
$$R=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{c^2+b^2-cb}$$

过 $O$ 作 $OP\perp AC$ 于 $P$,过 $H$ 作 $HQ\perp OP$ 于 $Q$,联结 $OA$,则
$$OA=R=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{c^2+b^2-cb}$$

四边形 $QHEP$ 为矩形,且



$$AP=\frac{1}{2}AC=\frac{b}{2}$$

则
$$PE=QH=\frac{1}{2}(c-b)$$
$$OP=\frac{\sqrt{3}}{3}(2c-b)$$
$$HE=BE-BH=\frac{\sqrt{3}}{6}(2b-c)$$

则
$$OQ=OP-HE=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{5c}{2}-2b)$$

即
$$OH=\sqrt{OQ^2+HQ^2}=c-b \quad ②$$

故
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{\sqrt{3}(c-b)}{c-b}=\sqrt{3}$$

**解法9** 如图24.11,设△$ABC$三内角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,不难得到
$$MH+NH=BH-CH=2(FH-HE)$$
又因在△$ABC$中
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$$

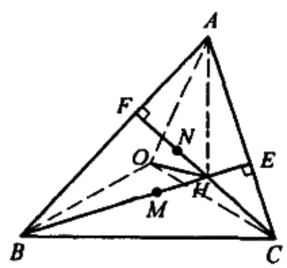


图 24.11

则 $$|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=R$$

由 $$\angle AHF=\angle B,\angle AHE=\angle C$$

有 $$FH-HE=R(\cos B-\cos C)=\sqrt{3}R\sin\frac{C-B}{2}$$

又因 $$AO=AH=R,\angle OAB=\frac{\pi}{2}-\angle C,\angle HAE=\frac{\pi}{2}-\angle C$$

则 $$\angle OAB=\angle HAE$$

$$\angle OAH=60^\circ-(180^\circ-2\angle C)=2\angle C-120^\circ$$

即 $$OH=2AO\sin\frac{\angle OAH}{2}=2R\sin(C-60^\circ)=2R\sin\frac{C-B}{2}$$

故 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{2(FH-HE)}{OH}=\sqrt{3}$$



**解法 10**　如图 24.12，以 $H$ 为原点，平行于 $AC$ 的直线为 $x$ 轴建立直角坐标系，设 $A$、$B$、$C$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1)$、$(0,y_2)$、$(x_3,y_3)$.

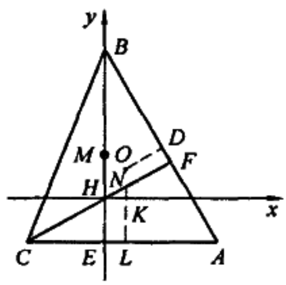


图 24.12

由 $AC\parallel x$ 轴，有

$$y_1=y_3\qquad ①$$

又 $\angle A=60^\circ$，则

$$y_2-y_1=\sqrt{3}x_1\qquad ②$$

又 $\angle HCE=30^\circ$，则

$$y_3=\frac{\sqrt{3}}{3}x_3\qquad ③$$

点 $O$ 横坐标为 $\frac{x_1+x_3}{2}$，则 $AB$ 中点 $D(\frac{x_1}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，则 $k_{OD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$OD$ 所在直线方程为

$$y-\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{x_1}{2})$$

将 $x=\frac{x_1+x_3}{2}$ 代入得

$$y=\frac{\sqrt{3}}{6}x_3+\frac{y_1+y_2}{2}$$

则点 $O$ 坐标为 $$(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{\sqrt{3}x_3}{6}+\frac{y_1+y_2}{2})$$

即

$$OH^2=\frac{1}{4}(x_1+x_3)^2+\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{3}x_3+y_1+y_2)^2 \quad ④$$

将①、②、③代入④得

$$OH^2=\frac{1}{4}(\frac{2}{\sqrt{3}}y_2+\frac{4}{3}x_3)^2$$

则

$$OH=\frac{1}{\sqrt{3}}(y_2+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3) \quad ⑤$$

设 $BM=CN=a$,则 $HM=y_2-a$.

过 $N$ 作 $NL\perp AC$ 交 $x$ 轴于点 $K$,则

$$CL=\frac{\sqrt{3}}{2}a,EL=\frac{\sqrt{3}}{2}a+x_3=HK$$

即

$$HN=\frac{2}{\sqrt{3}}HK=a+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3$$

从而



$$HN+HM=y_2-a+a+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3=y_2+\frac{2}{\sqrt{3}}x_3 \quad ⑥$$

由⑤、⑥得 $\frac{HM+HN}{HO}=\sqrt{3}$.

以下13种解法由作者给出.①

**解法11** 如图24.13,联结 $AH$ 交 $BC$ 于 $D$,过 $O$ 作 $OP\perp BC$ 于 $P$,联结 $AP$ 交 $OH$ 于 $G$.设圆 $O$ 的半径为 $R$,联结 $AO$、$BO$,则 $AO=BO=R$.

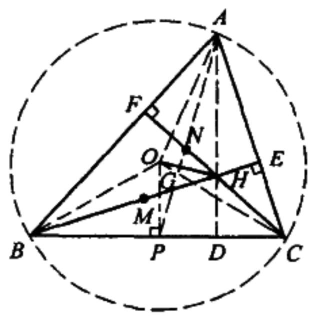


图24.13

由 $\angle A=60°$,知 $\angle BOP=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$,$OP=\frac{1}{2}BO=\frac{1}{2}R$.

由欧拉定理,知 $G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,且

$$\frac{OP}{AH}=\frac{PG}{GA}=\frac{1}{2}$$

故

$$AH=2OP=R$$

设 $\angle BAO=\alpha$,由 $\angle AOB=2\angle C$,知 $\angle BAO=90°-\angle C$,且

① 沈文选.2002年高中数学联赛平面几何题的新解法[J].中学数学杂志,2003(1):40-43.

$$\angle HAC = \angle DAC = 90^\circ - \angle C = \alpha$$

从而
$$\angle OAH = \angle A - 2\alpha$$

在 $\triangle OAH$ 中,由余弦定理,有

$$OH = \sqrt{OA^2 + AH^2 - 2OA \cdot AH\cos(\angle A - 2\alpha)} = 2R\sin(30^\circ - \alpha)$$

又在 $\triangle ABH$ 中,由正弦定理,有

$$\frac{BH}{\sin \angle BAH} = \frac{AH}{\sin \angle ABH}$$

即
$$\frac{BH}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{AH}{\sin 30^\circ}$$

故
$$BH = 2AH\sin(60^\circ - \alpha)$$

同理,在 $\triangle AHC$ 中,由正弦定理知 $CH = 2AH\sin x$.因为

$$\begin{aligned} MH + NH = BH - BM + CN - CH = BH - CH = \\ 2AH[\sin(60^\circ - \alpha) - \sin\alpha] = \\ 2\sqrt{3}R\sin(30^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

(其中 $BM = CN$)从而

$$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{2\sqrt{3}R\sin(30^\circ - \alpha)}{2R\sin(30^\circ - \alpha)} = \sqrt{3}$$



**解法 12**　设 $\triangle ABC$ 三内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,联结 $OB$、$OC$,由三角形外心、垂心性质知 $\angle BOC = 120^\circ$,$\angle BHC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$,即知 $B$、$C$、$H$、$O$ 四点共圆,从而 $\angle HOC = \angle HBC$.

在 $\triangle OHC$ 和 $\triangle HBC$ 中运用正弦定理,设圆 $O$ 的半径为 $R$,有

$$\frac{OH}{\sin \angle OCH} = \frac{CH}{\sin \angle HOC} = \frac{CH}{\sin \angle HBC} = \frac{BC}{\sin \angle BHC} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

由
$$\angle OCB = 30^\circ = \angle ACH$$

知
$$\angle OCH = \angle C - 60^\circ$$

即
$$OH = 2R\sin(C - 60^\circ)$$

由 $A$、$F$、$H$、$E$ 四点共圆,知 $\angle FHB = \angle A = 60^\circ$.

在 $Rt\triangle FHB$ 和 $Rt\triangle FCB$ 中

$$BH = \frac{BF}{\sin \angle FHB} = \frac{BC\cos B}{\sin \angle FHB} = \frac{2R\sin A\cos B}{\sin \angle FHB} = 2R\cos B$$

同理
$$CH = 2R\cos C$$

$$MH + NH = BH - BM + CN - CH = BH - CH = 2R(\cos B - \cos C) =$$

$$2\sqrt{3}R\sin\frac{C-B}{2}=2\sqrt{3}R\sin\frac{2C-(B+C)}{2}=$$
$$2\sqrt{3}R\sin(C-60^\circ)$$

从而
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{2\sqrt{3}R\sin(C-60^\circ)}{2R\sin(C-60^\circ)}=\sqrt{3}$$

**解法 13** 设$\triangle ABC$三内角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,联结$AH$并延长交$BC$于$D$,则$AD\perp BC$,由$D$、$H$、$E$、$C$四点共圆,有
$$BH\cdot BE=BD\cdot BC$$

从而
$$BH=BD\cdot\frac{BC}{BE}=\cos B\cdot AB\cdot\frac{BC}{BE}=$$
$$\cos B\cdot\frac{1}{\sin A}\cdot BC=2R\cos B$$

(其中$R$为圆$O$的半径)同理
$$CH=2R\cos C,AH=2R\cos A=R$$



由
$$\angle CAD=90^\circ-\angle C,\angle CAO=\angle BAD=90^\circ-\angle B$$

则
$$\angle OAH=\angle CAO-\angle CAD=\angle C-\angle B$$

又 $OH^2=AO^2+AH^2-2AO\cdot AH\cos\angle OAH=2R^2[1-\cos(C-B)]$
$$(MH+NH)^2=(BH-CH)^2=4R^2(\cos B-\cos C)^2=$$
$$2\times 3R^2\sin^2\frac{C-B}{2}=6R^2[1-\cos(C-B)]$$

从而
$$\frac{(MH+NH)^2}{OH^2}=3$$

即
$$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$$

**解法 14** 同解法 12 知,$B$、$O$、$H$、$C$四点共圆,在此圆中运用托勒密定理,有
$$BO\cdot CH+OH\cdot BC=BH\cdot OC$$

由于$\angle A=60^\circ$,有$BC=\sqrt{3}R$($R$为圆$O$半径),即有
$$R\cdot CH+OH\cdot\sqrt{3}R=BH\cdot R$$

亦即
$$BH-CH=\sqrt{3}OH$$

而
$$MH+NH=BH-CH$$

故
$$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$$

**解法 15**　同解法 12 知，$B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆，即有 $\angle OBH=\angle OCH$，又 $BO=OC$，$BM=CN$，知 $\triangle OBH\cong\triangle OCH$，从而
$$OM=ON,\angle BMO=\angle CNO$$
故知 $O$、$M$、$H$、$N$ 四点共圆，且等腰 $\triangle OMN$ 的顶角 $\angle MON=\angle NHE=120°$，即知
$$\frac{MN}{OM}=\frac{\sin 120°}{\sin 30°}=\sqrt{3}$$

在圆 $OMHN$ 中，运用托勒密定理，有
$$MH\cdot ON+NH\cdot OM=OH\cdot MN$$
故
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{MN}{OM}=\sqrt{3}$$



**解法 16**　同解法 12 知，$B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆，即有 $\angle OHB=\angle OCB=30°$，又 $A$、$F$、$H$、$E$ 四点共圆，知 $\angle FHB=60°$，即 $\angle OHF=30°$.

同解法 15 中，证 $O$、$M$、$H$、$N$ 四点共圆，设圆 $OMHN$ 的半径为 $r$，$\angle OMH=\theta$，则
$$MH=2r\sin\angle HOM=2r\sin(180°-30°-\theta)=2r\sin(30°+\theta)$$
$$NH=2r\sin\angle HON=2r\sin[180°-(180°-\theta)-30°]=2r\sin(\theta-30°)$$
$$OH=2r\sin\theta$$
从而
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{\sin(30°+\theta)+\sin(\theta-30°)}{\sin\theta}=\sqrt{3}$$

**解法 17**　由 $\angle A=60°$，则 $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，$AE=\frac{1}{2}AB$，$HE=\frac{\sqrt{3}}{3}CE=\frac{\sqrt{3}}{3}(AC-AE)$，$CH=2HE$. 设 $AB=c$，$AC=b$，则
$$MH+NH=BH-BM+CN-CH=BH-CH=(BE-HE)-2HE=$$
$$BE-3EH=\frac{\sqrt{3}}{2}c-\sqrt{3}\left(b-\frac{c}{2}\right)=\sqrt{3}(c-b)\text{(因 }AB>AC\text{)}$$

如图 24.14，作 $OT\perp AB$ 于 $T$，则

$$TF = AT - AF = AT - \frac{1}{2}AC =$$
$$\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b(\text{因 } AB > AC)$$

同解法12,知 $B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆,有
$$\angle FHO = \angle OBC = 30°$$
故 $$OH = 2TF = c - b(\text{因 } AB > AC)$$
从而 $$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{\sqrt{3}(c - b)}{c - b} = \sqrt{3}$$

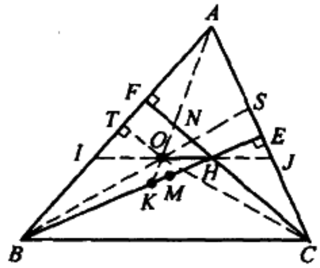


图 24.14

**解法18** 在 $BH$ 上取 $BK = CH$,如图24.14所示,同解法12,知 $B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆,有 $\angle OBK = \angle OCH$,注意到 $OB = OC$,得 $\triangle OBK \cong \triangle OCH$,从而
$$OK = OH$$
又 $$\angle OHK = \angle OHB = \angle BCO = 30°$$
则 $$\frac{\frac{1}{2}KH}{OH} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
得 $$\frac{KH}{OH} = \sqrt{3}$$

或由 $\triangle OKH \backsim \triangle OBC$,有
$$\frac{KH}{OH} = \frac{BC}{OC} = \sqrt{3}$$
$$MH + NH = BH - BM + CN - CH = BH - CH = BH - BK = KH$$
从而 $$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{KH}{OH} = \sqrt{3}$$



**解法19** 延长线段 $OH$ 交 $AB$ 于 $I$,交 $AC$ 于 $J$. 同解法1或解法3,得 $AH = R = AO$,又 $\angle IAO = 90° - \angle C = \angle JAH$,且 $\angle A = 60°$,从而 $\triangle AIJ$ 为正三角形且 $IO = HJ$.

作 $OT \perp AB$ 于 $T$,作 $OS \perp AC$ 于 $S$,根据三角形的顶点到垂心的距离等于其外心到对边距离的2倍,有
$$BH - CH = 2(OS - OT) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(OJ - OI) = \sqrt{3}OH$$
从而 $$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{BH - CH}{OH} = \frac{\sqrt{3}OH}{OH} = \sqrt{3}$$

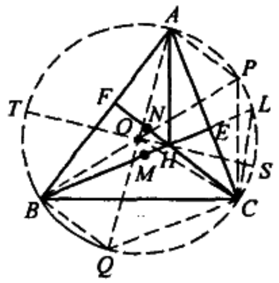



图 24.15

**解法20** 如图20.15,延长 $BO$ 交圆 $O$ 于 $P$,联结 $AP$、$CP$,则易知四边形 $HAPC$ 为平行四边形,从而 $PC = AH$.

在等腰 $\triangle OCP$ 中,$\angle OPC = \angle A = 60°$,则 $\triangle OPC$ 为正三角形.设圆 $O$ 的半径为 $R$,则 $AH = PC = OC = R$.

在等腰 $\triangle AOH$ 中

$$OH = 2AH\sin\frac{1}{2}\angle OAH$$

令 $\angle BAO = \alpha$,则

$$\alpha = 90° - \angle C = \angle HAC, \angle OAH = 60° - 2\alpha$$

故

$$OH = 2R\sin(30° - \alpha)$$

延长 $AO$ 交圆 $O$ 于 $Q$,同理有

$$BH = QC, CH = BQ$$

而

$$QC = AQ\sin\angle QAC = 2R\sin(60° - \alpha)$$

$$BQ = AQ\sin\angle BAQ = 2R\sin\alpha$$

从而

$$MH + NH = BH - BM + CN - CH = BH - CH = QC - BQ = 2R[\sin(60° - \alpha) - \sin\alpha] = 2\sqrt{3}R\sin(30° - \alpha)$$

故

$$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{2\sqrt{3}R\sin(30° - \alpha)}{2R\sin(30° - \alpha)} = \sqrt{3}$$

**解法21** 延长 $BE$ 交圆 $O$ 于 $L$,由垂心性质知 $L$ 为 $H$ 关于 $AC$ 的对称点,则 $LC = CH$.

设 $HC = x, BH = y$,由 $\angle CLB = \angle A = 60°$,知 $LH = LC = CH = x$.延长线段 $OH$ 交圆 $O$ 于 $T$、$S$,如图24.15所示.

设圆 $O$ 的半径为 $R$,$OH = d$,则

$$TH \cdot HS = BH \cdot HL$$

即

$$(R + d)(R - d) = x \cdot y$$

亦即有

$$R^2 = d^2 + xy \quad ①$$

在 $\triangle BCL$ 中运用斯特瓦尔特定理,并注意到

$$BC = 2R\sin A = \sqrt{3}R$$

可得 $$BC^2\cdot LH+LC^2\cdot BH=LH\cdot BH\cdot BL+CH^2\cdot BL$$

即 $$(\sqrt{3}R)^2x+x^2y=xy(x+y)+x^2(x+y)$$

亦即有

$$R^2=\frac{x^2+xy+y^2}{3} \qquad ②$$

由①、②得 $$\frac{x^2+xy+y^2}{3}=d^2+xy$$

亦即 $$\frac{(x-y)^2}{d^2}=3$$

故 $$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{|x-y|}{d}=\sqrt{3}$$



**解法22** 如图24.16,以 $AC$ 所在直线为 $x$ 轴,$E$ 为原点,$BE$ 所在直线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系.设 $A(a,0)$、$C(c,0)$,显然 $a>0,c<0$ 且 $a+c>0$.

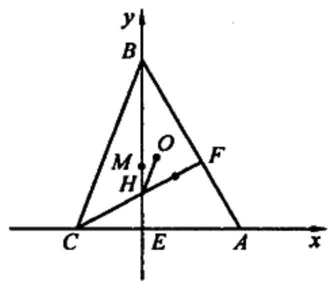


图24.16

直线 $AB$ 的方程为

$$y=-\sqrt{3}(x-a)$$

当 $x=0$ 时,$y=\sqrt{3}a$,则 $B(0,\sqrt{3}a)$.

直线 $CF$ 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-c)$$

则 $H(0,\frac{\sqrt{3}}{3}c)$.设 $O$(外心)的坐标为 $(x,y)$,则 $x=\frac{1}{2}(a+c)$,注意到三角形顶点到垂心的距离等于外心到对边距离的2倍,即

$$y=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}(BE-HE)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}c)$$

从而 $$O(\frac{a+c}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}c)$$

故 $$OH=\sqrt{(\frac{a+c}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}c+\frac{\sqrt{3}}{3}c)^2}=a+c$$

又 $$MH+NH=BH-BM+CN-CH=BH-CH=$$

$$(\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}c)-\sqrt{c^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}c)^2}=$$

$$(\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}c)-|\frac{2}{3}\sqrt{3}c|=\sqrt{3}(a+c)$$

所以
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{\sqrt{3}(a+c)}{a+c}=\sqrt{3}$$

**解法23**　如图24.17,以$O$为原点,$OC$所在直线为$x$轴建立平面直角坐标系.

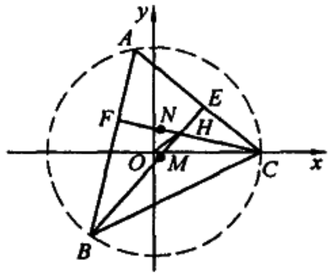


图24.17

设圆$O$的半径$R=1$,则有$C(1,0)$,$B(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,$A(\cos 2B,\sin 2B)$,于是求得

$$k_{AC}=\frac{\sin 2B}{\cos 2B-1},k_{AB}=\frac{2\sin 2B+\sqrt{3}}{1+2\cos 2B}$$

即
$$k_{BE}=\frac{1-\cos 2B}{\sin 2B},k_{FC}=-\frac{2\cos 2B+1}{2\sin 2B+\sqrt{3}}$$

从而直线$BE$、$CF$的方程分别为

$$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\cos 2B}{\sin 2B}(x+\frac{1}{2})$$

$$y=-\frac{2\cos 2B+1}{2\sin 2B+\sqrt{3}}(x-1)$$

联立上述方程,求得

$$H(\cos 2B+\frac{1}{2},\sin 2B-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

故
$$OH=\sqrt{(\cos 2B+\frac{1}{2})^2+(\sin 2B-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=2|\cos(B+30^\circ)|$$

又$\angle B+\angle C=120^\circ$,且由$AB>AC$知$\angle B<\angle C$,从而知$\angle B+30^\circ$为锐角,故

$$OH=2\cos(B+30^\circ)=2\sin(60^\circ-B)$$

又
$$BH=\sqrt{(\cos 2B+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2+(\sin 2B-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=2|\cos B|$$

$$CH=\sqrt{(\cos 2B+\frac{1}{2}-1)^2+(\sin 2B-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{2-2\sin(2B+30^\circ)}=$$
$$\sqrt{2-2\sin(2B+2C+30^\circ-2C)}=$$
$$\sqrt{2+2\cos 2C}=2|\cos C|$$

由图 24.17 知 $H$ 在 $\triangle ABC$ 内,从而 $\angle B$,$\angle C$ 均为锐角,故

$$BH = 2\cos B, CH = 2\cos C$$

而 $$MH + NH = BH - CH = 2(\cos B - \cos C) = 2\sqrt{3}\sin(60^\circ - B)$$

故 $$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{2\sqrt{3}\sin(60^\circ - B)}{2\sin(60^\circ - B)} = \sqrt{3}$$

为所求.

**注** 此题若不给出附图,还应讨论 $\angle C$ 也可能是直角或钝角.①

当 $\angle C = 90^\circ$ 时,点 $E$、点 $H$ 都与点 $C$ 重合(图形略),此时 $MH + NH = BC, OH = OC$,$\triangle OBC$(其中外心 $O$ 是 $AB$ 的中点)是 $\angle BOC = 120^\circ$ 的等腰三角形,$BC : OC$ 易求,答案也是$\sqrt{3}$.这种情形比较平凡.

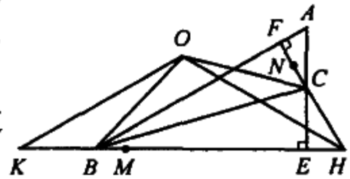



图 24.18

当 $\angle C > 90^\circ$ 时,如图 24.18 所示,在 $BE$ 的反向延长线上取 $BK = CH$(目的仍是将 $MH + NH$ 转化为 $KH$),然后也可以证明 $B$、$C$、$O$、$H$ 四点共圆(因为 $\angle BOC = 2\angle A = 120^\circ$,$\angle BHC = \angle A = 60^\circ$),再利用$\angle OBK = \angle OCH$,证明 $\triangle OBK \cong \triangle OCH$,从而推出 $\angle KOH = \angle BOC = 120^\circ$,最终在等腰 $\triangle OKH$ 中求出底边 $KH$ 与腰 $OH$ 的比值即可,答案也是$\sqrt{3}$.



**试题 B** 设点 $I$、$H$ 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 $B_1$、$C_1$ 分别为边 $AC$、$AB$ 的中点.已知射线 $B_1I$ 交边 $AB$ 于点 $B_2(B_2 \neq B)$,射线 $C_1I$ 交 $AC$ 的延长线于点 $C_2$,$B_2C_2$ 与 $BC$ 相交于 $K$,$A_1$ 为 $\triangle BHC$ 的外心.试证:$A$、$I$、$A_1$ 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

此题的证明是证明两个充分必要条件,下面给出几种证法.②

(i) 关于 $A$、$I$、$A_1$ 三点共线的充分必要条件是 $\angle BAC = 60^\circ$ 的证明.

**证法 1** 如图 24.19,设 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心,联结 $BA_1$、$CA_1$、$BH$、$CH$,则

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$$

$$\angle BA_1C = 2(180^\circ - \angle BHC) = 2\angle BAC$$

因此 $\angle BAC = 60^\circ \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BA_1C = 180^\circ \Leftrightarrow$

$A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 $O$ 上 $\Leftrightarrow$

$AI$ 与 $AA_1$ 重合 $\Leftrightarrow A$、$I$、$A_1$ 三点共线

① 徐彦明.一道高中联赛题的讨论[J].中学数学教学,2003(2):42.
② 沈文选,冷岗松.关于 2003 年中国数学奥林匹克第一题[J].中等数学,2003(6):9-14.

**证法 2**　在 $\triangle ABA_1$ 和 $\triangle ACA_1$ 中分别运用正弦定理,有

$$\frac{A_1A}{\sin\angle ABA_1}=\frac{A_1B}{\sin\angle A_1AB}$$

$$\frac{A_1A}{\sin\angle ACA_1}=\frac{A_1C}{\sin\angle A_1AC}$$

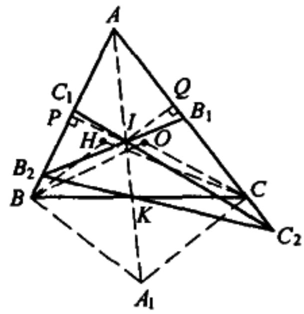



图 24.19

因 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,则

$A$、$I$、$A_1$ 三点共线 $\Leftrightarrow \angle A_1AB=\angle A_1AC\Leftrightarrow$

$\angle A_1AB$ 与 $\angle A_1AC$ 均为锐角,$\sin\angle ABA_1=\sin\angle ACA_1\Leftrightarrow$

$\angle ABA_1\neq\angle ACA_1$(因 $AB\neq AC$)时 $\angle ABA_1+\angle ACA_1=180^\circ\Leftrightarrow$

$A$、$B$、$A_1$、$C$ 四点共圆.

注意到,在圆 $A_1$ 中有

$$\angle BA_1C=\angle 360^\circ-2\angle BHC=360^\circ-2(180^\circ-\angle A)=2\angle BAC$$

且
$$\angle BA_1C+\angle BAC=180^\circ\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$$



**证法 3**　由题设知点 $A_1$ 在 $\triangle ABC$ 外,如图 24.20 所示,$A_1$ 为 $\triangle BHC$ 的外心,有

$$\angle A_1BC=\angle A_1CB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BA_1C=$$
$$90^\circ-\frac{1}{2}(360^\circ-2\angle BHC)=$$
$$\angle BHC-90^\circ=90^\circ-\angle BAC$$

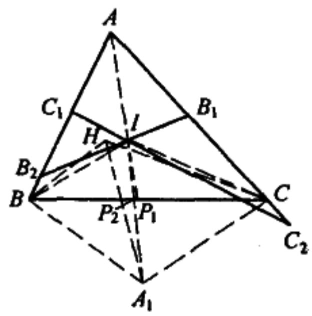



图 24.20

因 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,有

$$\angle IBA_1=\frac{\angle B}{2}+90^\circ-\angle BAC$$

$$\angle ICA_1=\frac{\angle C}{2}+90^\circ-\angle BAC$$

延长 $AI$ 交 $BC$ 于点 $P_1$,联结 $A_1I$ 交 $BC$ 于点 $P_2$,则

$$\frac{BP_2}{P_2C}=\frac{S_{\triangle BIA_1}}{S_{\triangle ICA_1}}=\frac{BI\cdot BA_1\sin\angle IBA_1}{CI\cdot CA_1\sin\angle ICA_1}=\frac{\sin\dfrac{C}{2}\cos\left(\dfrac{B}{2}-\angle BAC\right)}{\sin\dfrac{B}{2}\cos\left(\dfrac{C}{2}-\angle BAC\right)}$$

由角平分线性质及正弦定理,有

$$\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}$$

$A$、$I$、$A_1$ 三点共线 $\Leftrightarrow$

$P_1$ 与 $P_2$ 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{BP_1}{P_1C}=\dfrac{BP_2}{P_2C}\Leftrightarrow \dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\angle BAC\right)}{\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{C}{2}-\angle BAC\right)}\Leftrightarrow$

$\cos(C-\angle BAC)=\cos(B-\angle BAC)\Leftrightarrow\angle C-\angle BAC=\angle BAC-\angle B$ 或

$\angle C-\angle BAC=\angle B-\angle BAC$(舍去)$\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$

**证法 4** 如图 24.20,设 $\triangle BHC$ 的外接圆半径为 $R'$,$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$.

因为 $\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$,则

$$R'=\frac{BC}{2\sin\angle BHC}=\frac{2R\sin\angle BAC}{2\sin\angle BAC}=R$$



在圆 $A_1$ 中,因为

$$\angle HA_1B=2\angle BCH=2(90^\circ-\angle B)$$

$$\angle HA_1C=2(90^\circ-\angle C)$$

则 $$\angle CA_1B=\angle HA_1B+\angle HA_1C=2(180^\circ-\angle B-\angle C)=2\angle BAC$$

故 $$\angle A_1CB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CA_1B)=90^\circ-\angle BAC$$

又 $$\angle A_1CI=\frac{\angle C}{2}+90^\circ-\angle BAC$$

可计算得 $$CI=4R\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$A$、$I$、$A_1$ 三点共线 $\Leftrightarrow$

$S_{\triangle ACI}+S_{\triangle A_1CI}=S_{\triangle ACA_1}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}AC\cdot CI\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}A_1C\cdot CI\sin\angle A_1CI=\frac{1}{2}AC\cdot A_1C\sin\angle A_1CA\Leftrightarrow$

$[2R\sin B\sin\frac{C}{2}+R\sin(\frac{C}{2}+90^\circ-\angle BAC)]4R\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{B}{2}=$

$2R\sin B\cdot R\sin(C+90^\circ-\angle BAC)\Leftrightarrow 4\sin B\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{C}{2}+$

$2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cos(\angle BAC-\frac{C}{2})=2\cos\frac{B}{2}\cos(\angle BAC-C)\Leftrightarrow$

$4\sin B\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{C}{2}=[\cos(\frac{B}{2}+\angle BAC-C)+\cos(\frac{B}{2}-\angle BAC+$

$C)] - [\sin(\angle BAC + \frac{\angle BAC}{2} - \frac{C}{2}) + \sin(\frac{C}{2} - \frac{\angle BAC}{2})] = 2\cos(C - \frac{\angle BAC}{2})\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow 2\sin(\angle BAC + C)\sin\frac{\angle BAC}{2} = \cos(C - \frac{\angle BAC}{2}) \Leftrightarrow$

$\cos(\frac{\angle BAC}{2} + C) - \cos(\frac{3\angle BAC}{2} + C) = \cos(C - \frac{\angle BAC}{2}) \Leftrightarrow$

$\cos(\frac{\angle BAC}{2} + C) = \cos(\frac{3\angle BAC}{2} + C) + \cos(C - \frac{\angle BAC}{2}) =$

$2\cos(\frac{\angle BAC}{2} + C)\cos\angle BAC \Leftrightarrow$

$\cos\angle BAC = \frac{1}{2}$，$\angle A$ 为三角形内角；或

$\frac{\angle BAC}{2} + \angle C = 90°$（舍去）$\Leftrightarrow \angle BAC = 60°$



**证法 5**　如图 24.21，以边 $BC$ 的中点 $D$ 为中心，作 $\triangle ABC$ 的中心对称图形 $\triangle PCB$. 由 $CH \perp AB$ 知 $CH \perp CP$，由 $BH \perp AC$ 知 $BH \perp BP$，故知 $B$、$P$、$C$、$H$ 四点共圆. 从而，$A_1$ 为 $\triangle BPC$ 的外心，且 $A_1$ 是 $O$ 关于对称中心 $D$ 的对称点.

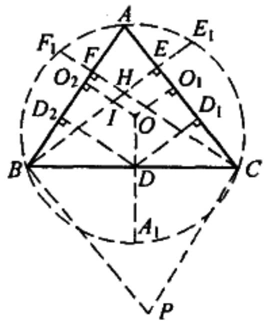


图 24.21

延长 $BH$ 交 $AC$ 于点 $E$，交圆 $O$ 于点 $E_1$. 作 $OO_1 \perp AC$ 于 $O_1$，$OO_2 \perp AB$ 于 $O_2$；作 $DD_1 \perp AC$ 于 $D_1$，$DD_2 \perp AB$ 于 $D_2$. 记 $A_1$ 到 $AC$、$AB$ 的距离分别为 $d_1$、$d_2$. 注意到 $BH = 2OO_1$ 及 $EH = EE_1$，则

$$d_1 = 2DD_1 - OO_1 = BE - OO_1 = EH + HB - OO_1 = EH + HB - \frac{1}{2}HB = EH + \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}BE_1$$

同理
$$d_2 = 2DD_2 - OO_2 = CF - OO_2 = \frac{1}{2}CF_1$$

因 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，则

$A$、$I$、$A_1$ 三点共线 $\Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftrightarrow BE_1 = CF_1 \Leftrightarrow$

$2R\sin(\angle BAC + 90° - \angle C) = 2R\sin(\angle BAC + 90° - \angle B) \Leftrightarrow$

$(\angle BAC + 90° - \angle C) + (\angle BAC + 90° - \angle B) = 180°$；或

$\angle BAC + 90° - \angle C = \angle BAC + 90° - \angle B$（舍去）$\Leftrightarrow \angle BAC = 60°$

(ii) 关于 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2}$ 的充分必要条件是 $\angle BAC = 60°$ 的证明.

**证法 1**　如图 24.19，作 $IP \perp AB$ 于点 $P$，$IQ \perp AC$ 于点 $Q$. 则

$$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}IP\cdot AB_2+\frac{1}{2}IQ\cdot AB_1 \quad ①$$

设 $IP=r$($r$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径),则 $IQ=r$,又令 $BC=a,CA=b$, $AB=c$,则

$$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

注意到

$$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AB_2\sin A \quad ②$$

由 ①、② 及 $AB_1=\frac{b}{2}$,$2AB_1\sin A=h_c=\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}$,有

$$AB_2\left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}-2\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right)=b\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

则
$$AB_2=\frac{bc}{a+b-c}$$

同理
$$AC_2=\frac{bc}{a+c-b}$$



由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}$,有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$,于是

$$bc=\frac{bc}{a+b-c}\cdot\frac{bc}{a+c-b}$$

即 $a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow$ 由余弦定理,$\angle BAC=60^\circ$.

**证法 2** 设 $\triangle ABC$ 的内切圆切边 $AC$ 于 $Q$,在 $AC$ 上取点 $Q_1$,使得 $Q_1$ 关于 $B_1$ 与 $Q$ 对称.令 $r$ 为圆 $I$ 的半径 $\triangle ABC$ 各边为 $a$、$b$、$c$,$P=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则

$$S_{\triangle IB_1Q_1}=\frac{r}{2}B_1Q_1=\frac{r}{2}(AB_1-AQ)=\frac{r}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{b+c-a}{2}\right)=\frac{r}{4}(a-c)$$

$$S_{\triangle IB_1B}=S_{\triangle ABB_1}-S_{\triangle AIB}-S_{\triangle AIB_1}=\frac{r}{2}\cdot p-\frac{r}{2}\cdot c-\frac{r}{2}\cdot\frac{b}{2}=\frac{r}{4}(a-c)$$

于是
$$S_{\triangle IB_1Q_1}=S_{\triangle IB_1B}$$

从而
$$BQ_1\parallel B_2B_1$$

即
$$\frac{AB_2}{AB}=\frac{AB_1}{AQ_1}$$

类似点 $Q_1$,在边 $AB$ 上定义点 $P_1$.同理,有

$$\frac{AC_2}{AC}=\frac{AC_1}{AP_1}$$

而
$$AQ_1 = AC - AQ = b - \frac{b+c-a}{2} = p - c$$

同理
$$AP_1 = p - b$$

$$S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2} \Leftrightarrow \frac{AB_2 \cdot AC_2}{AB \cdot AC} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{AB_1 \cdot AC_1}{AQ_1 \cdot AP_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}}{(p-c)(p-b)} = 1 \Leftrightarrow$$

$a^2 = b^2 + c^2 - bc$，$\angle BAC$ 为三角形内角 $\Leftrightarrow \angle BAC = 60°$

**证法3**　如图24.22，设$\triangle ABC$三边为$a$、$b$、$c$，联结$BI$并延长交$AC$于$B_3$.由角平分线性质，有

$$\frac{AB}{AB_3} = \frac{BI}{IB_3} = \frac{BC}{B_3C}$$

即
$$\frac{BI}{IB_3} = \frac{AB + BC}{AB_3 + B_3C} = \frac{c+a}{b}$$

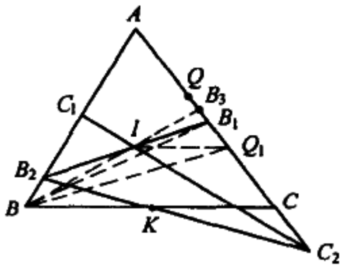


图24.22

对$\triangle ABB_3$及直线$C_1IC_2$，运用梅涅劳斯定理有

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BI}{IB_3} \cdot \frac{B_3C_2}{C_2A} = 1$$

而$AC_1 = C_1B$，从而

$$B_3C_2 = \frac{b}{a+c} \cdot C_2A$$

由
$$\frac{AB_3}{C_2A} = \frac{C_2A - B_3C_2}{C_2A} = \frac{a+c-b}{a+c}$$

又
$$\frac{AB_3}{AC} = \frac{AB_3}{AB_3 + B_3C} = \frac{AB}{BC + AB} = \frac{c}{a+c}$$

故
$$\frac{AC}{AC_2} = \frac{a+c-b}{c}$$

同理
$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{a+b-c}{b}$$

$$S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB_2} \cdot \frac{AC}{AC_2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b-c}{b} \cdot \frac{a+c-b}{c} = 1 \Leftrightarrow$$

$a^2 = b^2 + c^2 - bc$，$\angle A$ 为三角形内角 $\Leftrightarrow \angle BAC = 60°$

**证法 4** 如图 24.22,令 $\angle AB_1B_2=\alpha,\angle AC_1C_2=\beta$. 在 $\triangle AB_1B_2$ 和 $\triangle AC_1C_2$ 中,分别运用正弦定理,有

$$\frac{AB_2}{AB_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\angle BAC+\alpha)}=\frac{\tan\alpha}{\sin\angle BAC+\cos\angle BAC\cdot\tan\alpha}$$

$$\frac{AC_2}{AC_1}=\frac{\sin\beta}{\sin(\angle BAC+\beta)}=\frac{\tan\beta}{\sin\angle BAC+\cos\angle BAC\cdot\tan\beta}$$

在 $\triangle AIB_1$ 和 $\triangle AIC$ 中,分别运用正弦定理,有

$$\frac{AI}{AB_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\angle BAC}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{\angle BAC}{2}+\frac{C}{2}\right)}$$

求得
$$\tan\alpha=\frac{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\angle BAC-C)}$$



于是
$$\frac{AB_2}{AB_1}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

即
$$\frac{AB_2}{AC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

同理
$$\frac{AC_2}{AB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB_2\cdot AC_2}{AB\cdot AC}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{C}{2}}=1\Leftrightarrow$$

$$4\sin^2\frac{\angle BAC}{2}=1,\angle BAC\text{ 为三角形内角}\Leftrightarrow\angle A=60^\circ$$

**证法 5** 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$,在 $\triangle ACI$ 和 $\triangle ABC$ 中,分别运用正弦定理,有

$$\frac{AI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{AC}{\sin\angle AIC}=\frac{AC}{\cos\frac{B}{2}}=4R\sin\frac{B}{2}$$

即
$$AI=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

又
$$AB_1=\frac{1}{2}AC=R\sin B$$

在 $\triangle AB_1B_2$ 中，运用张角公式，有

$$\frac{\sin\angle BAC}{AI}=\frac{\sin\frac{\angle BAC}{2}}{AB_1}+\frac{\sin\frac{\angle BAC}{2}}{AB_2}$$

即
$$AB_2=\frac{2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{\angle BAC}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}}=\frac{2R\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$$

同理
$$AC_2=\frac{2R\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$$

$$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AB_2\cdot AC_2\Leftrightarrow$$

$$\sin C\sin B=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}\Leftrightarrow$$

$$4\sin^2\frac{\angle BAC}{2}=1,\angle BAC\text{ 为三角形内角}\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$$

上述两个充要条件，还可以多次运用梅涅劳斯定理，或运用解析法来证明，限于篇幅，就不作介绍了.

**注**　(1) 试题的背景

此题是以下面两个命题为背景改造而来的.

**命题1**　三角形的两顶点与其内心、外心、垂心中的两心四点共圆的充分必要条件是另一顶点处的内角为 $60^\circ$.

**证明**　当三心有两心重合，或三角形为直角三角形时，结论显然成立. 下面讨论三心两两不重合且三角形不为直角三角形的情形，如图24.23所示，记 $\triangle ABC$ 三内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

充分性：设 $\angle A=60^\circ$，$I$、$O$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心. 此时

$$\angle BOC=2\angle A=120^\circ$$

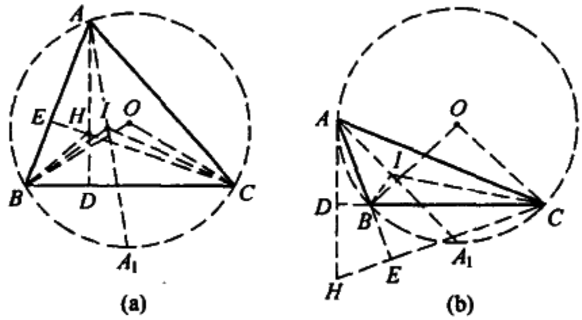



图 24.23

$$\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 120°$$

$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = \angle B + \angle C = 120°$(图 24.23(a))

或 $\angle BHC = 90° - \angle HCA = \angle A = 60°$(图 24.23(b))

故 $B$、$H$、$I$、$O$、$C$ 五点共圆.

显然有 $B$、$H$、$I$、$C$,$B$、$H$、$O$、$C$,$B$、$I$、$O$、$C$ 分别四点共圆.



若联结 $AI$ 并延长交圆 $O$ 于点 $A_1$,由内心性质知 $IA_1 + A_1B = A_1C$.故上述圆的圆心为 $A_1$,且该圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆是等圆.

必要性:因 $H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则

$$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \angle C) - (90° - \angle B) = \angle B + \angle C$$

或

$$\angle BHC = 90° - \angle HCA = \angle A \quad ①$$

因 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,则

$$\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle A \quad ②$$

因 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心,则

$$\angle BOC = 2\angle A \quad ③$$

若 $B$、$H$、$I$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BHC = \angle BIC$ 或 $\angle BHC + \angle BIC = 180°$.由①、②有

$$\angle B + \angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

两边加上 $\angle A$,或由 ①、② 有

$$\angle A + \frac{1}{2}\angle A + 90° = 180°$$

均可求得 $\angle A = 60°$.

若 $B$、$H$、$O$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BHC = \angle BOC$ 或 $\angle BHC + \angle BOC = 180°$. 由①、③有 $\angle B + \angle C = 2\angle A$ 或 $\angle A + 2\angle A = 180°$. 均可求得 $\angle A = 60°$.

若 $B$、$I$、$O$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BIC = \angle BOC$. 由②、③有 $90° + \frac{\angle A}{2} = 2\angle A$. 求得 $\angle A = 60°$.

综上所述,命题1得证.

**命题2**　如图24.24,设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,点 $B_1$、$C_1$ 分别为边 $AC$、$AB$ 的中点,射线 $B_1I$ 交边 $AB$ 于点 $B_2$,射线 $C_1I$ 交 $AC$ 的延长线于点 $C_2$. 则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2}$ 的充要条件是 $\angle BAC = 60°$.

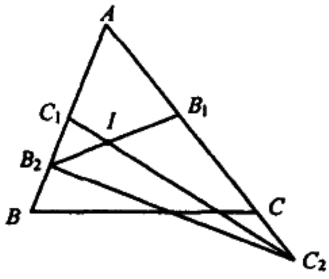


图24.24

**证明**　记 $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, $r$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径.

必要性:由 $S_{\triangle ABC} = rp$ 得

$$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{AB_1 \cdot AB_2}{AB \cdot AC} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{AB_2}{2c} \cdot rp$$

$$S_{\triangle AIB_2} = \frac{r}{2} \cdot AB_2, S_{\triangle AIB_1} = \frac{br}{4}$$

而 $S_{\triangle AB_1B_2} - S_{\triangle AIB_2} = S_{\triangle AIB_1}$,故

$$\frac{AB_2}{2c} \cdot rp - \frac{r}{2} \cdot AB_2 = \frac{br}{4}$$

即
$$2AB_2(p - c) = bc$$

所以
$$AB_2 = \frac{bc}{a + b - c}$$

同理
$$AC_2 = \frac{bc}{a - b + c}$$

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2}$,有

$$\frac{AB_2 \cdot AC_2}{AB \cdot AC} = \frac{\frac{bc}{a + b - c} \cdot \frac{bc}{a - b + c}}{bc} = 1$$

即
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

由余弦定理求得 $\angle BAC = 60°$.

充分性:同必要性,有

$$AB_2=\frac{bc}{a+b-c},AC_2=\frac{bc}{a-b+c}$$

令$\frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}}=l$,则

$$l=\frac{AB_2\cdot AC_2}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{bc}{a+b-c}\cdot\frac{bc}{a-b+c}}{bc}$$

即
$$a^2=b^2+c^2+(\frac{1}{l}-2)bc$$

而当$\angle BAC=60°$时,有$a^2=b^2+c^2-bc$.从而,有$l=1$.故$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$.

综上所述,命题 2 得证.

其中命题 2 的必要性即为第 31 届 IMO 的一道预选题.

(2) 试题的变化

首先,将试题中的锐角$\triangle ABC$改为钝角$\triangle ABC$,结论仍然成立;将垂心$H$换成内心$I$或外心$O$,$\triangle BHC$改为$\triangle BIC$或$\triangle BOC$,结论仍然成立.其次,根据命题:三角形的顶点到其垂心的距离等于外接圆半径的充分必要条件是该顶点处的内角为 60°(此命题的证明略).



可把试题改变成另外的形式,例如:

设点$I$、$H$、$O$分别为$\triangle ABC$的内心、垂心、外心,点$B_1$、$C_1$分别为边$AC$、$AB$的中点.已知射线$B_1I$交边$AB$于点$B_2(B_2\neq B)$,射线$C_1I$交$AC$的延长线于点$C_2$,$B_2C_2$与$BC$相交于点$K$.试证:$AH=AO$的充分必要条件是$\triangle BKB_2$和$\triangle CKC_2$的面积相等.

**试题 C** 在锐角$\triangle ABC$中,$AD$是$\angle BAC$的内角平分线,点$D$在边$BC$上,过点$D$分别作$DE\perp AC$、$DF\perp AB$,垂足分别为$E$、$F$,联结$BE$、$CF$,它们相交于点$H$,$\triangle AFH$的外接圆交$BE$于点$G$.求证:以线段$BG$、$GE$、$BF$组成的三角形是直角三角形.

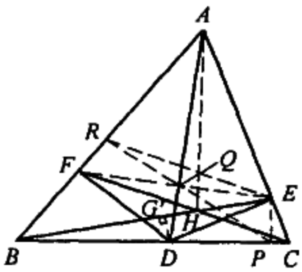


图 24.25

**证法 1** 如图 24.25,过点$D$作$DG'\perp BE$,垂足为$G'$.由勾股定理知

$$BG'^2-G'E^2=BD^2-DE^2=BD^2-DF^2=BF^2$$

所以,线段$BG'$、$G'E$、$BF$组成的三角形是以$BG'$为斜边的直角三角形.

下面证明 $G'$ 即为 $G$,即只要证 $A$、$F$、$G'$、$H$ 四点共圆.

如图24.25,联结 $EF$,则 $AD$ 垂直平分 $EF$.设 $AD$ 交 $EF$ 于点 $Q$,作 $EP \perp BC$,垂足为 $P$,联结 $PQ$ 并延长交 $AB$ 于点 $R$,联结 $RE$.

因为 $Q$、$D$、$P$、$E$ 四点共圆,所以

$$\angle QPD = \angle QED$$

又 $A$、$F$、$D$、$E$ 四点共圆,所以

$$\angle QED = \angle FAD$$

于是,$A$、$R$、$D$、$P$ 四点共圆.又

$$\angle RAQ = \angle DAC, \angle ARQ = \angle ADC$$

于是
$$\triangle ARQ \backsim \triangle ADC$$

则
$$\frac{AR}{AQ} = \frac{AD}{AC}$$

从而
$$AR \cdot AC = AQ \cdot AD = AF^2 = AF \cdot AE$$

即
$$\frac{AR}{AF} = \frac{AE}{AC}$$

所以
$$RE \parallel FC, \angle AFC = \angle ARE$$



因为 $A$、$R$、$D$、$P$ 四点共圆,$G'$、$D$、$P$、$E$ 四点共圆,则 $BG' \cdot BE = BD \cdot BP = BR \cdot BA$.故 $A$、$R$、$G'$、$E$ 四点共圆.所以

$$\angle AG'E = \angle ARE = \angle AFC$$

因此,$A$、$F$、$G'$、$H$ 四点共圆.

**证法2** (由浙江金华市一中程俊给出)如图24.26,作 $DG' \perp BE$ 于 $G'$,$AM \perp BC$ 于 $M$,联结 $FG'$.

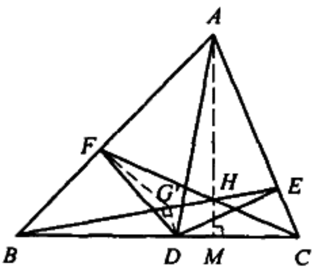



图24.26

记 $\angle ABC = \alpha, \angle ACB = \beta$,则 $BM = AM\cot\alpha$,$CM = AM\cot\beta$.由已知得

$$BF = DF\cot\alpha, CE = DE\cot\beta$$

$$DE = DF, AF = AE$$

故
$$\frac{BF}{CE} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{BM}{CM}$$

因此
$$\frac{BF \cdot CM \cdot AE}{CE \cdot BM \cdot AF} = 1$$

在 $\triangle ABC$ 中,由塞瓦定理逆定理知 $AM$、$CF$、$BE$ 三线共点.所以,$AH \perp BC$.于是

$$\angle BAH = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \angle FDB$$

又 $\angle BG'D = \angle BFD = \frac{\pi}{2}$,故 $B$、$F$、$G'$、$D$ 四点共圆.所以

$$\angle FG'B = \angle FDB = \angle BAH$$

因此,$A$、$F$、$G'$、$H$ 四点共圆.

又因为 $A$、$F$、$G$、$H$ 四点共圆,且 $G'$、$G$、$H$ 共线,则 $G'$ 与 $G$ 重合.所以,$DG \perp BE$.故

$$BG^2 = DG^2 + BD^2 = GE^2 - DF^2 + BD^2 = GE^2 + BF^2$$

因此,以 $BG$、$GE$、$BF$ 为三边的三角形是直角三角形.

## 第1节　含有60°内角的三角形的性质及应用[①]

含有90°角的三角形是一类特殊的三角形——直角三角形.含有60°内角的三角形,也是一类特殊的三角形.例如,对含有60°内角的三角形进行割或补,



很快便可作出正三角形,除此之外,这类三角形还有如下有趣的性质.

**性质1**　三角形的三内角的量度成等差数列的充分必要条件是其含有60°的内角.

**性质2**　非钝角三角形的顶点到其垂心的距离等于外接圆半径的充分必要条件是该顶点处的内角为60°.

**证明**　当三角形为直角三角形时结论显然成立.下面设 $H$ 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,记 $\triangle ABC$ 三内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,如图24.27所示.

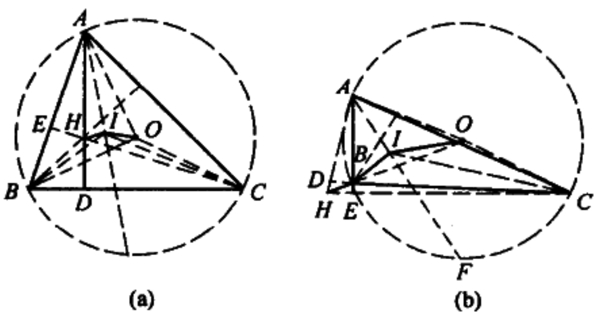



图24.27

① 沈文选.含有60°内角的三角形的性质及应用[J].中学数学,2003(1):47-49.

充分性：设 $\angle A=60°$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$，直线 $AH$ 交直线 $BC$ 于 $D$，直线 $CH$ 交直线 $AB$ 于 $E$. 由垂心性质知，$B$、$D$、$H$、$E$ 四点共圆，有 $\angle AHE$ 与 $\angle DBE$ 相等或相补. 在 $Rt\triangle AEH$ 中

$$\frac{AE}{AH}=\cos\angle EAH=\cos(90°-\angle DBE)=\sin B(\text{图 }24.27(\text{a}))$$

或 $$\cos\angle EAH=\cos(90°-\angle AHE)=\cos[90°-(180°-\angle DBE)]=$$
$$\cos(\angle DBE-90°)=\sin B(\text{图 }24.27(\text{b}))$$

即有 $AH=\dfrac{AE}{\sin B}$.

又在 $Rt\triangle AEC$ 中，$\dfrac{AE}{AC}=\cos\angle BAC=\dfrac{1}{2}$，即 $AE=\dfrac{1}{2}AC$，注意到正弦定理

$$AH=\frac{AE}{\sin B}=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{2R\sin B}{2\sin B}=R$$

必要性：设 $CE$ 为 $AB$ 边上的高，$AD$ 为 $BC$ 边上的高，由 $AH=R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径），注意到 $B$、$D$、$H$、$E$ 四点共圆，有 $AE=R\sin\angle AHE=R\sin B$（注意 $\sin(180°-B)=\sin B$），则

$$CE=AE\tan A=R\sin B\tan A$$

又 $$CE=BC\sin B=2R\sin A\sin B$$

从而 $$2\sin A=\tan\angle A$$

求得 $$\angle A=60°$$

**注**　必要性也可由 $\angle BOC=2\angle A$ 及三角形顶点 $A$ 到垂心 $H$ 的距离等于外心 $O$ 到对边 $BC$ 的距离的 2 倍来证明.

**性质 3**　三角形的两顶点与其内心、外心、垂心中的两心四点共圆的充分必要条件是另一顶点处的内角为 $60°$.

**证明**　当三心有两心重合时，或为直角三角形时结论显然成立. 下面讨论三心两两不重合且三角形不为直角三角形的情形，记 $\triangle ABC$ 三内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，如图 24.27 所示.

充分性：设 $\angle A=60°$，$I$、$O$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心，此时

$$\angle BOC=2\angle A=120°$$

$$\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90°+\frac{1}{2}\angle A=120°$$

$$\angle BHC=180°-\angle HBC-\angle HCB=\angle B+\angle C=120°$$

或 $$\angle BHC=90°-\angle HCA=90°-(90°-\angle A)=\angle A=60°$$

故 $B$、$H$、$I$、$O$、$C$ 五点共圆，显然有 $B$、$H$、$I$、$C$，$B$、$H$、$O$、$C$，$B$、$I$、$O$、$C$ 分别四点

共圆.

注　若联结 $AI$ 并延长交圆 $O$ 于 $F$,则由内心性质知 $IF = FB = FC$,即上述圆的圆心为 $F$,且该圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆是等圆.

必要性:由 $H$ 为其垂心,则

$$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \angle C) - (90° - \angle B) = \angle B + \angle C$$

或

$$\angle BHC = 90° - \angle HCA = 90° - (90° - \angle A) = \angle A \quad ①$$

由 $I$ 为其内心,则

$$\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \frac{1}{2}\angle A \quad ②$$

由 $O$ 为其外心,则

$$\angle BOC = 2\angle A \quad ③$$



若 $B$、$H$、$I$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BHC = \angle BIC$ 或 $\angle BHC + \angle BIC = 180°$,即由①、②有

$$\angle B + \angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

两边加上 $\angle A$,或由 ①、② 有

$$\angle A + \frac{1}{2}\angle A + 90° = 180°$$

均求得 $\angle A = 60°$.

若 $B$、$H$、$O$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BHC = \angle BOC$ 或 $\angle BHC + \angle BOC = 180°$,即由 ①、③ 有 $\angle B + \angle C = 2\angle A$ 或 $\angle A + 2\angle A = 180°$,均可求得 $\angle A = 60°$.

若 $B$、$I$、$O$、$C$ 四点共圆,则 $\angle BIC = \angle BOC$,即由 ②、③ 有

$$90° + \frac{1}{2}\angle A = 2\angle A$$

求得 $\angle A = 60°$.

综上,必要性获证.

**性质 4**　含有 $60°$ 内角的非直角三角形中,

(1) 其内、外心的距离等于其内、垂心的距离.

(2) 其外心与垂心的连线平分含有 $60°$ 内角的两边上的高线所成的锐角.

(3) 其外心与垂心距离的 $\sqrt{3}$ 倍等于另外两顶点到垂心距离差的绝对值或

等于另外两顶点到垂心的距离和.

**证明**　(1) 如图 24.27,设 $I$、$O$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内心、外心和垂心,联结 $AI$、$AO$、$OC$,则

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) =$$

$$90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC = \angle EAH$$

或　$$\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - (180^\circ - \angle ABC) =$$

$$\angle ABC - 90^\circ = \angle EAH$$

又 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,有 $\angle IAC = \angle IAE$,于是在 $\triangle HAI$ 和 $\triangle OAI$ 中,$AI$ 公用,$\angle HAI = \angle IAO$,由性质 2 有 $AH = R = AO$,从而 $\triangle HAI \cong \triangle OAI$,故 $IH = IO$.

(2) 如图 24.28,设 $O$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、垂心.

联结 $OB$、$OC$,由性质 3 知 $B$、$H$、$O$、$C$ 四点共圆,对于图 24.28(a),有

$$\angle EHO = \angle OCB = 30^\circ, \angle OHC = \angle OBC = 30^\circ, OH \text{ 平分 } \angle EHC$$

对于图 24.28(b),有

$$\angle BHO = \angle BCO = 30^\circ, \angle OHC = \angle OBC = 30^\circ, OH \text{ 平分 } \angle EHC$$

从而结论获证.



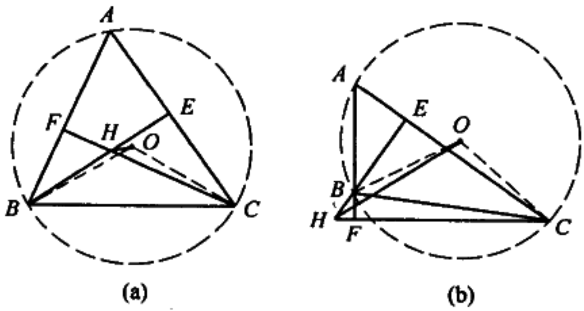



图 24.28

(3) 此即为 2002 年全国高中联赛题.

**性质 5**　设 $I$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内心和垂心,$A_1$ 为 $\triangle BHC$ 的外心,则 $A$、$I$、$A_1$ 三点共线的充要条件是 $\angle BAC = 60^\circ$.

**性质 6**　设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,$B_1$、$C_1$ 分别为 $AC$、$AB$ 的中点,直线 $B_1I$ 交直线 $AB$ 于 $B_2$,直线 $C_1I$ 交直线 $AC$ 于 $C_2$,则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2}$ 的充要条件是 $\angle BAC = 60^\circ$.

以上两条性质综合起来即为 2003 年冬令营试题.

**性质 7** 含有 $60°$ 内角的三角形其内切三角形也含有 $60°$ 内角.

**性质 8** 如图 24.29,若锐角 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC=60°, AB=c, AB=b, b>c$,$\triangle ABC$ 的垂心和外心分别为 $M$ 和 $O$,$OM$ 与 $AB$、$AC$ 分别交于点 $X$、$Y$.则(1)$\triangle AXY$ 的周长为 $b+c$;(2)$OM=b-c$.

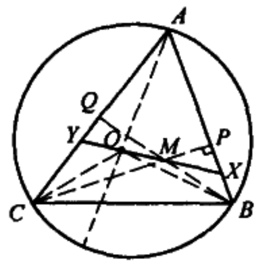



图 24.29

**证明** (1) 易知

$$\angle COB=2\angle BAC=120°$$

$$\angle CMB=\angle A+2(90°-\angle A)=120°$$

因此,$C$、$O$、$M$、$B$ 四点共圆.

又 $CP\perp AB$,则

$$\angle AXM=90°-\angle XMP=90°-\angle OMC=90°-\angle OBC=60°$$

故 $\angle MXB=120°$.



由 $\angle ABM=30°$,知 $\angle XMB=30°$,所以 $MX=XB$.

同理,$YM=CY$.故

$$AY+YX+AX=AY+YC+AX+XB=b+c$$

(2) 设 $AO=R$,则

$$b-c=2R(\sin B-\sin C)$$

易知 $$OM=BC\cdot\frac{\sin\angle OCM}{\sin\angle CMB}=2R\sin\angle CAB\cdot\frac{\sin\angle OCM}{\sin\angle CMB}=$$
$$2R\sin\angle OCM=2R\sin(B-A)$$

故 $$b-c=OM\Leftrightarrow\sin(120°-C)-\sin C=\sin(60°-C)\Leftrightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C$$

上式显然成立,故原命题成立.

**注** 此性质即为 2004 ~ 2005 匈牙利数学奥林匹克题.

下面看几道应用的例子.

**例 1** 如图 24.30,在 $\triangle ABC$ 中,$AP$ 平分 $\angle BAC$ 且交 $BC$ 于 $P$,$BQ$ 平分 $\angle ABC$ 且交 $CA$ 于 $Q$.已知 $\angle BAC=60°$,且 $AB+BP=AQ+QB$.问 $\triangle ABC$ 的各角的度数的可能值是多少?

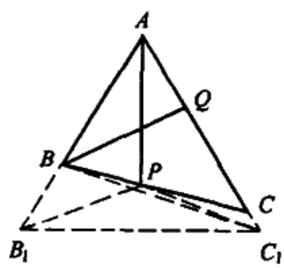



图 24.30

（2001 年第 42 届 IMO 第 5 题）

**解**　延长 $AB$ 到 $B_1$ 使 $BB_1 = BP$，在 $QC$ 或其延长线上取 $C_1$ 使 $QC_1 = QB$. 于是

$$AB_1 = AB + BP = AQ + QB = AC_1$$

而 $\angle BAC = 60°$，从而 $\triangle AB_1C_1$ 为正三角形，直线 $AP$ 是 $\triangle AB_1C_1$ 的对称轴. 即有

$$PC_1 = PB_1, \angle PC_1A = \angle PB_1A = \angle BPB_1 = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle PBQ$$

又 $\angle QBC_1 = \angle QC_1B$，则 $\angle PC_1B = \angle PBC_1$.

当点 $P$ 不在 $BC_1$ 上时，有

$$PC_1 = PB$$

从而

$$PB_1 = PC_1 = PB = BB_1$$

即 $\triangle PBB_1$ 为正三角形，$\angle PBB_1 = 60° = \angle BAC$，矛盾（$\angle PBB_1$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，应大于 $\angle BAC$）. 因此，点 $P$ 应当在 $BC_1$ 上，即 $C$ 与 $C_1$ 重合. 故

$$\angle BCA = \frac{1}{2}\angle ABC$$



由

$$\angle BCA + \angle ABC = 180° - 60° = 120°$$

知 $\triangle ABC$ 的各角只有一种值，即

$$\angle BAC = 60°, \angle ABC = 80°, \angle BCA = 40°$$

**注**　以上解法由福建的林常先生给出.

**例 2**　如图 24.31，一个锐角 $\triangle ABC$，$\angle BAC = 60°$，三点 $H$、$O$、$I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的垂心、外心和内心，如果 $BH = OI$. 求 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$.

（1994 年保加利亚竞赛题）

**解**　首先可证明 $H$、$O$、$I$ 三点在题设条件下两两不重合.

若点 $H$ 与 $I$ 重合，则由 $\angle BAC$ 及性质 3 知 $B$、$H$、$O$、$C$ 共圆. 又 $BH = OI$，则 $\triangle BOC$ 的外接圆上对应的弧 $\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{OI} = \overset{\frown}{OH}$，即有

$$\angle BCH = \frac{1}{2}\angle BCO = 15°$$

点 $O$ 在锐角 $\triangle ABC$ 内部，当 $H$ 与 $I$ 重合时，$CH$ 即是 $\angle BCO$ 的平分线，又是 $\angle BCA$ 的内分角线，这显然不可能，因而点 $H$ 与点 $I$ 不重合.

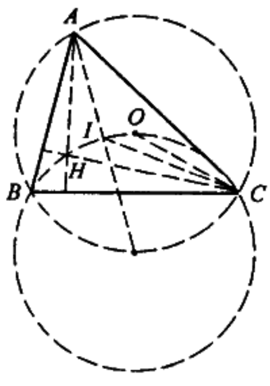



图 24.31

若点 $H$ 与点 $O$ 重合,则

$$\angle BCH = \angle BCO = 30^\circ, \angle B = 90^\circ - \angle BCH = 60^\circ$$

从而 $\triangle ABC$ 是等边三角形,即有 $O$、$I$、$H$ 三点重合,$OI = 0 < BH$ 与题设矛盾.

又点 $O$ 与点 $I$ 也不会重合,否则 $BH = 0$ 也矛盾.下面求 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$.

由 $\angle BAC = 60^\circ$ 及性质 3 知 $B$、$H$、$I$、$O$、$C$ 五点共圆,且由性质 4(1) 知,$HI = IO$,由题设 $BH = OI$,即有

$$BH = HI = IO$$

联结 $IC$、$OC$,则知

$$\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{HI} = \overset{\frown}{IO}$$

亦即知

$$\angle BCH = \angle HCI = \angle ICO = \frac{1}{3}\angle BCO = 10^\circ$$

由于 $H$ 为垂心,知

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BCH = 80^\circ$$

从而

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 40^\circ$$

为所求.



由上述例 1、例 2,又可得到

**性质9** 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 60^\circ$,$H$、$I$、$O$ 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、内心和外心,联结 $AI$ 并延长交 $BC$ 于 $P$,联结 $BI$ 交 $AC$ 于 $Q$,则 $BH = IO$ 的充要条件是 $AB + BP = AQ + QB$.

**例 3** 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 满足 $\angle A + \angle C = 2\angle B$,$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\frac{1}{2}(A - C)$ 的值.

(1996 年全国高考试题)

**解** 由 $\angle A + \angle C = 2\angle B$,知 $\angle B = 60^\circ$,设 $\angle A = 60^\circ + \alpha$,$\angle C = 60^\circ - \alpha$,且 $\frac{\angle A - \angle C}{2} = \alpha$.从而

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\cos(60^\circ + \alpha)} + \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha} =$$

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \frac{3}{4}} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\cos B} = -2\sqrt{2}$$

故 $$4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0$$
即 $$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha+3)=0$$
而 $$2\sqrt{2}\cos\alpha+3\neq 0$$
所以 $$2\cos\alpha-\sqrt{2}=0$$
亦即 $$\cos\alpha=\cos\frac{1}{2}(A-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
为所求.

**例 4**　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 $a$、$b$、$c$.若 $\angle A+\angle C=2\angle B$.求证：$a^4+c^4\leqslant 2b^4$.

**证明**　因 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$ 及 $\angle A+\angle C=2\angle B$，则 $B=\frac{\pi}{3}$，故
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac\geqslant ac$$
又 $$a^4+c^4=(a^2+c^2)^2-2a^2c^2=(a^2+c^2+\sqrt{2}ac)(a^2+c^2-\sqrt{2}ac)=$$
$$[b^2+(\sqrt{2}+1)ac][b^2-(\sqrt{2}-1)ac]=-a^2c^2+2acb^2+b^4=$$
$$-(ac-b^2)^2+2b^4$$
又 $$0<ac\leqslant b^2,\ -(ac-b^2)^2\leqslant 0$$ 
故 $$a^4+c^4\leqslant 2b^4$$

**注**　含有 60° 内角的三角形问题在 1994 年全国高中联赛及 2001 年国家集训选拔赛中均曾出现过.

## 第 2 节　关于平行四边形的几个命题

利用本年度西部数学奥林匹克中的平面几何试题结论(即梯形的一个性质)可讨论平行四边形的有关问题①.

**命题 1**　设 $ABCD$ 是一个平行四边形，$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上任意一点，$O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$ 分别是 $\triangle AEH$、$\triangle BEF$、$\triangle CFG$、$\triangle DGH$ 的外心.求证：四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是一个平行四边形.

(1992 年莫斯科世界城市联赛试题)

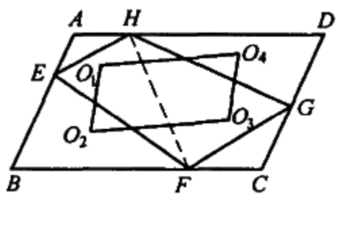


图 24.32

**证明**　如图 24.32，联结 $HF$，则四边形 $ABFH$、$CDHF$ 是梯形.

① 刘中华.梯形的一个性质及应用[J].中学数学，2000(1)：45-46.

由梯形性质,知

$$O_1O_2=\frac{HF}{2\sin B},O_3O_4=\frac{HF}{2\sin C}$$

又 $AB\ /\!/\ CD$,则 $\sin B=\sin C$,即 $O_1O_2=O_3O_4$.同理可证 $O_1O_4=O_2O_3$.故四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是一个平行四边形.

**命题 2** 在 $\square ABCD$ 中,$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上任意一点,$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$ 分别是 $\triangle AEH$、$\triangle BEF$、$\triangle CFG$、$\triangle DGH$ 的垂心,则四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 是一个平行四边形.

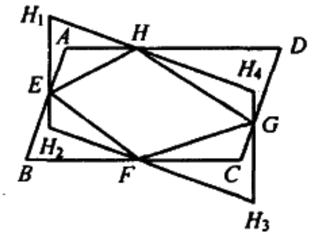


图 24.33

**证明** 如图 24.33,因 $H_1$ 在过点 $E$ 且垂直于 $AD$ 的直线上,$H_2$ 在过点 $E$ 且垂直于 $BC$ 的直线上,又 $AD\ /\!/\ BC$,则 $H_1H_2\perp BC$,同理 $H_3H_4\perp BC$,从而 $H_1H_2\ /\!/\ H_3H_4$.同理 $H_2H_3\ /\!/\ H_1H_4$.故四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 是一个平行四边形.

**命题 3** 在 $\square ABCD$ 中,$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上任意一点,$G_1$、$G_2$、$G_3$、$G_4$ 分别是 $\triangle AEH$、$\triangle BEF$、$\triangle CFG$、$\triangle DGH$ 的重心,则四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 是一个平行四边形.

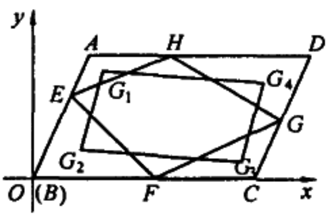


图 24.34

**证明** 如图 24.34,建立直角坐标系,因为 $ABCD$ 是平行四边形,所以可设 $A(a,b)$、$B(0,0)$、$C(c,0)$、$F(d,0)$、$D(a+c,b)$、$H(f,b)$.

于是直线 $AB$ 的方程是

$$y=\frac{b}{a}x$$

直线 $CD$ 的方程是 $$y=\frac{b}{a}(x-c)$$

则可设 $E(e,\frac{b}{a}e)$,$G(g,\frac{b}{a}(g-c))$,即

$$G_1(\frac{a+e+f}{3},\frac{2b+\frac{b}{a}e}{3}),G_2(\frac{e+d}{3},\frac{\frac{b}{a}e}{3})$$

$$G_3(\frac{g+d+c}{3},\frac{\frac{b}{a}(g-c)}{3}),G_4(\frac{a+c+f+g}{3},\frac{2b+\frac{b}{a}(g-c)}{3})$$

则 $$G_1G_2=\sqrt{(\frac{a+f-d}{3})^2+(\frac{2b}{3})^2}$$

$$G_3G_4=\sqrt{(\frac{a+f-d}{3})^2+(\frac{2b}{3})^2}$$

故
$$G_1G_2=G_3G_4$$
同理
$$G_1G_4=G_2G_3$$
从而 $G_1G_2G_3G_4$ 是一个平行四边形.

**命题 4**　在 $\square ABCD$ 中,$E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上任意一点,$I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$ 分别是 $\triangle AEH$、$\triangle BEF$、$\triangle CFG$、$\triangle DGH$ 的内心,则存在四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 不是平行四边形.

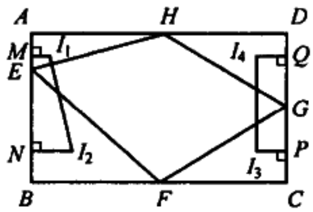



图 24.35

**证明**　如图 24.35,设四边形 $ABCD$ 是一个矩形,$AD=BC=8$,$AB=CD=4$,在 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上分别取 $E$、$F$、$G$、$H$ 使得 $AE=1$,$BF=FC$,$CG=GD$,$DH=HA$,作 $I_1M\perp AB$、$I_2N\perp AB$、$I_3P\perp CD$,$I_4Q\perp CD$,垂足分别为 $M$、$N$、$P$、$Q$.则

$$I_1M=\frac{5-\sqrt{17}}{2},I_2N=1$$

$$I_3P=I_4Q=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}=3-\sqrt{5}$$

由 $I_1M\neq I_2N$,$I_3P=I_4Q$,则 $I_1I_2 \not\parallel AB$,$I_3I_4\parallel CD$,而 $AB\parallel CD$,则 $I_1I_2\not\parallel I_3I_4$.故四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 不是一个平行四边形.

**命题 5**[①]　平行四边形为矩形的充分必要条件是空间一点到平行四边形两双相对顶点的距离的平方和相等.

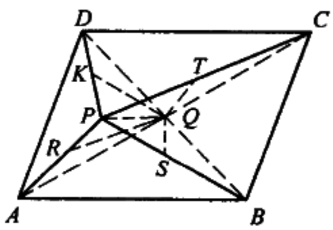



图 24.36

**证明**　充分性:令 $P$ 为 $\square ABCD$ 所在平面内或外的任一点,$Q$ 为 $AC$ 与 $BD$ 的交点.分别取 $PA$、$PB$、$PC$、$PD$ 的中点 $R$、$S$、$T$、$K$,如图 24.36 所示,则四边形 $KPSQ$、四边形 $PRQT$ 均为平行四边形,于是

$$2(PK^2+PS^2)=PQ^2+SK^2$$
$$2(PR^2+PT^2)=PQ^2+RT^2$$

由题设有 $PB^2+PD^2=PA^2+PC^2$,即

① 沈文选.数学问题 782 号.数学通报,1992(8):48-49.

$$4PK^2+4PS^2=4PR^2+4PT^2$$

由上述三式,有 $RT^2=KS^2$,即 $RT=KS$.

而 $RT=\frac{1}{2}AC$,$KS=\frac{1}{2}BD$,于是 $AC=BD$.四边形 $ABCD$ 为矩形.

必要性:如图 24.37(a),令点 $P$ 为矩形 $ABCD$ 所在平面内任一点,点 $P$ 到 $AB$、$DC$、$BC$、$AD$ 边的距离分别为 $a$、$b$、$c$、$d$,由勾股定理,易知

$$PA^2+PC^2=(a+b)^2+d^2+b^2+c^2=PB^2+PD^2$$

如图 24.37(b),令点 $P$ 在矩形 $ABCD$ 所在平面外任一点,$P$ 在矩形所在平面内的射影为 $O$.则

$$AO^2+OC^2=BO^2+OD^2$$

从而,有

$$(AO^2+PO^2)+(OC^2+PO^2)=(BO^2+PO^2)+(OD^2+PO^2)$$

故
$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$



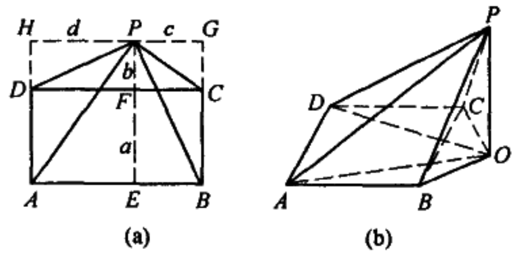



图 24.37

# 第 25 章　2003 ~ 2004 年度试题的诠释

**女子赛试题 1**　已知 $D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 上的任意一点，$E$ 是边 $AC$ 上的任意一点，联结 $DE$，$F$ 是线段 $DE$ 上的任意一点．设 $\frac{AD}{AB}=x$，$\frac{AE}{AC}=y$，$\frac{DF}{DE}=z$．证明：

(1) $S_{\triangle BDF}=(1-x)yzS_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CEF}=x(1-y)(1-z)S_{\triangle ABC}$．

(2) $\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}\leqslant\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$．

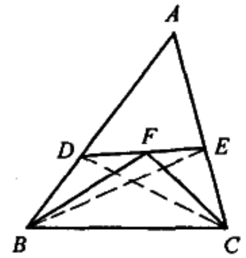



图 25.1

**证明**　(1) 如图 25.1，有

$$S_{\triangle BDF}=zS_{\triangle BDE}=z(1-x)S_{\triangle ABE}=z(1-x)yS_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle CEF}=(1-z)S_{\triangle CDE}=(1-z)(1-y)S_{\triangle ACD}=(1-z)(1-y)xS_{\triangle ABC}$$

(2) 由 (1) 得

$$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}=[\sqrt[3]{(1-x)yz}+\sqrt[3]{x(1-y)(1-z)}]\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}\leqslant$$
$$[\frac{(1-x)+y+z}{3}+\frac{x+(1-y)+(1-z)}{3}]\cdot\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}=\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$

**女子赛试题 2**　如图 25.2，$ABCD$ 是圆内接四边形，$AC$ 是圆的直径，$BD\perp AC$，$AC$ 与 $BD$ 的交点为 $E$，$F$ 在 $DA$ 的延长线上．联结 $BF$，$G$ 在 $BA$ 的延长线上，使得 $DG\parallel BF$，$H$ 在 $GF$ 的延长线上，$CH\perp GF$．证明：$B$、$E$、$F$、$H$ 四点共圆．

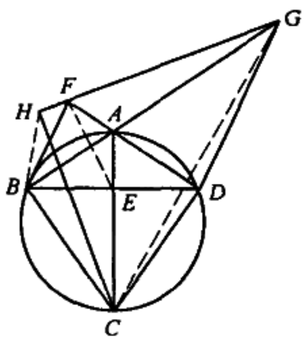



图 25.2

**证明**　联结 $BH$、$EF$、$CG$．因为 $\triangle BAF\backsim\triangle GAD$，则

$$\frac{FA}{AB}=\frac{DA}{AG}\quad ①$$

因为 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$,则

$$\frac{AB}{EA}=\frac{AC}{DA} \qquad ②$$

①×②得

$$\frac{FA}{EA}=\frac{AC}{AG}$$

因为 $\angle FAE=\angle CAG$,所以 $\triangle FAE \backsim \triangle CAG$,于是 $\angle FEA=\angle CGA$.

由题设知,$\angle CBG=\angle CHG=90^\circ$,从而,$B$、$C$、$G$、$H$ 四点共圆. 故 $\angle BHC=\angle BGC$.于是

$$\angle BHF+\angle BEF=\angle BHC+90^\circ+\angle BEF=\angle BGC+90^\circ+\angle BEF=\angle FEA+90^\circ+\angle BEF=180^\circ$$

所以,$B$、$E$、$F$、$H$ 四点共圆.

**女子赛试题3** 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,$a$、$b$、$c$ 互不相等,$AD$、$BE$、$CF$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线,且 $DE=DF$.证明:



(1) $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

(2) $\angle BAC>90^\circ$.

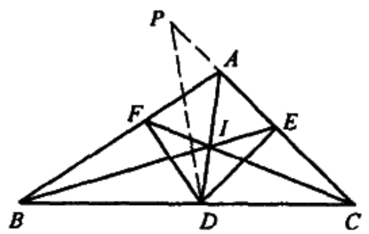



图 25.3

**证明** 如图 25.3,由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE}$$

则
$$\sin\angle AFD=\sin\angle AED$$
故
$$\angle AFD=\angle AED$$
或
$$\angle AFD+\angle AED=180^\circ$$
若
$$\angle AFD=\angle AED$$
则
$$\triangle ADF\cong\triangle ADE,AF=AE$$
于是
$$\triangle AIF\cong\triangle AIE,\angle AFI=\angle AEI$$
从而
$$\triangle AFC\cong\triangle AEB$$
故 $AC=AB$ 矛盾.所以

$$\angle AFD+\angle AED=180^\circ$$

$A$、$F$、$D$、$E$ 四点共圆.于是

$$\angle DEC=\angle DFA>\angle ABC$$

在 $CE$ 的延长线上取一点 $P$,使得 $\angle DPC=\angle B$,则

$$PC=PE+CE \qquad ①$$

由 $\angle BFD = \angle PED, FD = ED$，得

$$\triangle BFD \cong \triangle PED$$

故
$$PE = BF = \frac{ac}{a+b}$$

同理
$$CE = \frac{ab}{c+a}$$

又 $\triangle PCD \backsim \triangle BCA$，则 $\frac{PC}{BC} = \frac{CD}{CA}$. 于是

$$PC = a \cdot \frac{ba}{b+c} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a^2}{b+c} \quad ②$$

由①、②得

$$\frac{a^2}{b+c} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{c+a}$$

所以
$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

(2) 由(1)的结论有

$$a(a+b)(a+c) = b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b)$$

$$a^2(a+b+c) = b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) + abc >$$
$$b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c)$$

由 $a^2 > b^2 + c^2$. 所以 $\angle BAC > 90°$.

**西部赛试题 1** 证明：若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 $P$ 到边 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的距离之和为定值，则 $ABCD$ 是平行四边形.

**证明** 用记号 $d(P,l)$ 表示点 $P$ 到直线 $l$ 的距离. 先证一个引理.

**引理** 设 $\angle SAT = \alpha$ 是一个定角，则 $\angle SAT$ 内一动点 $P$ 到两边 $AS$、$AT$ 的距离之和为常数 $m$ 的轨迹是线段 $BC$，其中 $AB = AC = \frac{m}{\sin\alpha}$. 若点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 内，则点 $P$ 到两边 $AS$、$AT$ 的距离之和小于 $m$；若点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 外，则点 $P$ 到两边 $AS$、$AT$ 的距离之和大于等于 $m$.

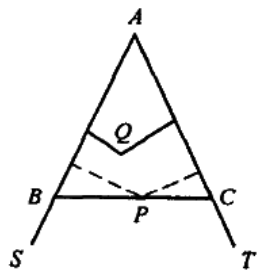



图 25.4

**引理的证明** 事实上，由 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$，知

$$d(P,AB) + d(P,AC) = m$$

如图 25.4，若点 $Q$ 在 $\triangle ABC$ 内，由 $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} < S_{\triangle ABC}$，得

$$d(Q,AB) + d(Q,AC) < m$$

若点 $Q$ 在 $\triangle ABC$ 外，$S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} > S_{\triangle ABC}$，

得

$$d(Q,AB)+d(Q,AC)>m$$

下面证明原题.

(i) 若四边形 $ABCD$ 的两组对边都不平行,不妨设 $BC$ 与 $AD$ 相交于点 $F$, $BA$ 与 $CD$ 相交于点 $E$.过点 $P$ 分别作线段 $l_1$、$l_2$,使得 $l_1$ 上的任意一点到 $AB$、$CD$ 的距离之和为常数,$l_2$ 上的任意一点到 $BC$、$AD$ 的距离之和为常数,如图 25.5 所示.则对于区域 $S$ 内任意一点 $Q$,有

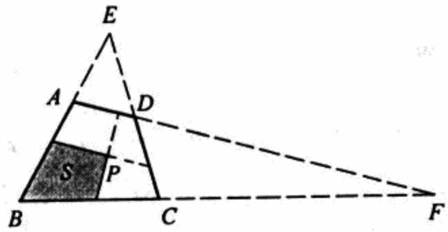



图 25.5

$$\begin{aligned}&d(P,AB)+d(P,BC)+d(P,CD)+d(P,DA)=\\&d(Q,AB)+d(Q,BC)+d(Q,CD)+d(Q,DA)=\\&[d(Q,AB)+d(Q,CD)]+[d(Q,BC)+d(Q,DA)]>\\&[d(P,AB)+d(P,CD)]+[d(P,BC)+d(P,DA)]\end{aligned}$$



矛盾.

(ii) 若四边形 $ABCD$ 是梯形,也可推得矛盾.

**西部赛试题 2** 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆,该内切圆切边 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的切点分别为 $A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$,联结 $A_1B_1$、$B_1C_1$、$C_1D_1$、$D_1A_1$,点 $E$、$F$、$G$、$H$ 分别为 $A_1B_1$、$B_1C_1$、$C_1D_1$、$D_1A_1$ 的中点.证明:四边形 $EFGH$ 为矩形的充分必要条件是 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆.

**证明** 如图25.6,设 $I$ 为四边形$ABCD$ 的内切圆圆心.由于 $H$ 为$D_1A_1$ 的中点,而 $AA_1$ 与 $AD_1$ 为过点 $A$ 所作的圆 $I$ 的切线,故 $H$ 在 $AI$ 上,且 $AI\perp A_1D_1$.

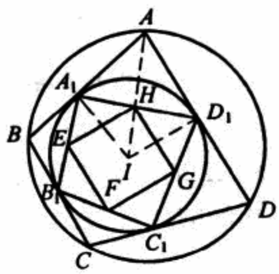



图 25.6

又 $ID_1\perp AD_1$,故由射影定理可知 $IH\cdot IA=ID_1^2=r^2$,其中 $r$ 为内切圆半径.

同理可知,$E$ 在 $BI$ 上,且 $IE\cdot IB=r^2$.于是,$IE\cdot IB=IH\cdot IA$,故 $A$、$H$、$E$、$B$ 四点共圆.所以 $\angle EHI=\angle ABE$.

类似地,可证 $\angle IHG=\angle ADG$,$\angle IFE=\angle CBE$,$\angle IFG=\angle CDG$.将这四个式子相加得

$$\angle EHG + \angle EFG = \angle ABC + \angle ADC$$

所以，$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆的充要条件是 $E$、$F$、$G$、$H$ 四点共圆．而熟知一个四边形的各边中点围成的四边形是平行四边形，平行四边形为矩形的充要条件是该四边形的四个顶点共圆．因此，$EFGH$ 为矩形的充要条件是 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆．

**试题 A**　如图 25.7，过圆外一点 $P$ 作圆的两条切线和一条割线，切点为 $A$、$B$．所作割线交圆于 $C$、$D$ 两点，$C$ 在 $P$、$D$ 之间，在弦 $CD$ 上取一点 $Q$，使 $\angle DAQ = \angle PBC$，求证：$\angle DBQ = \angle PAC$．

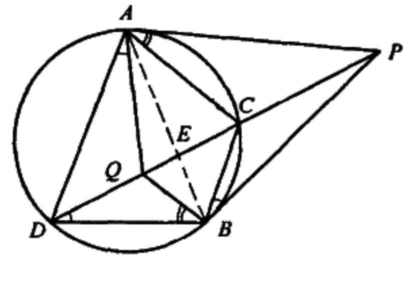


图 25.7

**证法 1**　如图 25.7，联结 $AB$，易证 $\triangle ABC \backsim \triangle ADQ$，有

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DQ}{AD}$$

即
$$BC \cdot AD = AB \cdot DQ$$

由切割线关系知 $\triangle PCA \backsim \triangle PAD$，故

$$\frac{PC}{PA} = \frac{AC}{AD}$$

同理
$$\frac{PC}{PB} = \frac{BC}{BD}$$

又因
$$PA = PB$$

故
$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

得
$$AC \cdot BD = BC \cdot AD = AB \cdot DQ$$

又由托勒密定理知

$$AC \cdot BD + BC \cdot AD = AB \cdot CD$$

得
$$AB \cdot CD = 2AB \cdot DQ$$

故
$$DQ = \frac{1}{2}CD$$

即
$$CQ = DQ$$

在 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle ABD$ 中

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DQ}{BC} = \frac{CQ}{BC}, \angle BCQ = \angle BAD$$

于是
$$\triangle CBQ \backsim \triangle ABD$$

故
$$\angle CBQ = \angle ABD$$

所以 $$\angle DBQ = \angle ABC = \angle PAC$$

**证法2** 如图25.7,联结 $AB$ 交 $PD$ 于点 $E$.因为 $PA$、$PB$ 切圆于 $A$、$B$ 两点,所以

$$\angle PDA = \angle PAC, \angle PDB = \angle PBC$$

因为 $$\angle DAQ = \angle PBC$$

所以 $$\angle BAC = \angle PDB = \angle DAQ$$

从而 $$\angle PAE = \angle ADC + \angle BAC = \angle ADQ + \angle DAQ = \angle AQP$$

因为 $$\angle EPA = \angle APQ$$

所以 $$\triangle APE \backsim \triangle QPA$$

则 $$\frac{PE}{PA} = \frac{PA}{PQ}$$

又 $PA = PB$,则 $$\frac{PE}{PB} = \frac{PB}{PQ}$$

而 $$\angle BPE = \angle QPB$$

 从而 $$\triangle PBE \backsim \triangle PQB$$

于是 $$\angle PBE = \angle PQB = \angle PDB + \angle DBQ = \angle BAC + \angle DBQ$$

由于 $$\angle PBE = \angle PBC + \angle ABC = \angle BAC + \angle PAC$$

所以 $$\angle DBQ = \angle PAC$$

**证法3**[①] 联结 $AB$,由 $\angle ADQ = \angle ABC$,$\angle DAQ = \angle PBC = \angle CAB$,知 $\triangle ADQ \backsim \triangle ABC$,有

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{AC}{BC}$$

又 $\triangle PCA \backsim \triangle PAD$,$\triangle PCB \backsim \triangle PBD$,有

$$\frac{PC}{AP} = \frac{AC}{AD}, \frac{PC}{PB} = \frac{BC}{BD}$$

即 $$AD = \frac{AP \cdot AC}{PC}, BD = \frac{PB \cdot BC}{PC}$$

于是

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AP \cdot AC}{PB \cdot BC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AQ}{DQ} \quad (*)$$

注意到 $$\angle DAQ = \angle PBC = \angle BDQ$$

---

① 沈文选,羊明亮.一道高中联赛平面几何题的新证法[J].中学教研(数学),2005(4):37-40.

知 $$\triangle ADQ \backsim \triangle DBQ$$

故 $$\angle PAC = \angle ADQ = \angle DBQ$$

**注**　(1) 对于式(*)，也可由$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{S_{\triangle ADQ}}{S_{\triangle BDQ}}$，即

$$\frac{\frac{1}{2}PA \cdot AC\sin \angle PAC}{\frac{1}{2}PB \cdot BC\sin \angle PBC} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot DQ\sin \angle ADQ}{\frac{1}{2}BD \cdot DQ\sin \angle BDQ}$$

得 $$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

(2) 也可分别在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADQ$ 中应用正弦定理证得

$$AD : BD = AQ : DQ$$

**证法4**　联结 $AB$，由 $\angle ABD = \angle ACQ$，及 $\angle DAQ = \angle PBC = \angle BAC$，即 $\angle DAB = \angle QAC$，知 $\triangle DAB \backsim \triangle QAC$，有

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AQ}{QC}$$

由 $\triangle PDA \backsim \triangle PAC$ 及 $\triangle PDB \backsim \triangle PBC$，有

$$\frac{AD}{AC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PC} = \frac{BD}{BC}$$

即 $$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AQ}{QC}$$

注意到 $\angle QAC = \angle DAB = \angle BCQ$，知

$$\triangle ACQ \backsim \triangle CBQ$$

从而 $$\angle CBQ = \angle ACQ = \angle ABD$$

即 $$\angle ABD - \angle ABQ = \angle CBQ - \angle ABQ$$

故 $$\angle DBQ = \angle ABC = \angle PAC$$

**证法5**　联结 $AB$，令 $\angle PBC = \alpha$，$\angle PAC = \beta$，则 $\angle DAQ = \alpha$，$\angle PDA = \angle ABC = \beta$，由 $\angle AQC = \alpha + \beta = \angle PBA$，知 $P$、$B$、$Q$、$A$ 四点共圆．于是

$$\angle CQB = \angle PAB = \angle PBA = \alpha + \beta$$

又 $$\angle CQB = \angle CDB + \angle DBQ$$

而 $$\angle CDB = \alpha$$

故 $$\angle DBQ = \beta = \angle PAC$$

**注**　也可由 $\angle QAB = \angle DAB - \angle DAQ = \angle DCB - \angle PBC = \angle QPB$ 证

$P$、$B$、$Q$、$A$ 共圆.

**证法6** 联结 $AB$,由 $\angle BPC+\angle PBC=\angle BCD=\angle BAD=\angle BAQ+\angle DAQ$,及已知$\angle DAQ=\angle PBC$,有$\angle BPC=\angle BAQ$,故 $B$、$Q$、$A$、$P$ 四点共圆.

在圆 $BQAP$ 中,由 $AP=BP$ 有 $\angle AQP=\angle BQP$,即

$$\angle DAQ+\angle ADQ=\angle BDQ+\angle DBQ=\angle PBC+\angle DBQ$$

而 $$\angle DAQ=\angle PBC$$

故 $$\angle DBQ=\angle ADQ=\angle PAC$$

**证法7** 如图25.8,设$\triangle PAB$的外接圆交 $PD$ 于 $Q'$,联结 $AB$.

设 $\angle PBC=\alpha$,$\angle PAC=\beta$,$\angle APC=x$,$\angle BPC=\gamma$,则

$$\angle Q'BA=x,\angle Q'AB=\gamma$$



而 $$\angle DBA=\angle DCA=\beta+x$$

故 $$\angle DBQ'=\beta=\angle PAC$$

又由 $$\angle DAB=\angle DCB=\alpha+\gamma$$

知 $$\angle DAQ'=\alpha=\angle PBC$$

由此即知 $Q'$ 应与 $Q$ 重合.故 $\angle DBQ=\angle PAC$.

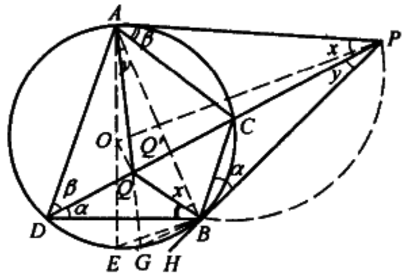



图25.8

**证法8** 如图25.8,设圆心为 $O$,取 $CD$ 的中点$Q'$,联结 $OQ'$,则 $OQ'\perp CD$,联结 $OA$,则 $OA\perp AP$,从而 $P$、$A$、$O$、$Q'$ 四点共圆,即有 $\angle Q'AB=\gamma$.

延长 $AO$ 交圆于$E$,延长 $AQ'$ 交圆于$G$,设 $H$ 为$PB$ 延长线上一点,联结 $PO$、$BG$、$BE$,则

$$\angle OPQ'=\angle EAG=\angle GBE$$

$$\angle GBH+\angle GBE=\angle EBH=\angle EAB=\angle Q'AB+\angle EAG$$

故 $$\angle GBH=\gamma=\angle BPC$$

从而 $$BG\parallel CD$$

即有 $$\overset{\frown}{DG}=\overset{\frown}{CB}$$

亦即有 $$\angle DAQ'=\angle PBC$$

由此即知 $Q'$ 与 $Q$ 重合,即 $Q$ 为 $CD$ 的中点.

由 $\triangle ADQ\backsim\triangle ABC$ 有

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DQ}{BC}=\frac{CQ}{BC}$$

又　$$\angle BCQ=\angle BAD$$

则　$$\triangle CBQ\backsim\triangle ABD$$

故　$$\angle CBQ=\angle ABD$$

即得　$$\angle DBQ=\angle ABC=\angle PAC$$

**证法9**　联结 $PO$、$OQ$、$OA$、$AB$，如图25.8所示，由题设有

$$\angle PBC=\angle CDB=\angle DAQ$$

从而　$$\angle CDB+\angle ADC=\angle DAQ+\angle ADC$$

即有　$$\angle ADB=\angle AQP$$

又 $PO$ 垂直平分 $AB$，则

$$\angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle ADB=\angle AQP$$

从而 $A$、$Q$、$O$、$P$ 四点共圆.由 $\angle OAP=90°$ 知 $\angle OQP=90°$，即 $Q$ 为 $CD$ 的中点，亦即 $CQ=DQ$.由



$$\angle AQC=\angle ABP=\angle ADB,\angle ACQ=\angle ABD$$

知 $\triangle ADB\backsim\triangle AQC$，从而

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AQ}{DQ}$$

注意到 $\angle DAQ=\angle PBC=\angle BDQ$，知 $\triangle ADQ\backsim\triangle DBQ$，故

$$\angle PAC=\angle ADQ=\angle DBQ$$

**证法10**　如图25.9，设 $\angle DAQ=\alpha$，$\angle PAC=\beta$，$\angle ACD=\gamma$，$\angle DCB=\delta$，则 $\angle BDC=\angle PBC=\alpha$，$\angle ADQ=\beta$.

分别在 $\triangle ACD$、$\triangle BDC$、$\triangle PCA$、$\triangle PCB$ 中应用正弦定理，有

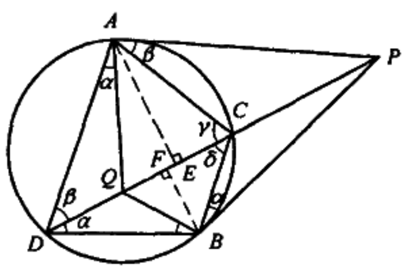



图25.9

$$\frac{\sin\gamma}{AD}=\frac{\sin\beta}{AC}\qquad ①$$

$$\frac{\sin\delta}{BD}=\frac{\sin\alpha}{BC}\qquad ②$$

$$\frac{\sin\beta}{PC}=\frac{\sin\gamma}{AP}\qquad ③$$

$$\frac{\sin\alpha}{PC}=\frac{\sin\delta}{PB} \qquad ④$$

又在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle DBC$ 中应用正弦定理,并注意到 $A$、$D$、$B$、$C$ 四点共圆,有

$$\frac{\sin\beta}{AC}=\frac{\sin\angle DAC}{CD}=\frac{\sin\angle CBD}{CD}=\frac{\sin\alpha}{BC}$$

于是由 ①、② 有
$$\frac{\sin\gamma}{AD}=\frac{\sin\delta}{BD}$$

即
$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$$

注意到 $AP=BP$,由 ③ ÷ ④ 得

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$$

在 $\triangle ADQ$ 和 $\triangle BDQ$ 中,由 $\angle DAQ=\angle BDC$,及 $\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{AQ}{DQ}$ 知 $\triangle ADQ\backsim\triangle DBQ$,故

$$\angle DBQ=\angle ADQ=\angle PAC$$



**证法 11** 如图 25.9,设 $\angle DAQ=\angle PBC=\angle QDB=\alpha$,$\angle PAC=\angle ADC=\beta$.在 $\triangle AQD$ 中,有

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

过 $A$、$B$ 分别作 $AE\perp CD$ 于 $E$,作 $BF\perp CD$ 于 $F$,则

$$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{AF}{BF}=\frac{AC\sin\beta}{BC\sin\alpha}$$

从而
$$\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{AE}{\sin\beta}}{\frac{BF}{\sin\alpha}}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

由此 $\frac{AQ}{DQ}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{AD}{BD}$

即推知 $\triangle ADQ\backsim\triangle DBQ$

故 $\angle DBQ=\angle ADQ=\angle PAC$

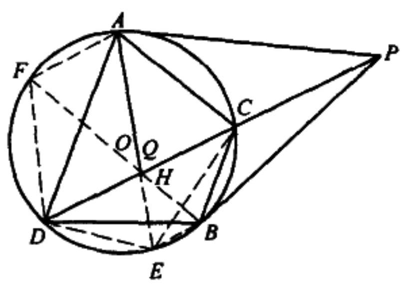


图 25.10

**证法 12** 如图 25.10,延长 $AQ$ 交圆于 $E$,联结 $BE$、$DE$、$EC$,由 $\angle DBE=\angle DAE=\angle DAQ=\angle PBC=\angle BDC$,有 $DC\parallel EB$,知

$BEDC$ 为等腰梯形，即有 $BD = EC, DE = BC$.

由 $\triangle ADQ \backsim \triangle CEQ, \triangle DEQ \backsim \triangle ACQ$，有

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{EC} = \frac{AD}{BD} \qquad ①$$

$$\frac{DQ}{AQ} = \frac{DE}{AC} = \frac{BC}{AC} \qquad ②$$

① × ② 得

$$\frac{DQ}{QC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} \qquad ③$$

又 $\triangle DAP \backsim \triangle ACP$ 与 $\triangle DBP \backsim \triangle BCP$ 有

$$\frac{AD}{AC} = \frac{PA}{PC}, \frac{BD}{BC} = \frac{PB}{PC}$$

注意 $PA = PB$，即有

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} = 1 \qquad ④$$

由 ③ 与 ④ 知 $Q$ 为 $CD$ 的中点，从而推知 $\triangle EQC \cong \triangle BQD$，知 $\angle DBQ = \angle AEC = \angle PAC$.



**证法 13**　设圆心为 $O$，分别延长 $AQ$、$BQ$ 交圆于 $E$、$F$，联结 $BE$、$DE$，由 $\angle DBE = \angle DAE = \angle DAQ = \angle PBC = \angle BDC$ 知 $BEDC$ 为等腰梯形，联结 $AF$、$DF$，则

$$\angle DBQ = \angle PAC \Leftrightarrow \angle ADC = \angle DAF \Leftrightarrow AC = DF \Leftrightarrow AF \parallel CD \Leftrightarrow$$

$$AF \parallel BE \Leftrightarrow \frac{AQ}{QE} = \frac{FQ}{QE} \qquad (*)$$

而

$$AQ \cdot QE = BQ \cdot QF$$

故 $(*) \Leftrightarrow AQ = QF, BQ = QE \Leftrightarrow Q$ 为 $CD$ 的中点 $\Leftrightarrow OQ \perp CD \Leftrightarrow O$、$Q$、$P$、$A$ 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB \Leftrightarrow \angle ADQ + \angle QDB = \angle ADQ + \angle DAQ = \angle AQP$.

**证法 14**　分别延长 $AQ$、$BQ$ 交圆于 $E$、$F$，如图 25.11 所示.

由 $\angle DAQ = \angle PBC = \angle BDC$，知 $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CB}$，联结 $DE$，知 $DCBE$ 为等腰梯形. 延长 $PD$ 至 $P'$，取 $DP' = PC$，联结 $P'E$，则可证 $\triangle PCB \cong \triangle P'DE$(SAS)，由对称性知 $P'E$ 是圆的切线，且 $E$、$B$ 关于弦 $CD$ 的中垂线对称.

如图25.11,过$P'$作圆的切线$P'F'$,则$F'$、$A$关于弦$CD$的中垂线对称,因直线$EQ$过点$A$,从而$Q$为$CD$的中点,且$F'$与$F$重合.于是

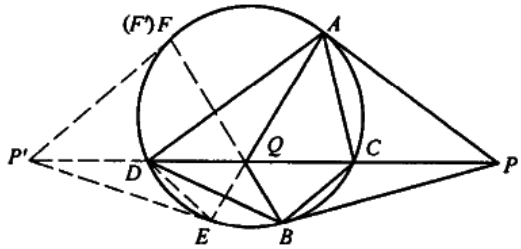



图25.11

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF},\angle DBF=\angle ADC=\angle PAC$$

故
$$\angle DBQ=\angle PAC$$



**证法15** 如图25.12,联结$AB$,令$\angle DAQ=\angle 1,\angle QAB=\angle 2,\angle QDB=\angle 3,\angle QDA=\angle 4,\angle ABQ=\angle 5,\angle DBQ=\angle 6,\angle BAC=\angle 7,\angle CAP=\angle 8,\angle CBP=\angle 9,\angle ABC=\angle 10,\angle APC=\angle 11,\angle CPB=\angle 12$,从而

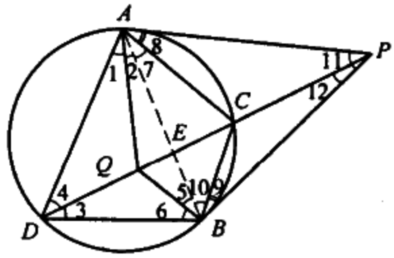



图25.12

$$\angle 1=\angle 3=\angle 7=\angle 9,\angle 4=\angle 8=\angle 10$$

由$\angle 12+\angle 9=\angle BCD=\angle BAD=\angle 1+\angle 2$知$\angle 2=\angle 12$,推知$A$、$Q$、$B$、$P$四点共圆,有$\angle 5=\angle 11$.

对$\triangle ADB$与$\triangle ABP$分别应用塞瓦定理的角元形式,则有

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6}=1$$

$$\frac{\sin\angle 7}{\sin\angle 8}\cdot\frac{\sin\angle 9}{\sin\angle 10}\cdot\frac{\sin\angle 11}{\sin\angle 12}=1$$

此两式相除得
$$\sin\angle 6=\sin\angle 8$$

而$0<\angle 6,\angle 8<90°$,则$\angle 6=\angle 8$,即$\angle DBQ=\angle PAC$.

**证法16** 联结$AB$交$CD$于$E$,则$\angle EAC=\angle BAC=\angle PBC=\angle DAQ$.在$\triangle ADC$中,由$\angle DAQ=\angle CAE$,可应用斯坦纳定理,得

$$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{DQ\cdot DE}{CE\cdot CQ}$$

又由 $\triangle PAC\backsim\triangle PDA$,有$\frac{AD}{AC}=\frac{PD}{PA}$,即

$$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{PD^2}{PA^2}$$

同理

$$\frac{BD^2}{BC^2}=\frac{PD^2}{PB^2}$$

从而

$$\frac{BD^2}{BC^2}=\frac{DQ\cdot DE}{CE\cdot CQ}$$

对 $\triangle DBC$ 应用斯坦纳定理的逆定理,知 $\angle DBQ=\angle CBE=\angle PAC$.

**证法 17**　联结 $AB$ 交 $CD$ 于 $E$,令 $\angle DBQ=\alpha$,$\angle QBE=\beta$,$\angle EBC=\gamma$.由 $\angle DAQ=\angle PBC=\angle BAC=\angle EAC$,有

$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{AD\cdot AQ\sin\angle DAQ}{AE\cdot AC\sin\angle EAC}=\frac{AD\cdot AQ}{AE\cdot AC}$$



而$\frac{S_{\triangle ADQ}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{DQ}{CE}$,从而有

$$\frac{AD\cdot AQ}{AE\cdot AC}=\frac{DQ}{CE} \quad ①$$

同理

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle AQC}}=\frac{AD\cdot AE}{AQ\cdot AC}=\frac{DE}{CQ} \quad ②$$

$$\frac{S_{\triangle BQD}}{S_{\triangle BEC}}=\frac{BD\cdot BQ\sin\alpha}{BE\cdot BC\sin\gamma}=\frac{DQ}{CE} \quad ③$$

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BQC}}=\frac{BD\cdot BE\sin(\alpha+\beta)}{BQ\cdot BC\sin(\gamma+\beta)}=\frac{DE}{CQ} \quad ④$$

由 ①×②,有

$$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{DQ\cdot DE}{CE\cdot CQ} \quad ⑤$$

由 ③×④,有

$$\frac{BD^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{BC^2\sin\gamma\sin(\gamma+\beta)}=\frac{DQ\cdot DE}{CQ\cdot CE} \quad ⑥$$

由 $\triangle PDA\backsim\triangle PAC$,有

$$\frac{AD}{AC}=\frac{PD}{AP}=\frac{AP}{PC}$$

即

$$\frac{AD^2}{AC^2}=\frac{PD}{PC} \quad ⑦$$

同理

$$\frac{BD^2}{BC^2}=\frac{PD}{PC} \quad ⑧$$

由⑤、⑥、⑦、⑧得

$$\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma\sin(\gamma+\beta)$$

即
$$\cos(2\alpha+\beta)=\cos(2\gamma+\beta)$$

而
$$0<2\alpha+\beta, 2\gamma+\beta<180^\circ$$

从而
$$\alpha=\gamma$$

故
$$\angle DBQ=\angle EBC=\angle PAC$$

注 (1) 向国华老师和李向老师分别对该试题的来历和背景进行了初步探讨.①②



从试题的题设、结论以及参考解答(即证法1)可看出本题可能是以切割线定理和托勒密定理为背景改造而来.

**切割线定理** 从圆外一点引圆的切线和割线,切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

如图25.7, $PA$、$PB$ 为切线长, $PCD$ 为割线,只要联结 $AD$、$AC$(或 $BD$、$BC$),即可得证.

**托勒密定理** 圆内接四边形的对角线的乘积等于两组对边乘积之和.

如图25.7,只须在弦 $CD$ 上取一点 $Q$ 使 $\angle DAQ=\angle BAC$,再证 $\triangle ADQ\backsim\triangle ABC$. $\triangle ADB\backsim\triangle AQC$. 即容易证明.

显然,将上述两个定理加改造,合二为一可成该试题.两个定理一个是初中课本上必学定理,一个是常见的著名定理.

其实,证明此题的简捷方法可参见证法5,还可以写得更简洁一些:

事实上,如图25.7,联结 $AB$,则有 $\angle DAB=\angle DCB$,即有

$$\angle DAQ+\angle QAB=\angle PBC+\angle DPB$$

已知 $\angle DAQ=\angle PBC$,于是 $\angle QAB=\angle DPB$,因此 $A$、$Q$、$B$、$P$ 四点共圆,故

$$\angle PAB=\angle PQB$$

即有
$$\angle BAC+\angle PAC=\angle PDB+\angle DBQ$$

① 向国华.角内切圆的内接四边形的一条性质及应用[J].现代中学数学,2003(2):32-34.
② 李向.关于2003年全国高中数学联赛加试第一题[J].现代中学数学,2004(3):31-32.

又　　$\angle BAC = \angle PDB$

所以　　$\angle PAC = \angle DBQ$

由这种证法,可将题中条件改变,即如图25.13中的 $A$、$B$ 两点可以不是切点,只需要是弦 $CD$ 所对的两条弧上各一点即可,故原题可推广为:过圆外一点 $P$ 作圆的一条割线交圆于 $C$、$D$ 两点,$C$ 在 $P$、$D$ 之间,$A$、$B$ 分别是弦 $CD$ 所对的两条弧上的任一点,在弦 $CD$ 上取一点 $Q$,使 $\angle DAQ = \angle PBC$. 求证:$\angle DBQ = \angle PAC$.

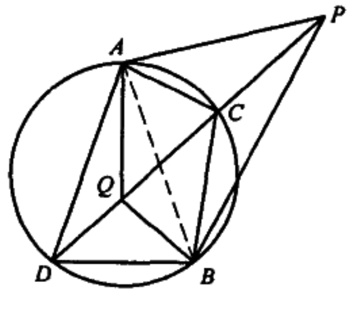


图 25.13

如图 25.13,其证明即为前面简证.

如果说要探寻推广题的背景可能是常作为学生练习的几何证明题(80 年代初中数学),它是关于两个相交圆的“连体”圆内接四边形的一个性质.

如图 25.14,两圆相交于 $A$、$B$ 两点,一条直线与两圆分别交于 $D$、$Q$、$C$、$P$ 四点. 求证:$\angle DAQ = \angle PBC$,$\angle DBQ = \angle PAC$.

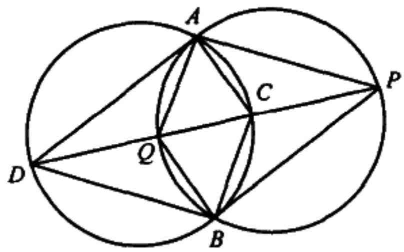


图 25.14

另外,如果从证法 3 出发考虑,则可探讨角内切圆的内接四边形的性质,这可参见专题.

(2) 关于这道试题,罗增儒教授也进行了深入地探讨,对我们的启发很大,因此将他发表在《中等数学》2004 年第 2 期上一文摘录如下.

巧思探求的过程,妙解本质的揭示.

**例 1**　过圆外一点 $P$ 作圆的两条切线和一条割线,切点为 $A$、$B$,所作割线交圆于 $C$、$D$ 两点,$C$ 在 $P$、$D$ 之间. 在弦 $CD$ 上取一点 $Q$,使

$$\angle DAQ = \angle PBC \quad ①$$

求证

$$\angle DBQ = \angle PAC \quad ②$$

(2003 年全国高中数学联赛试题)

本文所提供的解题思路,希望能与读者一起走进题目的深层结构,并获得怎样学会解题的有益启示.

*1. 朦胧对称的探索*

根据题目的描述,我们画出一个图形(图 25.15),根据图形,我们看到,在

$A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆的条件下,已知式 ① 与求证式 ② 存在一种对称关系(图 25.16).

当然,由一对上下相等的角推出另一对(由同样六个点组成)上下相等的角不是无条件的,题目给出的条件是:

(1)$A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆.

(2)$PA$、$PB$ 是该圆的切线.

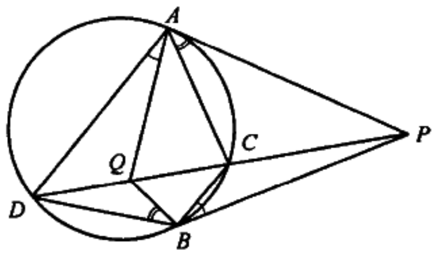



图 25.15

把已知圆添到图 25.16(a) 中,如图 25.17(a)所示,出于左右两边对称性的考虑(以美启真的解题策略),$A$、$P$、$B$、$Q$ 会不会也四点共圆(图 25.17(b))?这就产生了一个解题思路.

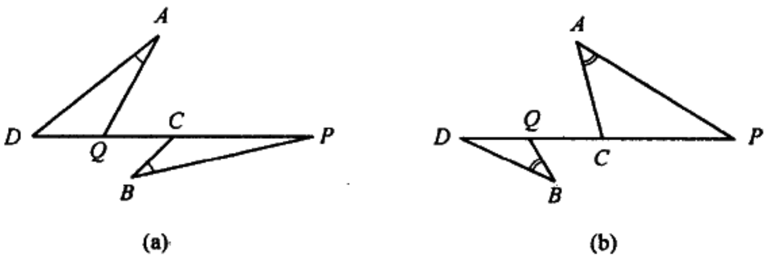



图 25.16

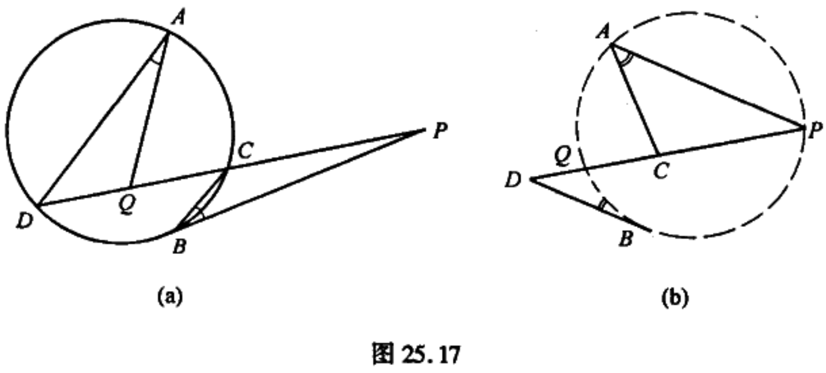



图 25.17



由图 25.15 中角的相等关系去推出 $A$、$P$、$B$、$Q$ 四点共圆,再由两圆中角的相等关系,得出新角的相等关系.

回到图 25.15,记 $\angle DAQ = \angle PBC = \angle 1$,$\angle PAC = \angle 2$,标出所有能与这两个角相等的角(图 25.18),这时既无法看出为什么 $\angle DBQ$ 会等于 $\angle 2$,也无法看出为什么 $A$、$P$、$B$、$Q$ 会四点共圆.一个基本的出路是进一步发挥条件(特别是 $A$、$C$、$B$、$D$ 共圆)的功能,在记忆网络中激活与圆(特别是四点共圆)有关的

知识点：圆心角、圆周角定理，弦切角定理，切割线定理，相交弦定理，四点共圆的性质定理，四点共圆的判别定理……

我们可能会首先选择切割线定理进行探索（如同评分标准那样），但在解题分析（或回顾反思）时会发现，一旦联结 $AB$，便有（图 25.19）

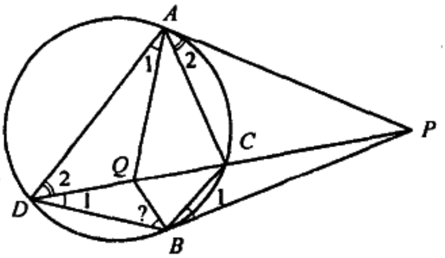



图 25.18

$$\angle ABP = \angle 1 + \angle 2 = \angle AQP \qquad ③$$

从而，$A$、$P$、$B$、$Q$ 四点共圆.

我们也可能为了沟通直线 $PD$ 外两点 $A$、$B$ 与线上四点 $P$、$C$、$Q$、$D$ 的更多联系，而由相交弦定理想到联结 $AB$ 与 $PD$ 相交于 $S$.

这时我们激活了记忆网络中更多的知识点，又揭示了题目中更多的数学关系，如

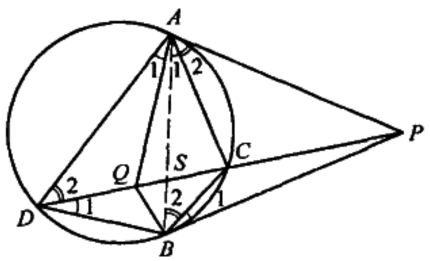



图 25.19

$$\angle BAC = \angle 1, \angle ABC = \angle 2$$

$$\angle PAB = \angle PBA = \angle 1 + \angle 2 = \angle ADB(\text{弦切角定理}) = \angle AQP(\triangle ADQ\text{ 中外角定理}) = \cdots$$

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$

…

也许我们会在众多冗杂信息的干扰面前暂时抓不住关键，为了证明 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆而思考 $SA \cdot SB = SP \cdot SQ$，导致证 $\triangle SAQ \backsim \triangle SPB$. 从而得出 $\angle SBP = \angle SQA$. 眼光再放远一点就是式 ③$\angle ABP = \angle AQP$，于是得出 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆. 在这个圆上，由 $PA = PB$，有

$$\angle AQP = \angle BQP \qquad ④$$

从而

$$\angle DBQ = \angle BQP - \angle 1 = \angle AQP - \angle 1 = \angle 2(\triangle ADQ\text{ 中})$$

**证明**　联结 $AB$. 因为

$$\angle PQA = \angle QDA + \angle QAD(\triangle ADQ\text{ 中}) = \angle ABC + \angle PBC(\text{圆周角定理、式①}) = \angle PBA$$

所以，$P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆（图 25.20）.

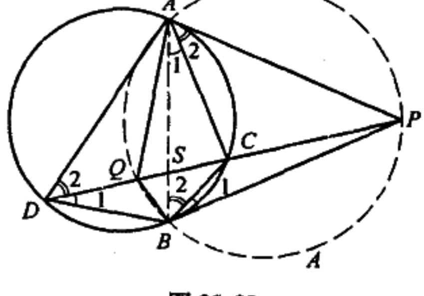



图 25.20

因为 $PA = PB$,则 $\angle BQP = \angle AQP$,从而

$$\angle DBQ = \angle BQP - \angle BDC = \angle AQP - \angle PBC = \angle AQP - \angle DAQ = \angle ADC = \angle PAC$$

作为探索,这是一个成功的思路,但作为解题,这只是迈出蹩脚的第一步.

**2. 自觉反思的领悟**

如果说图 25.15 所提供的问题情境是一个黑房间的话,那么,在黑房间中摸索前进就难免会走弯路,甚至迷失方向.而图 25.20 所提供的问题情境却大不相同,它已经拉开了黑房间的电灯,为我们认识问题的本质打开了大门.

反思解题过程,我们看到这样的基本步骤(图 25.21):

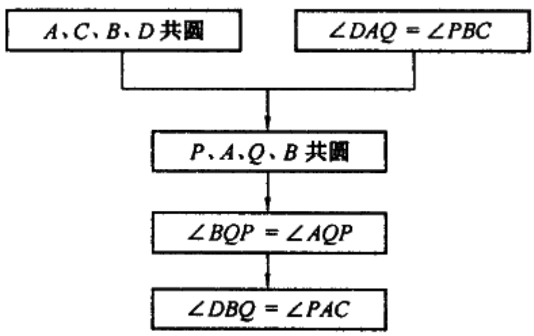



图 25.21

如果说,在思路探求中对 $A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆进行了较多思考的话,那么,对 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆所带来的结果还挖掘得比较少.其实,图 25.20 中能导出结论、代替 $\angle BQP = \angle AQP$ 的等角关系还很多(从而有一题多解).如

$$\angle PAB = \angle PQB \quad ⑤$$

$$\angle ACD = \angle ABD \quad ⑥$$

…

特别重要的是,式 ④ 或更一般地

$$\angle PAB = \angle PBA = \angle BQP = \angle AQP$$

依赖于切线的性质 $PA = PB$,而式③、式⑤、式⑥却与 $PA = PB$ 无关.这说明 $A$、$B$ 为切点是多余的,解法还可以改进.

**例 2** 过圆外一点 $P$ 作圆的三条割线 $PA$、$PB$、$PCD$($C$ 在 $P$、$D$ 之间),在弦 $CD$ 上取一点 $Q$,使 $\angle DAQ = \angle PBC$.求证:$\angle DBQ = \angle PAC$.

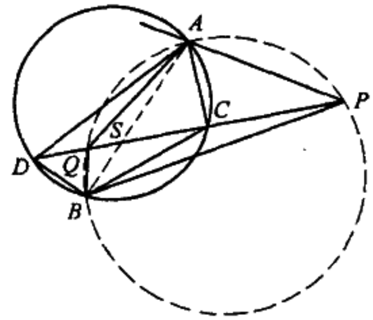


图 25.22

**分析**　这时的题目有两种图形，一是 $A$、$B$ 同为近(远)交点(类似于图25.15)，二是 $A$、$B$ 中一个为近交点一个为远交点(图 25.22)，但证法完全一样.

**证法 1**　联结 $AB$. 因为

$$\angle PQA = \angle QDA + \angle QAD = \angle ABC + \angle PBC = \angle PBA$$

所以，$P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆. 从而(用式 ⑤)

$$\angle PAB = \angle PQB$$

又 $\angle BAC = \angle BDC$，相减得

$$\angle DBQ = \angle PQB - \angle BDC(\triangle QBD\text{ 中}) = \angle PAB - \angle BAC = \angle PAC$$

**证法 2**　同证法 1 得 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆. 从而 $\angle APQ = \angle ABQ$，又 $\angle ACD = \angle ABD$(用式 ⑥)，相减得

$$\angle DBQ = \angle ABD - \angle ABQ = \angle ACD - \angle APQ = \angle PAC(\triangle PAC\text{ 中})$$

更多的证法不赘述. 需要注意的是，证法中的前后两个步骤存在着明显的对称结构. 首先在已知圆中用“三角形外角定理”推出一个隐含的圆，然后又用“三角形外角定理”推出结论. 这不仅是题目对称结构的一个呈现，同时也是对称结构的一个揭示，其前景是：同样的步骤可证逆命题成立.



**例 3**　过圆外一点 $P$ 作圆的三条割线 $PA$、$PB$、$PCD$($C$ 在 $P$、$D$ 之间)，在弦 $CD$ 上取一点 $Q$，则 $\angle DAQ = \angle PBC$ 成立的充分必要条件是 $\angle DBQ = \angle PAC$.

**证明**　必要性已如上所述，只证充分性.

如图25.20、图25.22，联结 $AB$. 由 $A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆有 $\angle BAC = \angle BDC$，又 $\angle PAC = \angle DBQ$，相加得

$$\angle PAB = \angle BAC + \angle PAC = \angle BDC + \angle DBQ = \angle PQB(\triangle QBD\text{ 中})$$

故 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆. 从而 $\angle PQA = \angle PBA$，又 $\angle ADC = \angle ABC$，相减得

$$\angle DAQ = \angle PQA - \angle ADC(\triangle ADQ\text{ 中}) = \angle PBA - \angle ABC = \angle PBC$$

此证法与例 2 的证法 1，结构是相同的，对应步骤的运算是互逆的，原逆命题之间又呈现出和谐与对称的情境. 这样，就出了三个对称情境：

(1) 题目的条件与题目的结论之间；

(2) 证法的前半部分与后半部分之间；

(3) 原命题与逆命题的证明方法之间.

这到底是怎么回事呢?

*3.反演背景的揭示*

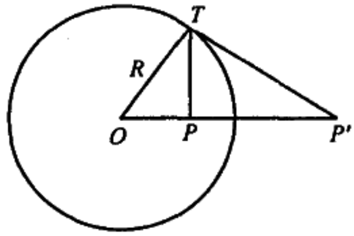



图 25.23

这里一再提到的对称性情境,与我们熟知的中心对称、轴对称并不相同,它具有保角性(如图25.16所感知到的)、保圆性(如证明过程所领略到的),应该是反演变换.

反演变换是数学家斯坦纳在1830年发现的.如图25.23所示,给定一个以 $O$ 为圆心、$R$ 为半径的圆,设 $P$ 是不同于 $O$ 的任意一点,则 $P$ 的反演点定义为:射线 $OP$ 上的一点 $P'$,它到点 $O$ 的距离满足方程 $OP\cdot OP'=R^2$.

反演变换是一一变换.由反演变换的定义可以证明以下几点.

(1) 若 $A$、$B$ 的反演点为 $A'$、$B'$,且 $O$、$A$、$B$ 不共线,则:

(i)$\triangle AOB\backsim\triangle B'OA'$.

(ii)$\angle ABO=\angle B'A'O$,$\angle BAO=\angle A'B'O$.

(iii)$A$、$B$、$A'$、$B'$ 四点共圆.



(2) 不通过反演中心的直线,反形是通过反演中心的圆.

(3) 不通过反演中心的圆周,反形是不通过反演中心的圆周.

(4) 反演变换下,两曲线夹角大小不变.

例1中的反演背景可以这样来说明:

(1) 联结 $AB$ 与 $PD$ 相交于 $S$ 后,由 $A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆及 $\angle DAQ=\angle PBC$,得出 $P$、$A$、$Q$、$B$ 四点共圆.从而有

$$SA\cdot SB=SC\cdot SD=SP\cdot SQ=R^2$$

这相当于确定了一个反演变换,其反演中心为 $S$,反演基圆为圆$(S,R)$(不是图25.20、图25.22中的任一个圆),且 $A$ 与 $B$、$C$ 与 $D$、$P$ 与 $Q$ 恰好均互为对应点(即图25.17(a)确定了一个反演变换).

(2) 在这个反演变换下,三点$(D,B,Q)$变为三点$(C,A,P)$,有 $\angle DBQ=\angle CAP$.

虽然题目有反演背景,但证明中没有用到任何反演知识,有圆周角定理、三角形外角定理和四点共圆的知识就够了.

反演变换可以改写为极坐标形式、直角坐标形式和复数形式,并在高考题(如1987年理科第6题、1995年理科第26题)、竞赛题(如1988年全国高中数学联赛第一试第4题)中出现过.

**试题B** 凸四边形 $EFGH$ 的顶点 $E$、$F$、$G$、$H$ 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边

$AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 上，且满足 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$. 而点 $A$、$B$、$C$、$D$ 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 $H_1E_1$、$E_1F_1$、$F_1G_1$、$G_1H_1$ 上，满足 $E_1F_1 /\!/ EF$，$F_1G_1 /\!/ FG$，$G_1H_1 /\!/ GH$，$H_1E_1 /\!/ HE$. 已知 $\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$. 求 $\frac{F_1C}{CG_1}$ 的值.

(1) 如图25.24，若 $EF /\!/ AC$，则

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$$

代入已知条件得 $\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$，所以

$$HG /\!/ AC$$

从而 $$E_1F_1 /\!/ AC /\!/ H_1G_1$$

故 $$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$$

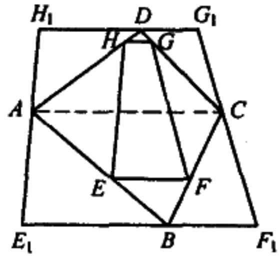



图25.24

(2) 如图25.25，若 $EF$ 与 $AC$ 不平行. 设 $FE$ 的延长线与 $CA$ 的延长线相交于点 $T$. 由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

结合题设有

$$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

由梅涅劳斯定理逆定理知 $T$、$H$、$G$ 三点共线.

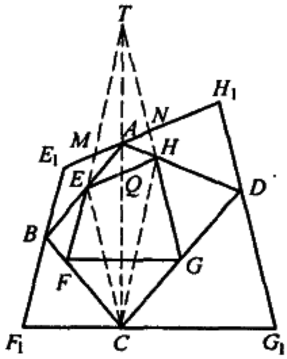



图25.25

$TF$、$TG$ 与 $E_1H_1$ 分别交于点 $M$、$N$. 由 $E_1B /\!/ EF$，得

$$E_1A=\frac{BA}{EA}\cdot AM$$

同理 $$H_1A=\frac{AD}{AH}\cdot AN$$

所以 $$\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}$$

又 $$\frac{EQ}{QH}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AHC}}=\frac{S_{\triangle ABC}\cdot AE\cdot AD}{S_{\triangle ADC}\cdot AB\cdot AH}$$

故 $$\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{EQ}{QH}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$

同理
$$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$
所以
$$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$$

**试题 C1** 设 $\angle XOY=90°$, $P$ 为 $\angle XOY$ 内的一点,且 $OP=1$, $\angle XOP=30°$,过点 $P$ 任意作一条直线分别交射线 $OX$、$OY$ 于点 $M$、$N$.求 $OM+ON-MN$ 的最大值.

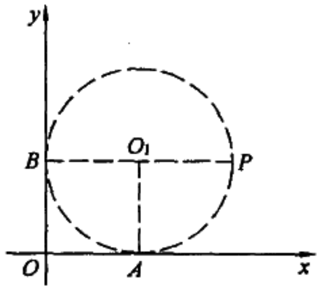


图 25.26

**解** 先作一圆 $O_1$ 过点 $P$ 且与射线 $OX$、$OY$ 相切(切点为 $A$、$B$),且点 $P$ 在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上.如图25.26所示.

分别以射线 $OX$、$OY$ 为 $x$ 轴、$y$ 轴建立直角坐标系,则有 $P(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.设 $O_1(a,a)$,则有



$$(\frac{\sqrt{3}}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-a)^2=a^2$$
即
$$a^2-(\sqrt{3}+1)a+1=0$$
所以
$$\Delta=(\sqrt{3}+1)^2-4=2\sqrt{3}$$
故
$$a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}\text{(取较小根)}$$

因为 $30°<45°$,且 $\frac{1}{2}>a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$.

所以,过点 $P$ 的圆 $O_1$ 的切线与射线 $OX$、$OY$ 都相交.

如图 25.27,设 $MN$ 是过点 $P$ 的圆 $O_1$ 的切线,$M$、$N$ 分别在射线 $OX$、$OY$ 上,设 $M_1N_1$ 是过点 $P$ 的任一直线,且与圆 $O_1$ 相交,$M_1$、$N_1$ 分别在射线 $OX$、$OY$ 上.

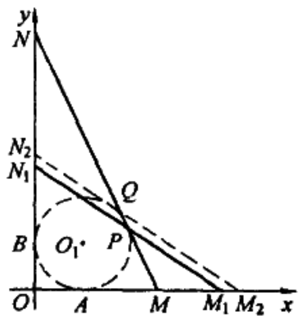


图 25.27

将 $M_1N_1$ 朝远离点 $O$ 的方向平移,直至与圆 $O_1$ 相切所得直线为 $M_2N_2$(切点为 $Q$),$M_2$、$N_2$ 分别在射线 $OX$、$OY$ 上.

由切线长定理有
$$OM_1+ON_1-M_1N_1<OM_2+ON_2-M_2N_2=$$
$$(OB+BN_2)+(OA+AM_2)-$$

$$(N_2Q + QM_2) = 2OA$$

同理
$$2OA = OM + ON - MN$$

综上可得，当 $MN$ 是过点 $P$ 的圆 $O_1$ 的切线时，$OM + ON - MN$ 取得最大值，且最大值为 $2OA = 2a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}$.

**试题 C2**　点 $D$、$E$、$F$ 分别在锐角 $\triangle ABC$ 的边 $BC$、$CA$、$AB$ 上(均异于端点)，满足 $EF \parallel BC$，$D_1$ 是边 $BC$ 上一点(异于 $B$、$D$、$C$)，过 $D_1$ 作 $D_1E_1 \parallel DE$，$D_1F_1 \parallel DF$，分别交边 $AC$、$AB$ 于点 $E_1$、$F_1$，联结 $E_1F_1$，再在 $BC$ 上方(与 $A$ 同侧)作 $\triangle PBC$，使得 $\triangle PBC \backsim \triangle DEF$，联结 $PD_1$. 求证：$EF$、$E_1F_1$、$PD_1$ 三线共点.

**证明**　如图 25.28，记 $PD_1$、$D_1E_1$、$D_1F_1$ 分别交 $EF$ 于 $D_2$、$E_2$、$F_2$，则只要证明 $E_1$、$D_2$、$F_1$ 三点共线. 因为 $\triangle E_1D_1C \backsim \triangle E_1E_2E$，所以

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2} = \frac{D_1C}{EE_2} \quad ①$$

因为 $\triangle F_1FF_2 \backsim \triangle F_1BD_1$，所以

$$\frac{F_2F_1}{F_1D_1} = \frac{FF_2}{BD_1} \quad ②$$

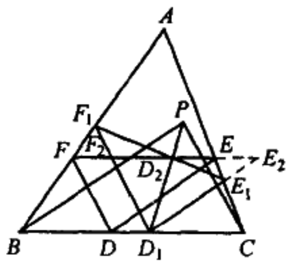



图 25.28

因为 $\triangle PBC$ 和 $\triangle D_1E_2F_2$ 都相似于 $\triangle DEF$，且它们的对应边平行，所以 $\triangle PBC \backsim \triangle D_1E_2F_2$，且对应边互相平行.

而 $PD_1$ 和 $D_1D_2$ 是这对相似三角形中处于对应位置的线段，所以

$$\frac{E_2D_2}{D_2F_2} = \frac{BD_1}{D_1C} \quad ③$$

① × ② × ③，又因为 $EE_2 = DD_1 = FF_2$(四边形 $DD_1E_2E$ 和四边形 $DD_1F_2F$ 都是平行四边形)，则

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2} \cdot \frac{E_2D_2}{D_2F_2} \cdot \frac{F_2F_1}{F_1D_1} = \frac{D_1C}{EE_2} \cdot \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{FF_2}{BD_1} = \frac{FF_2}{EE_2} = 1$$

对 $\triangle D_1E_2F_2$，由梅涅劳斯定理的逆定理知 $E_1$、$D_2$、$F_1$ 三点共线.

**试题 C3**　设 $a$、$b$、$c$ 是周长不超过 $2\pi$ 的三角形的三条边长. 证明：$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

**证法 1**　由题设得 $0 < a$、$b$、$c < \pi$. 故

$$\sin a > 0, \sin b > 0, \sin c > 0$$
$$|\cos a| < 1, |\cos b| < 1, |\cos c| < 1$$

不妨设 $\sin a \leqslant \sin b \leqslant \sin c$，若 $a = \frac{\pi}{2}$，则 $b = c = \frac{\pi}{2}$，故 $\sin a =$

$\sin b=\sin c=1$.结论显然成立.

设 $a\neq\frac{\pi}{2}$.

(i) 当 $a+b+c=2\pi$ 时,有

$$\sin c=\sin(2\pi-a-b)=-\sin(a+b)\leqslant$$
$$\sin a\mid\cos b\mid+\sin b\mid\cos a\mid<\sin a+\sin b$$

(ii) 当 $a+b+c<2\pi$ 时,由于 $a$、$b$、$c$ 构成三角形的三边,故存在一个三面角使得 $a$、$b$、$c$ 分别为其面角,如图 25.29 所示.

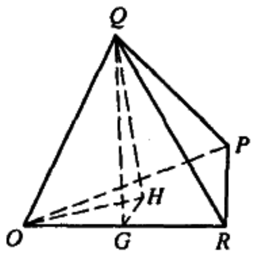


图 25.29

这里 $OR$、$OP$、$OQ$ 不在一平面上,$OQ=OP=OR=1$,$\angle QOR=a$,$\angle QOP=b$,$\angle POR=c$.

过点 $Q$ 作平面 $POQ$ 的垂线,垂足为 $H$.过 $H$ 作 $OR$ 的垂线,垂足为 $G$.设 $\angle QOH=\varphi$,$\angle HOR=\theta$,则



$$0<\varphi<\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta<2\pi$$

由勾股定理得

$$\sin a=OG=\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\theta}=$$
$$\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta}\geqslant|\sin\theta| \quad ①$$

类似有

$$\sin b=\sqrt{\sin^2(c-\theta)+\sin^2\varphi\cos^2(\theta-c)}\geqslant|\sin(c-\theta)| \quad ②$$

我们断言,① 和 ② 中的等号不能同时成立.若不然,由 $\sin^2\varphi\neq0$ 得

$$\cos\theta=\cos(c-\theta)=0$$

故 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$,$c-\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $\pm\frac{3\pi}{2}$,这与 $0<c<\pi$ 矛盾.因此

$$\sin a+\sin b>|\sin\theta|+|\sin(c-\theta)|\geqslant|\sin(\theta+c-\theta)|=\sin c$$

**证法 2** (由江苏木渎中学陈晓明给出)

(i) 由题设可知 $0<a$、$b$、$c<\pi$,故 $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 均大于 0.

(ii) 若 $0<a+b\leqslant\pi$,由题设知 $a+b>c$,即 $\frac{a+b}{2}>\frac{c}{2}$.又因

$$0<\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

所以
$$0 < \frac{c}{2} < \frac{\pi}{2}$$
故
$$\sin\frac{a+b}{2} > \sin\frac{c}{2} > 0$$

若 $\pi < a+b < 2\pi$,则
$$0 < \pi - \frac{a+b}{2} < \frac{\pi}{2}$$
又由 $a+b+c \leqslant 2\pi$,知
$$\pi - \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{c}{2}$$
且
$$0 < \frac{c}{2} < \frac{\pi}{2}$$
所以
$$\sin\frac{a+b}{2} = \sin\left(\pi - \frac{a+b}{2}\right) > \sin\frac{c}{2} > 0$$

(iii) 由题设可知 $|a-b| < c$,则
$$\frac{|a-b|}{2} < \frac{c}{2}$$
又由 $0 < a、b、c < \pi$,知



$$0 \leqslant \frac{|a-b|}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{c}{2} < \frac{\pi}{2}$$
故
$$\cos\frac{|a-b|}{2} > \cos\frac{c}{2} > 0$$
即
$$\cos\frac{a-b}{2} > \cos\frac{c}{2} > 0$$

综上所述,有
$$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} > \cos\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$
即
$$\sin a + \sin b > \sin c$$
同理
$$\sin b + \sin c > \sin a$$
$$\sin c + \sin a > \sin b$$
所以,$\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 可构成三角形的三条边长.

## 第1节　角内切圆的内接四边形的性质及应用[①]

**性质1**　一圆与 $\angle APB$ 两边切于 $A$、$B$ 两点,直线 $PCD$ 是该圆的任一割线,

① 向国华.角内切圆的内接四边形的一条性质及应用[J].现代中学数学,2003(2):32-34.

则四边形 $ACBD$ 两对边之积相等.亦即 $AC\cdot BD = BC\cdot AD$,或改写为$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$或$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$,则可叙述为每相对角的两边对应成比例.

**证明** 由相切有

$$PA = PB,\triangle PBC \backsim \triangle PDB,\triangle PAC \backsim \triangle PDA$$

故有

$$\frac{BC}{PB}=\frac{BD}{PD},\frac{AC}{PA}=\frac{AD}{PD}$$

故

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{AC}{PA}}{\frac{BC}{PB}}=\frac{\frac{AD}{PD}}{\frac{BD}{PD}}=\frac{AD}{BD}$$

即

$$AC\cdot BD = BC\cdot AD$$

**性质 2** 角内切圆内接四边形 $ACBD$,则相对的角的角平分线与另一对角线三线共点.

如图 25.30,$\angle ACB$ 与 $\angle ADB$ 的平分线与 $AB$ 三线共点.(证略)

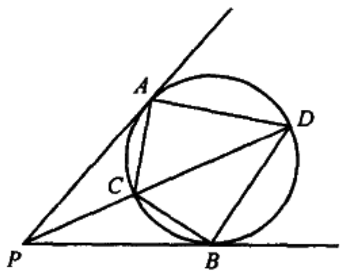


图 25.30



**例 1** $\triangle ABC$ 的内切圆分别切 $BC$、$CA$、$AB$ 于 $D$、$E$、$F$,点 $M$ 是圆上任一点,且 $MB$、$MC$ 分别交圆于 $Y$、$Z$,证明:$EY$、$FZ$、$MD$ 三线共点.

**证明** 如图25.31,$FYDZEM$ 构成圆内接六边形,根据塞瓦定理的推论(参见第 1 章第 1 节),有 $EY$、$FZ$、$MD$ 三线共点 $\Leftrightarrow \frac{FY}{YD}\cdot\frac{DZ}{ZE}\cdot\frac{EM}{MF}=1$.而由性质 1 可知,在四边形 $FYDM$ 中有$\frac{FY}{YD}=\frac{FM}{DM}$,在四边形 $DZEM$ 中有$\frac{DZ}{ZE}=\frac{DM}{ME}$,故

$$\frac{FY}{YD}\cdot\frac{DZ}{ZE}\cdot\frac{EM}{MF}=\frac{FM}{DM}\cdot\frac{DM}{ME}\cdot\frac{EM}{MF}=1$$

显然成立,故得证.

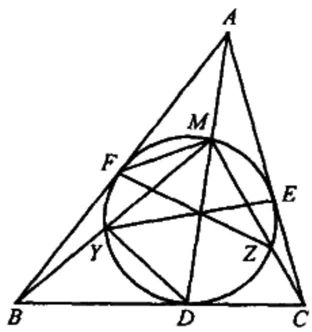


图 25.31

**例 2** 如图 25.32,$\triangle ABC$ 的内切圆分别切 $BC$、$CA$、$AB$ 于 $D$、$E$、$F$,$AD$ 与圆交于 $M$,$MB$、$MC$ 分别交圆于 $Y$,$Z$,证明:$FY$ // $MD$ // $EZ$ 的充要条件是点 $M$ 为 $AD$ 的中点.

**证明** 由性质 1 有$\frac{FY}{YD}=\frac{FM}{MD}$,又 $F$、$Y$、$D$、$M$ 四点共圆,故 $\angle FYD = \angle FMA$,若 $AM = MD$,则

$$\frac{FY}{YD}=\frac{FM}{AM}$$

故 $\triangle FYD \backsim \triangle FMA$

从而 $\angle FAM=\angle FDY=\angle BFY$

故 $FY /\!/ AD$，同理 $EZ /\!/ AD$，故充分性得证.

反过来，若 $FY /\!/ AD$ 亦可推知点 $M$ 是 $AD$ 中点.

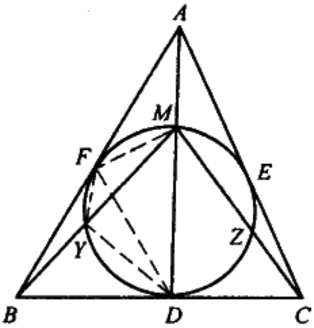


图25.32

**例3**　$\angle APB$ 内有一内切圆与边切于 $A$、$B$ 两点，$PCD$ 是任一割线交圆于 $C$、$D$ 两点，点 $Q$ 在 $CD$ 上且 $\angle QAD=\angle PBC$，证明：$\angle PAC=\angle QBD$.

（2003年全国高中数学联赛）

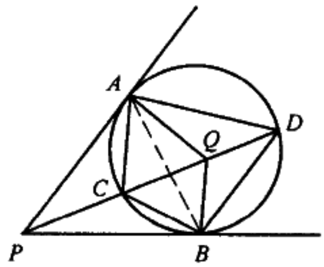


图25.33

**证明**　由弦切角等于圆周角有 $\angle PAC=\angle ADQ$，$\angle PBC=\angle QDB$，进而有 $\angle QDB=\angle QAD$. 要证 $\angle PAC=\angle QBD$，只须证 $\angle ADQ=\angle QBD$ 即可，则又只须证 $\triangle QAD \backsim \triangle QDB$. 又因为 $\angle QAD=\angle QDB$，故又只须证 $\frac{QA}{AD}=\frac{QD}{DB}$，亦即 $\frac{QA}{QD}=\frac{AD}{DB}$.

结合性质1有 $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$，于是转证 $\frac{AC}{CB}=\frac{AQ}{QD}$，而这只要联结 $AB$，说明 $\triangle ACB \backsim \triangle AQD$ 即可，而这很容易办到.

## 第2节　反演变换

设 $O$ 为平面 $\alpha$ 上一定点，对于 $\alpha$ 上任意异于点 $O$ 的点 $A$，有在 $OA$ 所在直线上的点 $A'$，满足 $OA\cdot OA'=k\neq 0$，则称法则 $I$ 为平面 $\alpha$ 上的反演变换，记为 $I(O,k)$. 其中 $O$ 为反演中心或反演极，$k$ 为反演幂；$A$ 与 $A'$ 在点 $O$ 的两侧时 $k<0$，否则 $k>0$；$A$ 与 $A'$ 为在此反演变换下的一对反演点（或反点），显然 $A$ 与 $A'$ 互为反点（但点 $O$ 的反点不存在或为无穷远点）；点 $A$ 集的像 $A'$ 集称为此反演变换下的反演形（或反形）.

由于 $k<0$ 时的反演变换 $I(O,k)$ 是反演变换 $I(O,|k|)$ 和以 $O$ 为中心的中心对称变换的复合，我们只就 $k>0$ 讨论反演变换即可. 令 $r=\sqrt{k}$，则 $OA\cdot OA'=r^2$. 此时，反演变换的几何意义则可如图25.34所示，并称以 $O$ 为圆

心，$r$ 为半径的圆为反演变换 $I(O,r^2)$ 的基圆.

由此几何意义，我们可作出与 $AA'$ 垂直的过 $A$ 的直线 $l$ 及过 $A'$ 的直线 $l'$ 的反形分别为图 25.35 中圆 $c'$ 及圆 $c$，反之以 $OA$ 和 $OA'$ 为直径的圆 $c$、圆 $c'$ 的反形分别为直线 $l'$、$l$.

由反演变换($k>0$)的定义及几何意义，即推知反演变换有下列有趣性质.

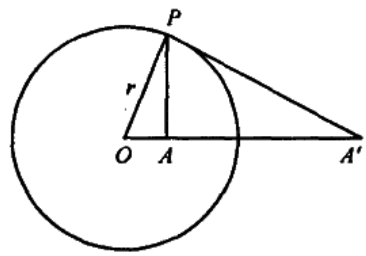



图 25.34

**性质 1** 基圆上的点仍变为自己，基圆内

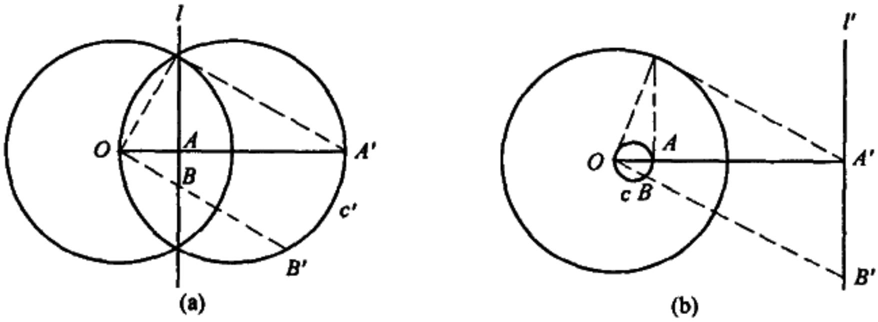





图 25.35

的点($O$ 除外)变为基圆外的点，反之亦然.

**性质 2** 不共线的任意两对反演点必共圆，过一对反演点的圆必与基圆正交(即交点处两圆的切线互相垂直).

**性质 3** 过反演中心的直线变为本身(中心除外)，过反演中心的圆变为不过反演中心的直线，特别地过反演中心的相切两圆变为不过反演中心的两平行直线；过反演中心的相交圆变为不过反演中心的相交直线.

**性质 4** 不过反演中心的直线变为过反演中心的圆，且反演中心在直线上射影的反点是过反演中心的直径的另一端点(图 25.35)；不过反演中心的圆变为不过反演中心的圆，特别地

(1) 以反演中心为圆心的圆变为同心圆；

(2) 不过反演中心的相切(交)圆变为不过反演中心的相切(交)圆；

(3) 圆($O_1,R_1$)和圆($O_2,R_2$)若以点 $O$ 为反演中心，反演幂为 $k(k>0)$，则

$$R_1=\frac{kR_2}{|OO_2^2-R_2^2|},OO_1=\frac{kOO_2}{|OO_2^2-R_2^2|}$$

下面仅给出其中两个论断的证明.

先证：不过反演中心 $O$ 的直线 $l$ 变为过 $O$ 的圆.

事实上，如图25.36所示，设 $l$ 是不过反演中心 $O$ 的直线，过 $O$ 作 $OA \perp l$ 于 $A$. 在 $OA$ 上取 $A$ 的反演点 $A'$，以 $OA'$ 为直径作圆，则此圆就是直线 $l$ 的反演象.

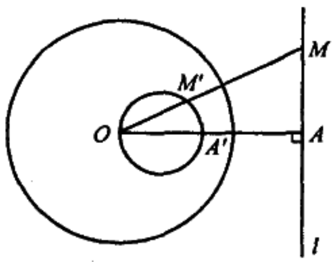


图 25.36

下面证明这个事实，设 $M$ 是 $l$ 上任一点，$M'$ 是 $M$ 的反演点，则 $M'$、$M$、$A$、$A'$ 共圆，所以 $\angle OM'A' = \angle A'AM = 90°$，$M'$ 在以 $OA'$ 为直径的圆上. 反之，若 $M'$ 在以 $OA'$ 为直径的圆上，$OM'$ 延长后交 $l$ 于 $M$，则可推知 $M'$、$M$、$A$、$A'$ 共圆，因而 $OM \cdot OM' = OA \cdot OA'$，即 $M'$ 是 $l$ 上点 $M$ 的反演点.

再证：不过反演中心的圆变为不过反演中心的圆.

事实上，如图 25.37，设 $AB$ 是不过反演中心的已知圆的直径，而 $A'$、$B'$ 分别是点 $A$、$B$ 的像点. 若 $M'$ 是已知圆上任一点 $M$ 的像点，则 $A$、$A'$、$M'$、$M$ 四点共圆. $\angle OAM = \angle OM'A'$. $B$、$B'$、$M'$、$M$ 四点共圆，$\angle OBM = \angle OM'B'$.

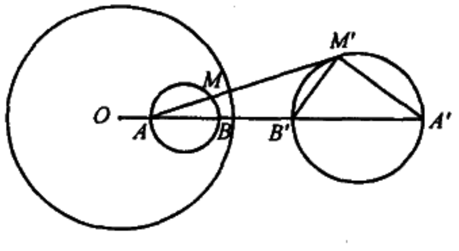


图 25.37

而 $\angle OAM - \angle OBM = \angle AMB = 90°$，所以 $\angle A'M'B' = \angle OM'A' - \angle OM'B' = 90°$. 即任意点 $M$ 的像 $M'$ 在以 $A'B'$ 为直径的圆上. 反之，也易证以 $A'B'$ 为直径的圆上任一点必是已知圆上某点的像.

**性质 5**　在反演变换下，(1) 圆和圆、圆和直线、直线和直线的交角保持不变；(2) 共线（直线或圆）点（中心除外）的反点共反形线（圆或直线），共点（中心除外）线的反形共反形点.

我们仅证命题"圆和直线相切，如果切点不与反演中心重合，在反演下保持相切，否则得到一对平行直线"及"相交圆之间的交角保持不变".

事实上，若切点不与反演中心重合，则反演后圆的像与直线的像仍具有一个公共点，即保持相切. 若切点与反演中心重合，则反演后，直线变为自身，以 $A$ 为圆心的圆变为垂直于 $OA$ 的直线，即得到一对平行直线.

两圆相交时，我们过其一交点分别引两圆的引线 $l_1$ 和 $l_2$. 由上所证，圆与直线的相切在反演下仍然保持，因此，圆的像之间的交角等于它们的切线的像之间的交角. 在以 $O$ 为中心的反演下，直线 $l_i (i = 1,2)$ 变为自身或者变为与 $l_i$ 平行的直线在点 $O$ 相切的圆. 因此，在以 $O$ 为中心的反演下，直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的像之

间的角即是这两条直线之间的交角.证毕.

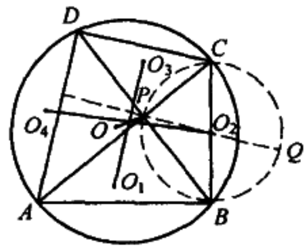



图 25.38

**例** 如图25.38,四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$,对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于 $P$.设 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$ 和 $\triangle DAP$ 的外接圆圆心分别是 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$.求证:$OP$、$O_1O_3$、$O_2O_4$ 三直线共点.

**证明** 由于本题涉及的圆较多,于是可考虑反演变换.取 $P$ 为反演中心,$P$ 关于圆 $O$ 的幂为反演基圆半径,则圆 $O$ 反演为本身,圆 $O_i$($i=1,2,3,4$)反演为四边形 $ABCD$ 各边所在直线,过点 $P$ 的直线也反演为本身.

由直线 $PO_2$ 与圆 $O_2$ 正交,可知它们的反形也正交,即 $PO_2\perp AD$.又易知 $O_4O\perp AD$,所以 $PO_2 /\!/ O_4O$.

同理,$PO_4 /\!/ O_2O$,所以 $PO_2OO_4$ 为平行四边形,$PO$、$O_2O_4$ 相交于 $PO$ 中点.

同理,$PO$、$O_1O_3$ 也相交于 $PO$ 的中点.命题获证.

# 第 26 章　2004 ~ 2005 年度试题的诠释

这一年度，首届中国东南地区数学奥林匹克于 2004 年 7 月 10 日在珠海举办．其试题我们简记为东南赛试题．这一届 8 道试题中有 2 道平面几何试题．

**东南赛试题 1**　设 $D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的一点，点 $P$ 在线段 $AD$ 上，过点 $D$ 作一直线分别与线段 $AB$、$PB$ 交于点 $M$、$E$，与线段 $AC$、$PC$ 的延长线交于点 $F$、$N$．如果 $DE = DF$，求证：$DM = DN$．

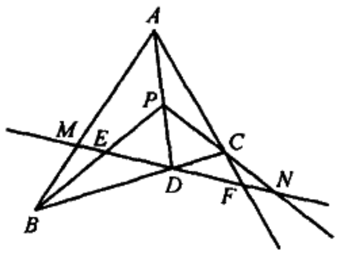



图 26.1

**证法 1**　如图 26.1，对 $\triangle AMD$ 和直线 $BEP$，$\triangle AFD$ 和直线 $NCP$，$\triangle AMF$ 和直线 $BDC$ 由梅涅劳斯定理，分别得

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DE}{EM}\cdot\frac{MB}{BA}=1 \quad ①$$

$$\frac{AC}{CF}\cdot\frac{FN}{ND}\cdot\frac{DP}{PA}=1 \quad ②$$

$$\frac{AB}{BM}\cdot\frac{MD}{DF}\cdot\frac{FC}{CA}=1 \quad ③$$

式 ①、②、③ 相乘，得　$$\frac{DE}{EM}\cdot\frac{FN}{ND}\cdot\frac{MD}{DF}=1$$

又 $DE = DF$，所以，有

$$\frac{DM}{DM-DE}=\frac{DN}{DN-DE}\Rightarrow DM=DN$$

**证法 2**　（由江苏茹双林、孙朝仁给出）如图 26.2 所示，建立直角坐标系，设 $A(0,a)$、$P(0,p)$，且设直线 $AB$ 的方程为

$$y=k_1x+a$$

直线 $AC$ 的方程为

$$y=k_2x+a$$

直线 $PB$ 的方程为

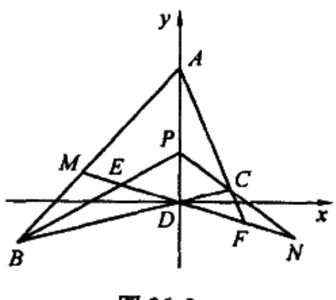



图 26.2

$$y = k_3x + p$$

直线 $PC$ 的方程为 $$y = k_4x + p$$

其中,$k_1$、$k_3 > 0$,$k_2$、$k_4 < 0$.

又设直线 $MN$ 的方程为

$$y = kx$$

于是,过点 $B$ 的直线系方程为

$$\lambda_1(k_1x - y + a) + \mu_1(k_3x - y + p) = 0$$

当 $\lambda_1 = p$,$\mu_1 = -a$(过原点)时,得直线 $BD$ 的方程为

$$(k_1p - k_3a)x + (a - p)y = 0$$

同理,直线 $CD$ 的方程为

$$(k_2p - k_4a)x + (a - p)y = 0$$

由上述两方程得同一方程为

$$k_1p - k_3a = k_2p - k_4a \quad ①$$

而由两直线 $AC$ 与 $PB$ 的方程可写成



$$(k_2x - y + a)(k_3x - y + p) = 0$$

把直线 $MN$ 的方程代入,并由 $DE = DF$(即 $x_E + x_F = 0$)得

$$p(k_2 - k) + a(k_3 - k) = 0 \quad ②$$

由式①、②得

$$p(k_1 - k) + a(k_4 - k) = 0$$

再把直线 $MN$ 的方程代入由两直线 $AB$ 与 $PC$ 组成的方程可得

$$x_M + x_N = 0$$

因此 $DM = DN$.

**东南赛试题2** 设点 $D$ 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $BC$ 上一点,$F$ 为过 $A$、$D$、$C$ 三点的圆在 $\triangle ABC$ 内的弧上一点,过 $B$、$D$、$F$ 三点的圆与边 $AB$ 交于点 $E$.求证

$$CD \cdot EF + DF \cdot AE = BD \cdot AF \quad ①$$

**证明** 如图26.3,设 $AF$ 的延长线交过点 $B$、$D$、$F$ 的圆于 $K$. 因为 $\angle AEF = \angle AKB$,则 $\triangle AEF \backsim \triangle AKB$.有

$$\frac{EF}{BK} = \frac{AE}{AK} = \frac{AF}{AB}$$

于是,要证式①,只要证明

$$CD \cdot BK + DF \cdot AK = BD \cdot AB \quad ②$$

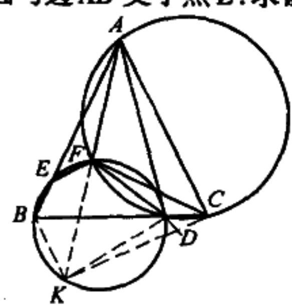



图26.3

又注意到 $\angle KBD=\angle KFD=\angle ACD$，则有

$$S_{\triangle DCK}=\frac{1}{2}CD\cdot BK\sin\angle ACD$$

进一步有

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AB\sin\angle ACD$$

$$S_{\triangle ADK}=\frac{1}{2}AK\cdot DF\sin\angle ACD$$

因此，要证式②，只要证明

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DCK}+S_{\triangle ADK} \quad ③$$

而

$$\text{式}③\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AKC}\Leftrightarrow BK\ /\!/\ AC \quad ④$$

再由 $\angle BKA=\angle FDB=\angle KAC$，知式④成立.

**女子赛试题1**　已知钝角 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为1. 证明：存在一个斜边长为 $\sqrt{2}+1$ 的等腰直角三角形覆盖 $\triangle ABC$.

**证明**　不妨设 $\angle C>90°$，于是 $\min\{\angle A,\angle B\}<45°$. 不妨设 $\angle A<45°$.

如图26.4，以 $AB$ 为直径，在顶点 $C$ 的同侧作半圆圆 $O$，则点 $C$ 位于半圆圆 $O$ 内. 作射线 $AT$ 使得 $\angle BAT=45°$，作射线 $OE$，使得 $\angle BOE=45°$，且与半圆相交于点 $E$. 过点 $E$ 作半圆的切线，分别交 $AB$ 的延长线和 $AT$ 于点 $D$ 和点 $F$. 则等腰 $Rt\triangle ADF$ 覆盖 $\triangle ABC$，且

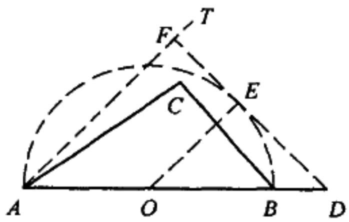



图26.4

$$AD=AO+OD=\frac{1}{2}AB+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})AB<\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})2R=1+\sqrt{2}$$

**女子赛试题2**　给定锐角 $\triangle ABC$，点 $O$ 为其外心，直线 $AO$ 交边 $BC$ 于点 $D$. 动点 $E$、$F$ 分别位于边 $AB$、$AC$ 上，使得 $A$、$E$、$D$、$F$ 四点共圆. 求证：线段 $EF$ 在边 $BC$ 上的投影的长度为定值.

**证法1**　如图26.5，设 $EF$ 在边 $BC$ 上的投影为 $E_0F_0$，过点 $D$ 分别作 $DM\perp AB$ 于 $M$，$DN\perp AC$ 于 $N$，过点 $M$、$N$ 分别作 $MM_0\perp BC$ 于 $M_0$，$NN_0\perp BC$ 于 $N_0$. 由 $\angle AMD=\angle AND=90°$，知

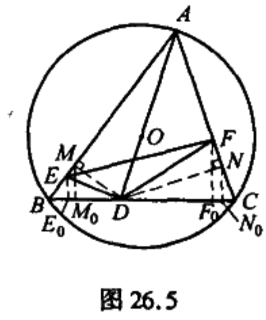



图26.5

$$\angle MDN = 180° - \angle BAC$$

因为 $\angle EDF = 180° - \angle BAC$

所以 $\angle MDE = \angle NDF$

因此 $Rt\triangle DME \backsim Rt\triangle DNF$,故

$$\frac{EM}{FN} = \frac{DM}{DN} = \frac{AD\sin\angle DAM}{AD\sin\angle DAN} = \frac{\sin\angle DAM}{\sin\angle DAN}$$

又 $\angle OAB = \frac{1}{2}(180° - 2\angle C) = 90° - \angle C$

$$\angle OAC = \frac{1}{2}(180° - 2\angle B) = 90° - \angle B$$

则

$$\frac{EM}{FN} = \frac{\cos C}{\cos B} \qquad ①$$

由平行线所截线段对应成比例的性质知

$$\frac{E_0M_0}{EM} = \frac{BM_0}{BM} = \cos B, \frac{F_0N_0}{FN} = \frac{CN_0}{CN} = \cos C$$



故

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{E_0M_0}{F_0N_0}\cdot\frac{FN}{EM} \qquad ②$$

由①、②得 $E_0M_0 = F_0N_0$

故 $E_0F_0 = M_0N_0$(定值)

**证法2** 如图26.5,过$A$作$AK \perp BC$于$K$,延长$AK$交圆$O$于$P$,联结$PE$、$PF$,再延长$AD$交圆$O$于$Q$,联结$BQ$.

记$EF$在$BC$上的投影为$E_0F_0$,$EF$与$PA$的夹角为$\alpha$,则

$$\angle BAD = 90° - \angle BQA = 90° - \angle ACB = \angle PAC = \angle KAC$$

由第22章第1节中命题4,得$S_{AEPF} = S_{\triangle ABC}$(定值).又

$$S_{AEPF} = \frac{1}{2}PA\cdot EF\sin\alpha$$

且$PA$为一定值,所以,$EF\sin\alpha$为定值.

由$AP \perp BC$,得$E_0F_0 = EF\sin\alpha$为定值.

**西部赛试题1** 四边形$ABCD$为一凸四边形,$I_1$、$I_2$分别为$\triangle ABC$、$\triangle DBC$的内心,过点$I_1$、$I_2$的直线分别交$AB$、$DC$于点$E$、$F$,分别延长$AB$、$DC$它们相交于点$P$,且$PE = PF$.求证:$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆.

**证明** 如图 26.6,联结 $I_1B$、$I_1C$、$I_2B$、$I_2C$. 因为 $PE = PF$,所以 $\angle PEF = \angle PFE$,而

$$\angle PEF = \angle I_2I_1B - \angle EBI_1 = \angle I_2I_1B - \angle I_1BC$$

$$\angle PFE = \angle I_1I_2C - \angle FCI_2 = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB$$

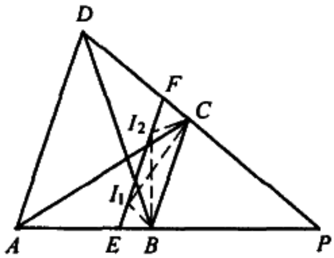


图 26.6

则 $\angle I_2I_1B - \angle I_1BC = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB$

即 $\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = \angle I_1I_2C + \angle I_1BC$

又 $$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB + \angle I_1I_2C + \angle I_1BC = 2\pi$$

则 $$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = \pi$$

所以,$I_1$、$I_2$、$C$、$B$ 四点共圆.从而

$$\angle BI_1C = \angle BI_2C$$

故 $$\angle I_1BC + \angle I_1CB = \angle I_2BC + \angle I_2CB$$

$$\angle ABC + \angle ACB = \angle DBC + \angle DCB$$

所以 $$\angle BAC = \angle BDC$$

因此,$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆.

**西部赛试题 2** 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边长不全相等,周长为 $l$,$P$ 是其内部一动点,点 $P$ 在边 $BC$、$CA$、$AB$ 上的射影分别为 $D$、$E$、$F$. 求证:$2(AF + BD + CE) = l$ 的充分必要条件是点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 的内心与外心的连线上.

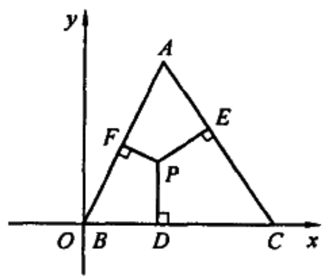


图 26.7

**证明** 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,不妨设 $b \neq c$.如图 26.7 所示,建立直角坐标系,设 $A(m,n)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$、$P(x,y)$.由

$$AF^2 - BF^2 = AP^2 - BP^2$$

得 $$AF^2 - (c - AF)^2 = AP^2 - BP^2$$

故 $$2c \cdot AF - c^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 - x^2 - y^2$$

解得 $$AF = \frac{m^2 + n^2 - 2mx - 2ny}{2c} + \frac{c}{2}$$

又 $$CE^2 - AE^2 = PC^2 - AP^2$$

得 $$CE^2 - (b - CE)^2 = PC^2 - AP^2$$

则 $$2b \cdot CE - b^2 = (x - a)^2 + y^2 - (x - m)^2 - (y - n)^2$$

解得 $$CE=\frac{2mx+2ny-m^2-n^2-2ax+a^2}{2b}+\frac{b}{2}$$

故 $$AF+BD+CE=\frac{l}{2}\Leftrightarrow\frac{m^2+n^2-2mx-2ny}{2c}+\frac{c}{2}+x+\frac{2mx+2ny-m^2-n^2-2ax+a^2}{2b}+\frac{b}{2}=\frac{l}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{m}{b}-\frac{a}{b}-\frac{m}{c}+1\right)x+\left(\frac{n}{b}-\frac{n}{c}\right)y+\frac{a^2}{2b}+\frac{b+c}{2}+\frac{m^2+n^2}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)-\frac{l}{2}=0$$

因为 $b\neq c,n\neq 0$,所以,满足条件的点 $P$ 在一条定直线上.由于内心、外心均满足 $2(AF+BD+CE)=l$,从而,命题得证.

**试题 A** 如图 26.8,在锐角 $\triangle ABC$ 中,$AB$ 上的高 $CE$ 与 $AC$ 上的高 $BD$ 相交于点 $H$,以 $DE$ 为直径的圆分别交 $AB$、$AC$ 于 $F$、$G$ 两点,$FG$ 与 $AH$ 相交于点 $K$.已知 $BC=25,BD=20,BE=7$.求 $AK$ 的长.



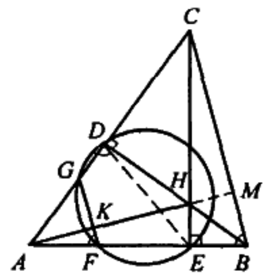


图 26.8

**解法 1** 由题设知 $\angle ADB=\angle AEC=90°$.所以 $\triangle ADB\backsim\triangle AEC$.故

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC} \quad ①$$

由已知得 $CD=15,CE=24$.由①有

$$\begin{cases}\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{AE+7}{AD+15}=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AD=15\\ AE=18\end{cases}$$

于是,点 $D$ 是 $Rt\triangle AEC$ 的斜边 $AC$ 的中点,联结 $DE$,故

$$DE=\frac{1}{2}AC=15$$

因为点 $F$ 在以 $DE$ 为直径的圆上,则

$$\angle DFE=90°,AF=\frac{1}{2}AE=9$$

因为 $G$、$F$、$E$、$D$,$D$、$E$、$B$、$C$ 分别四点共圆,则

$$\angle AFG=\angle ADE=\angle ABC,GF\ /\!/\ CB$$

延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $M$,则

$$\frac{AK}{AM}=\frac{AF}{AB} \quad ②$$

因为 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，则 $AM \perp BC$. 又因为 $BA = BC$，所以，$AM = CE = 24$. 由 ② 有

$$AK = \frac{AF \cdot AM}{AB} = \frac{9 \times 24}{25} = \frac{216}{25}$$

**解法 2**　(由广东珠海一中赖常茂给出) 如图 26.8，设 $\triangle ABC$ 各内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，延长 $AH$ 与 $BC$ 交于 $M$. 因为

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{7}{25}$$

所以

$$\sin A = \frac{4}{5}$$

由正弦定理，易得

$$AB = \frac{\sin C}{\sin A} \cdot BC = 25$$

因为 $B$、$C$、$D$、$E$ 四点共圆，所以

$$EF = DE\cos C = \frac{CD\cos A}{\cos C} \cdot \cos C = 9$$



因为 $GF \parallel BC$，所以

$$\frac{AK}{AB - BF} = \frac{AM}{AB} = \sin B = \frac{24}{25}$$

故

$$AK = \frac{24}{25}(25 - 7 - 9) = \frac{216}{25}$$

**解法 3**　(由四川方延刚给出) 如图 26.8，设 $\triangle ABC$ 各内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $M$. 易知

$$CD = 15, CE = 24$$

$$\cos C = \frac{3}{5}, \sin C = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{7}{25}, \sin B = \frac{24}{25}$$

$$\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C = -\frac{3}{5}$$

故

$$\cos A = \frac{3}{5} = \cos C$$

从而

$$\angle A = \angle C, AB = BC$$

易知

$$AM \perp BC$$

故

$$AM = CE = 24$$

易知 $C$、$D$、$E$、$B$ 四点共圆且 $BC$ 为该圆直径，故

$$DE = BC\sin\angle DCE = BC\cos A$$

易知 $D$ 为 $AC$ 中点，$F$ 为 $AE$ 的中点.

由 $D$、$E$、$F$、$G$ 四点共圆且 $DE$ 为该圆直径知

$$FG = DE\sin\angle ADF = DE\cos A = BC\cos^2 A$$

$$\angle AGF = \angle AED = \angle ACB$$

所以 $$GF \parallel BC$$

故 $$\frac{AK}{AM} = \frac{FG}{BC} = \cos^2 A = \frac{9}{25}$$

因此 $$AK = \frac{9}{25}AM = \frac{216}{25}$$

**解法 4** （由浙江嵊州二中吕初明给出）如图 26.9，设 $AD = x$，$AE = y$. 在 Rt△$ACE$ 中，有

$$(x+15)^2 - y^2 = 24^2 \quad ①$$

在 Rt△$ABD$ 中，有



$$(y+7)^2 - x^2 = 20^2 \quad ②$$

由 ①、② 得

$$x = 15, y = 18$$

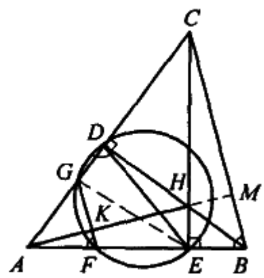


图 26.9

联结 $EG$. 因为 $DE$ 是圆的直径，所以

$$\angle DGE = 90^\circ, EG \parallel BD$$

故 $$\frac{AG}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AG = AE \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{54}{5}$$

因为 $B$、$C$、$D$、$E$ 四点共圆，所以 $\angle AED = \angle ACB$. 因为 $D$、$E$、$F$、$G$ 四点共圆，所以 $\angle AGF = \angle AED$. 故 $\angle AGF = \angle ACB$，从而 $FG \parallel BC$.

延长 $AH$ 交 $BC$ 于点 $M$，则

$$\frac{AK}{AM} = \frac{AG}{AC} \quad ③$$

由面积法，得 $$BC \cdot AM = AB \cdot CE$$

所以 $$AM = 24$$

由式 ③ 得 $$AK = \frac{216}{25}$$

**解法 5** （由武昌实验中学朱达坤给出）如图 26.10，依题意，$CE \perp AB$，$BD \perp AC$，则

$$\angle CEB = \angle BDC = 90^\circ$$

即 $B$、$E$、$D$、$C$ 四点共圆.

由托勒密定理有

$$DE \cdot BC + BE \cdot DC = BD \cdot CE \qquad ①$$

又 $BC = 25, BD = 20, BE = 7$,则

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

$$CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 24$$

代入式①有 $DE = 15$

所以 $DE = DC$

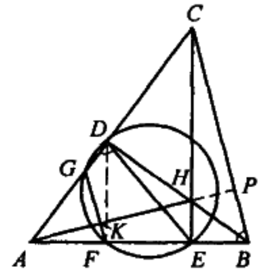



图 26.10

又 $\angle CEA = 90°$,从而 $D$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 的中点,$AC = 30$,于是

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = 18$$

联结 $DF$,由 $DE$ 为直径,知

$$\angle DFE = 90°, DF \perp AE$$

又 $AD = DE$,则 $F$ 为 $AE$ 的中点,即 $AF = 9$.即 $D$、$E$、$F$、$G$ 四点共圆,从而

$$AG \cdot AD = AF \cdot AE, AG = \frac{54}{5}$$

延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $P$,则 $AP \perp BC$.由 $\angle AGF = \angle AED = \angle ACB$ 得 $GF /\!/ BC$,则 $AK \perp GF$.因

$$\cos\angle GAK = \cos\angle DBC = \frac{BD}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

则

$$AK = AG\cos\angle GAK = \frac{54}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{216}{25}$$



**解法6**[①] 如图26.11,由题设条件 $CE \perp AB$,$BD \perp AC$,$BC = 25$,$BD = 20$,$BE = 7$.应用勾股定理,得 $CD = 15$,$CE = 24$.

设 $AC = b$,$AB = c$,由面积关系 $\frac{1}{2}AB \cdot CE = \frac{1}{2}BD \cdot AC$,知 $6c = 5b$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,由 $c^2 = (b - 15)^2 + 20^2$,可求得 $b = \frac{750}{11}$ 或 $b = 30$.

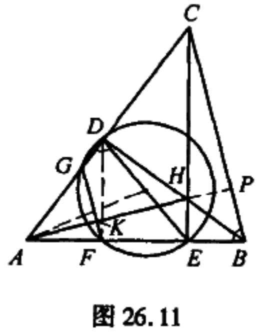



图 26.11

① 沈文选.2004年高中联赛平面几何题的新解法[J].数学竞赛之窗,2005(12):20-21.

当 $b=\frac{750}{11}$ 时,得 $c=\frac{625}{11}$,且

$$b^2-c^2-BC^2=\frac{750^2-625^2-11^2\cdot 25^2}{11^2}>0$$

知 $\angle B>90°$ 与已知矛盾.从而知 $b=30$,亦知 $AB=c=25$.

于是 $AD=15$,即 $D$ 为 $AC$ 中点.即知 $DE=AD$.

联结 $DF$,由题设知 $DF\perp AE$,则 $DF /\!/ CE$,即知 $F$ 为 $AE$ 的中点,且 $AF=\frac{1}{2}(AB-BE)=9$.

由 $C$、$D$、$E$、$B$ 共圆,$D$、$E$、$F$、$G$ 共圆,知 $\angle AFG=\angle GDE=\angle ABC$,从而 $FG /\!/ BC$.延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $P$,知 $AP\perp BC$,于是 $AK\perp FG$,且由对称性知 $AP=CE=24$.

由 $\triangle AFK\backsim\triangle ABP$,有

$$\frac{AF}{AB}=\frac{AK}{AP}$$



故

$$AK=\frac{AF\cdot AP}{AB}=\frac{216}{25}$$

**解法 7** 设锐角 $\triangle ABC$ 的三内角用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 表示,则

$$\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{4}{5},\cos B=\frac{BE}{BC}=\frac{7}{25}$$

从而

$$\cos C=\frac{3}{5},\sin B=\frac{24}{25}$$

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{4}{5}$$

在 $\triangle ABC$ 中用正弦定理,有

$$AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=25$$

亦即有 $AE=18$.延长 $AH$ 交 $BC$ 于 $P$,则

$$AP=AB\sin B=24$$

联结 $DF$,由题设知 $DF\perp AE$,由射影定理,有

$$BD^2=BF\cdot AB$$

即

$$BF=\frac{BD^2}{AB}=16$$

从而

$$AF=9$$

下同解法 6.

**解法8**　由题设条件：$CE\perp AB$，$BD\perp AC$，$BC=25$，$BD=20$，$BE=7$，应用勾股定理，得 $CD=15$，$CE=24$.由 $C$、$D$、$E$、$B$ 共圆，应用托勒密定理，有

$$BD\cdot CE=BE\cdot CD+BC\cdot DE$$

由此求得

$$DE=15$$

联结 $DF$，知 $DF\perp AB$，于是

$$\angle FDE=\angle DEC=\angle DBC$$

知

$$\triangle DFE\backsim\triangle BDC$$

有

$$\frac{BC}{DE}=\frac{DC}{EF}=\frac{BD}{DF}$$

求得

$$EF=9,DF=12$$

同理

$$DG=\frac{21}{5},EG=\frac{72}{5}$$

又 $D$、$E$、$F$、$G$ 共圆，应用托勒密定理，有

$$DE\cdot FG+DG\cdot EF=FG\cdot DF$$

求得

$$FG=9$$

由 $\angle AGF=\angle FED=\angle DCB$ 知

$$FG/\!/BC$$

于是 $AK\perp FG$，且

$$\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}=\frac{AF}{AF+FE+EB}$$

求得 $AF=9$.同理 $AG=\frac{54}{5}$.

同解法7，可求得 $\sin\angle CAB=\frac{4}{5}$.

注意到面积关系

$$\frac{1}{2}AK\cdot FG=\frac{1}{2}AG\cdot AF\sin\angle CAB$$

有

$$AK=\frac{AG\cdot AF\sin\angle CAB}{FG}=\frac{\frac{54}{5}\cdot 9\cdot\frac{4}{5}}{9}=\frac{216}{25}$$

**解法9**　如图26.12，由题设条件，可求得

$$\cos\angle CBA=\cos\angle CBE=\frac{7}{25},\cos\angle CBD=\frac{4}{5}$$

$$\sin\angle CBE=\frac{24}{25},\sin\angle CBD=\frac{3}{5}$$

故 $\cos\angle DBA=\cos(\angle CBA-\angle CBD)=\frac{4}{5}$

从而 $$AB=\frac{BD}{\cos\angle DBA}=25$$

亦即 $$AE=18$$

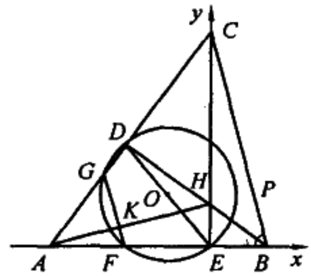


图 26.12

以 $E$ 为原点,$AB$ 所在直线为 $x$ 轴,建立平面直角坐标系,如图 26.12 所示.由于 $CE=24,AE=18$,得 $AC=30$.又

$$CD=BC\sin\angle CBD=15=\frac{1}{2}AC$$

则 $D$ 为 $AC$ 的中点,且点 $D$ 的坐标为$(-9,12)$.

又设 $O$ 为 $DE$ 的中点,则点 $O$ 的坐标为$(-\frac{9}{2},6)$.于是圆 $O$ 的半径为

$$R=\sqrt{(\frac{9}{2})^2+6^2},AO=\sqrt{[-18-(\frac{9}{2})]^2+6^2}$$



又点 $A$ 对圆 $O$ 的幂

$$p(A)=AE\cdot AF=AG\cdot AD=AO^2-R^2=(\frac{27}{2})^2-(\frac{9}{2})^2=162$$

从而 $$AF=\frac{p(A)}{AE}=9,AG=\frac{p(A)}{AE}=9,AG=\frac{p(A)}{AD}=\frac{54}{5}$$

对 $\triangle AFG$ 应用张角公式,有

$$\frac{\sin\angle GAF}{AK}=\frac{\sin\angle FAK}{AG}+\frac{\sin\angle GAK}{AF}$$

注意到 $$\angle CAH=\angle CBD,\angle HAE=\angle ECB$$

$$\sin\angle ECB=\frac{7}{25},\sin\angle DBC=\frac{3}{5},\sin\angle CAE=\frac{4}{5}$$

即有 $$\frac{\sin\angle CAE}{AK}=\frac{\sin\angle ECB}{AG}+\frac{\sin\angle DBC}{AF}=\frac{5}{54}$$

故 $$AK=\frac{\sin\angle CAE}{\frac{5}{54}}=\frac{216}{25}$$

**解法 10** (由山东宁阳一中刘才华给出)如图 26.12,由题意得

$$CE=24,BD=20$$

以 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴、$EC$ 所在直线为 $y$ 轴建立直角坐标系,则 $B(7,0)$,

$C(0,24)$.

设 $A(a,0)$,则直线 $AC$ 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{24}=1$$

即

$$24x+ay-24a=0$$

由点 $B$ 到直线 $AC$ 的距离为 20,得

$$\frac{|24\times 7-24a|}{\sqrt{24^2+a^2}}=20$$

解得 $a=-18$,所以,$|BC|=25=|AB|$,$D$ 为 $AC$ 中点,且 $D(-9,12)$.

以 $DE$ 为直径的圆的方程为

$$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+(y-6)^2=\frac{225}{4}$$

令 $y=0$ 得 $x^2+9x=0$.则有 $F(-9,0)$.

直线 $AC$ 方程为 $4x-3y+72=0$,$G$ 在直线 $AC$ 上,故可设 $G(\frac{3y-72}{4},y)$,则



$$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{3y-72}{4},y\right),\overrightarrow{AC}=(18,24)$$

由 $EG\perp AC$,得

$$\frac{3y-72}{4}\times 18+24y=0$$

所以

$$y=\frac{216}{25},G\left(-\frac{288}{25},\frac{216}{25}\right)$$

$$k_{FG}=-\frac{24}{7}=k_{BC}$$

从而,$FG\ /\!/\ BC$,$\triangle AFG$ 为等腰三角形,且 $AK\perp FG$,因此

$$|AK|=y_G=\frac{216}{25}$$

**解法 11**　(由武昌实验中学朱达坤给出)以 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴,$E$ 为原点建立如图 26.12 所示的直角坐标系,那么点 $B$ 的坐标为$(7,0)$,设点 $A$、$C$ 的坐标为$(-a,0)$、$(0,b)(a>0,b>0)$,则

$$b=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$$

则

$$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+576}$$

由
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot CE$$
得
$$20\sqrt{a^2+576}=24(a+7)$$
则
$$a=18(负值舍去)$$
于是 $A(-18,0)$, $C(0,24)$. 则直线 $AC$ 的方程为
$$y=\frac{4}{3}x+24$$
即
$$4x-3y+72=0$$

直线 $BD$ 的方程为
$$y=-\frac{3}{4}(x-7)$$
即
$$3x+4y-21=0$$
联立两方程解得点 $D$ 的坐标为 $(-9,12)$.

以 $DE$ 为直径的圆的方程为
$$(x+\frac{9}{2})^2+(y-6)^2=\frac{225}{4}$$



则由
$$\begin{cases}(x+\frac{9}{2})^2+(y-6)^2=\frac{225}{4}\\4x-3y+72=0\end{cases}$$
解得点 $G$ 的坐标为 $(-\frac{288}{25},\frac{216}{25})$

令 $y=0$ 得 $F(-9,0)$, 由解法 1 可得 $GF\parallel BC$, 则直线 $GF$ 的方程为
$$y=-\frac{24}{7}(x+9)$$
即
$$24x+7y+216=0$$
$$|AK|=\frac{|24\times(-18)+7\times0+216|}{\sqrt{24^2+7^2}}=\frac{216}{25}$$

**试题 B1** 一圆与 $\triangle ABC$ 的三边 $BC$、$CA$、$AB$ 的交点依次为 $D_1$、$D_2$、$E_1$、$E_2$、$F_1$、$F_2$. 线段 $D_1E_1$ 与 $D_2F_2$ 交于点 $L$, 线段 $E_1F_1$ 与 $E_2D_2$ 交于点 $M$, 线段 $F_1D_1$ 与 $F_2E_2$ 交于点 $N$. 证明: $AL$、$BM$、$CN$ 三线共点.

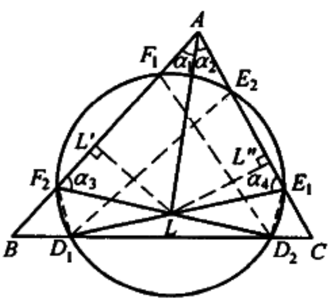


图 26.13

**证法 1** 如图 26.13, 自点 $L$ 作 $AB$ 和 $AC$ 的垂线, 垂足分别为 $L'$ 和 $L''$. 记 $\angle LAB=\alpha_1$, $\angle LAC=\alpha_2$, $\angle LF_2A=\alpha_3$, $\angle LE_1A=\alpha_4$, 则

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{LL'}{LL''}=\frac{LF_2\sin\alpha_3}{LE_1\sin\alpha_4} \quad ①$$

联结 $D_1F_2$、$D_2E_1$. 由 $\triangle LD_1F_2 \backsim \triangle LD_2E_1$ 得

$$\frac{LF_2}{LE_1}=\frac{D_1F_2}{D_2E_1} \quad ②$$

联结 $D_2F_1$、$D_1E_2$. 由正弦定理得

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4}=\frac{D_2F_1}{D_1E_2} \quad ③$$

将式 ②、③ 代入 ①,得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{D_1F_2}{D_2E_1}\cdot\frac{D_2F_1}{D_1E_2} \quad ④$$

记 $\angle MBC=\beta_1$, $\angle MBA=\beta_2$, $\angle NCA=\gamma_1$, $\angle NCB=\gamma_2$. 同理可得

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{E_1D_2}{E_2F_1}\cdot\frac{E_2D_1}{E_1F_2} \quad ⑤$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{F_1E_2}{F_2D_1}\cdot\frac{F_2E_1}{F_1D_2} \quad ⑥$$



④ × ⑤ × ⑥,得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

由塞瓦定理的逆定理,即知 $AL$、$BM$、$CN$ 三线共点.

**证法 2** （由湖南师大张垚教授给出）联结 $E_1F_2$,在 $\triangle AF_2E_1$ 中,因 $AL$、$F_2L$、$E_1L$ 三线共点,由角元形式的塞瓦定理,有

$$\frac{\sin\angle E_1AL}{\sin\angle LAF_2}\cdot\frac{\sin\angle AF_2L}{\sin\angle LF_2E_1}\cdot\frac{\sin\angle F_2E_1L}{\sin\angle LE_1A}=1 \quad ①$$

而由正弦定理有

$$\frac{\sin\angle AF_2L}{\sin\angle LF_2E_1}=\frac{D_2F_1}{D_2E_1},\frac{\sin\angle F_2E_1L}{\sin\angle LE_1A}=\frac{D_1F_2}{D_1E_2} \quad ②$$

② 代入 ① 得

$$\frac{\sin\angle E_1AL}{\sin\angle LAF_2}=\frac{D_1E_2}{D_1F_2}\cdot\frac{D_2E_1}{D_2F_1}$$

即

$$\frac{\sin\angle CAL}{\sin\angle LAB}=\frac{D_1E_2}{D_1F_2}\cdot\frac{D_2E_1}{D_2F_1} \quad ③$$

同理可得

$$\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle MBC}=\frac{E_1F_2}{E_1D_2}\cdot\frac{E_2F_1}{E_2D_1} \quad ④$$

$$\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle NCA}=\frac{F_1D_2}{F_1E_2}\cdot\frac{F_2D_1}{F_2E_1} \quad ⑤$$

③×④×⑤得

$$\frac{\sin\angle CAL}{\sin\angle LAB}\cdot\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle MBC}\cdot\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle NCA}=1$$

由塞瓦定理逆定理得三线 $AL$、$BM$、$CN$ 共点.

**试题B2** 在面积为1的矩形 $ABCD$ 中(包括边界)有五个点,其中任意三点不共线.求以这五个点为顶点的所有三角形中,面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形的个数的最小值.

**解法1** 本题证明需要用到如下的常用结论,我们将其作为一个引理.

**引理** 矩形内的任意一个三角形的面积不大于矩形面积的一半.



在矩形 $ABCD$ 中,如果某三点构成的三角形的面积不大于 $\frac{1}{4}$,就称它们为一个好的三点组,简称为"好组".

记 $AB$、$CD$、$BC$、$AD$ 的中点分别为 $E$、$F$、$H$、$G$,线段 $EF$ 与 $GH$ 的交点记为 $O$.线段 $EF$ 和 $GH$ 将矩形 $ABCD$ 分为四个小矩形.从而,一定存在一个小矩形,不妨设为矩形 $AEOG$,其中(包括边界,下同)至少有所给五个点中的两个点,设点 $M$ 和 $N$ 在小矩形 $AEOG$ 中,如图26.14所示.

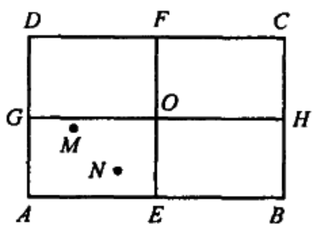



图26.14

(1) 如果矩形 $OHCF$ 中有不多于一个已知点,考察不在矩形 $OHCF$ 中的任意一个不同于 $M$ 和 $N$ 的已知点 $X$.易知,三点组($M$,$N$,$X$)或者在矩形 $ABHG$ 中,或者在矩形 $AEFD$ 中.由引理可知,($M$,$N$,$X$)是好组.由于这样的点 $X$ 至少有两个,所以,至少有两个好组.

(2) 如果矩形 $OHCF$ 中至少有两个已知点,不妨设已知 $P$ 和 $Q$ 都在矩形 $OHCF$ 中,考察剩下的最后一个已知点 $R$.如果 $R$ 在矩形 $OFDG$ 中,则三点组($M$,$N$,$R$)在矩形 $AEFD$ 中,而三点组($P$,$Q$,$R$)在矩形 $GHCD$ 中,从而,它们都是好组.于是,至少有两个好组.同理,如果点 $R$ 在矩形 $EBHO$ 中,亦至少有两个好组.如果点 $R$ 在矩形 $OHCF$ 或矩形 $AEOG$ 中,不妨设点 $R$ 在矩形 $OHCF$ 中.如图26.15所示,我们来考察五个已知点 $M$、$N$、$P$、$Q$、$R$ 的凸包,该凸包一定在凸

六边形 $AEHCFG$ 中.而

$$S_{AEHCFG}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

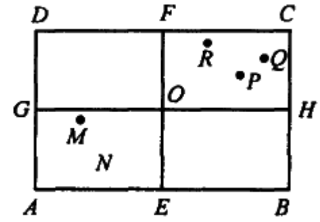



图 26.15

下面再分三种情况讨论.

(i) 若 $M$、$N$、$P$、$Q$、$R$ 的凸包是凸五边形,不妨设其为 $MNPQR$,如图 26.16 所示,此时

$$S_{\triangle MQR}+S_{\triangle MNQ}+S_{\triangle NPQ}\leqslant\frac{3}{4}$$

从而,$(M,Q,R)$、$(M,N,Q)$、$(N,P,Q)$ 中至少有一个为好组,又由于 $(P,Q,R)$ 在矩形 $OHCF$ 中,当然是好组,所以,至少有两个好组.

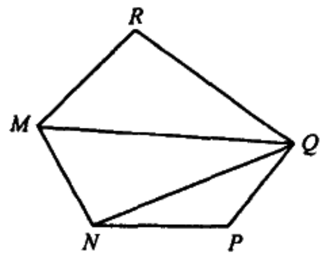



图 26.16

(ii) 若 $M$、$N$、$P$、$Q$、$R$ 的凸包是凸四边形,不妨设其为 $A_1A_2A_3A_4$,而另一个已知点为 $A_5$,如图 26.17 所示,其中 $A_i\in\{M,N,P,Q,R\}(i=1,2,3,4,5)$.联结 $A_5A_i(i=1,2,3,4)$,则

$$S_{\triangle A_1A_2A_5}+S_{\triangle A_2A_3A_5}+S_{\triangle A_3A_4A_5}+S_{\triangle A_4A_1A_5}=S_{A_1A_2A_3A_4}\leqslant\frac{3}{4}$$

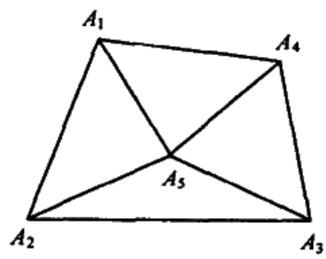



图 26.17

从而,$(A_1,A_2,A_5)$、$(A_2,A_3,A_5)$、$(A_3,A_4,A_5)$、$(A_1,A_4,A_5)$ 中至少有两个好组.

(iii) 若 $M$、$N$、$P$、$Q$、$R$ 的凸包是一个三角形,不妨设其为 $\triangle A_1A_2A_3$,另外两个已知点为 $A_4$、$A_5$,如图 26.18 所示,其中 $A_i\in\{M,N,P,Q,R\}(i=1,2,3,4,5)$.联结 $A_4A_i(i=1,2,3)$,则

$$S_{\triangle A_1A_2A_4}+S_{\triangle A_2A_3A_4}+S_{\triangle A_3A_1A_4}=S_{\triangle A_1A_2A_3}\leqslant\frac{3}{4}$$

从而 $(A_1,A_2,A_4)$、$(A_2,A_3,A_4)$、$(A_1,A_3,A_4)$ 中至少有一个好组.

同理,$A_5$ 也与 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 中的某两个点构成好组.所以,此时也至少有两个好组.

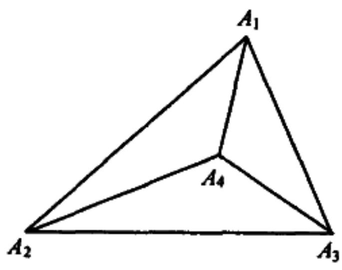



图 26.18

综上所述,不论何种情形,在五个已知点中都至少有两个好组.

下面给出例子,说明好组的个数可以等于 2.

如图 26.19,在矩形 $ABCD$ 的边 $AD$ 上取一点 $M$,在边 $AB$ 上取一点 $N$,使得 $AN:NB=AM:MD=2:3$.则在 $M$、$N$、$B$、$C$、$D$ 这五个点中恰好有两个好组.

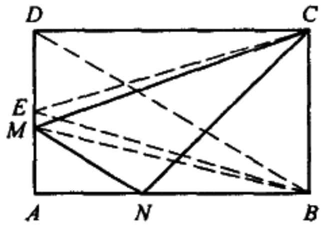


图 26.19

事实上,$(B,C,D)$ 显然不是好组.而如果三点组中恰含 $M$、$N$ 两点之一,不妨设含点 $M$,设 $AD$ 的中点为 $E$,则

$$S_{\triangle MBD}>S_{\triangle EBD}=\frac{1}{4}$$

所以,$(M,B,D)$ 不是好组,且

$$S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2},S_{\triangle MCD}>S_{\triangle ECD}=\frac{1}{4}$$

从而,$(M,B,C)$、$(M,C,D)$ 都不是好组.

如果三点组中同时含有 $M$、$N$ 两点,那么

$$S_{\triangle MNC}=1-S_{\triangle NBC}-S_{\triangle MCD}-S_{\triangle AMN}=$$
$$1-\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}-\frac{3}{5}S_{\triangle ACD}-\frac{4}{25}S_{\triangle ABD}=$$
$$1-\frac{3}{10}-\frac{3}{10}-\frac{2}{25}=\frac{8}{25}>\frac{1}{4}$$



所以,$(M,N,C)$ 不是好组.

而 $S_{\triangle MNB}=S_{\triangle MND}=\frac{3}{25}<\frac{1}{4}$,从而,其中恰好有两个好组 $(M,N,B)$ 和 $(M,N,D)$.

因此,面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形的个数的最小值为 2.

**解法 2** (由湖南师大张垚教授给出)如图 26.20,在矩形 $ABCD$ 中取 $B$、$C$、$D$、$M$、$N$ 五个点,其中 $M$、$N$ 分别在线段 $AD$、$AB$ 内且满足

$$\frac{DM}{DA}=\frac{2}{3},\frac{BN}{BA}=\frac{2}{3}$$

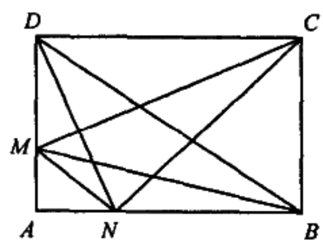


图 26.20

以这五点为顶点的 10 个三角形中

$$S_{\triangle DBC}=S_{\triangle MBC}=S_{\triangle NDC}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle BDM}=S_{\triangle CDM}=S_{\triangle DBN}=S_{\triangle CBN}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle BMN}=S_{\triangle ABM}-S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle DMN}=S_{\triangle ADM}-S_{\triangle AMN}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle MNC}=1-S_{\triangle AMN}-S_{\triangle BCN}-S_{\triangle CDM}=$$

$$1-\frac{1}{18}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}>\frac{1}{4}$$

其中恰有两个三角形的面积不大于$\frac{1}{4}$.

另一方面,在 $ABCD$ 中任取五个点 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$(其中任意三点不共线),我们证明以 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 为顶点的十个三角形中至少有两个的面积不大于$\frac{1}{4}$,为此,我们要用到下列熟知的几何事实.

**引理**　在面积为 $a$ 的矩形中,任何三角形的面积都不大于$\frac{a}{2}$(证明略).



下面按 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 的凸色分类讨论如下.

(i)五点的凸色为$\triangle P_1P_2P_3$,另两点 $P_4$、$P_5$ 在$\triangle P_1P_2P_3$ 内,如图26.21所示,如果$\triangle P_1P_2P_3$ 被分成的五个三角形中至少有四个的面积大于$\frac{1}{4}$,那么 $S_{\triangle P_1P_2P_3}>4\times\frac{1}{4}=1$,这与引理矛盾,故$\triangle P_1P_2P_3$ 被分成的五个三角形中至少有两个的面积不大于$\frac{1}{4}$,结论成立.

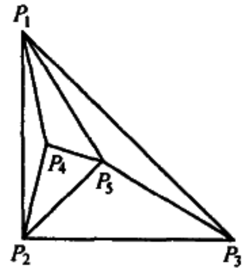


图26.21

(ii)五点的凸色为凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$,另一点 $P_5$ 在凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 内,因无三点共线,不妨设 $P_5$ 在$\triangle P_1P_2P_3$ 内,如图26.22所示,于是,$S_{\triangle P_1P_2P_5}$、$S_{\triangle P_2P_3P_5}$、$S_{\triangle P_3P_1P_5}$ 中至少有两个不大于$\frac{1}{4}$(否 $S_{\triangle P_1P_2P_3}>2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,与引理矛盾),从而结论成立.

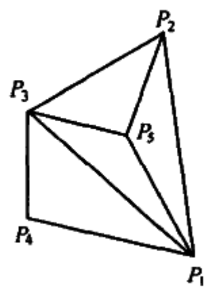


图26.22

(iii)五点的凸色是凸五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$.不妨设以 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 为顶点的10个三角形中,以$\triangle P_1P_2P_3$ 为最小.并设

$AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中点分别为 $E$、$F$、$G$、$H$，联结 $EG$ 和 $FH$，$EG$ 和 $FH$ 交于 $O$，如图 26.23 所示，则由抽屉原理知 $EG$ 的一侧(包括 $EG$ 上)至少有 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 中三个点 $P_i$、$P_j$、$P_k$.

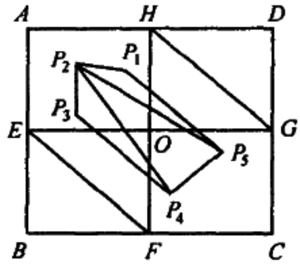


图 26.23

若 $\{i,j,k\}\neq\{1,2,3\}$，则由引理有 $S_{\triangle P_iP_jP_4}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 又 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant S_{\triangle P_iP_jP_k}\leqslant\frac{1}{4}$，结论成立. 故可设 $EG$ 的一侧(包括 $EG$)只有 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 三点，同理可设 $FH$ 的一侧(包括 $HF$)只有 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 三点. 不妨设 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 在矩形 $AEOH$ 中(包括边界)，这时，$P_4$、$P_5$ 只可能在矩形 $CGOF$ 中(否则，同上述推理知结论成立)，于是

$$S_{P_1P_2P_3P_4P_5}\leqslant S_{AEFCGH}=1-S_{\triangle BEF}-S_{\triangle DHG}=$$

$$1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$



于是，$S_{\triangle P_1P_2P_5}$，$S_{\triangle P_5P_2P_4}$，$S_{\triangle P_4P_2P_3}$ 中必有一个不大于 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，从而更有 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}$. 故结论成立.

综上可知，面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形个数的最小值为 2.

**注** 在情形(iii)下，若以 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 为顶点的 10 个三角形中以 $\triangle P_1P_2P_4$ 为最小. 且在 $EG$ 或 $FH$ 一侧(包括 $EG$ 或 $FH$ 上)有 $P_1$、$P_2$、$P_4$ 三个点时，则这一侧必有 $P_3$ 或 $P_5$ 中一个点. 从而结论仍成立.

**试题 C** 设圆 $O$ 的内接凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 $AC$、$BD$ 的交点为 $P$，过 $P$、$B$ 两点的圆 $O_1$ 与过 $P$、$A$ 两点的圆 $O_2$ 相交于两点 $P$、$Q$，且圆 $O_1$、圆 $O_2$ 分别与圆 $O$ 相交于另一点 $E$、$F$. 求证：直线 $PQ$、$CE$、$DF$ 共点或者互相平行.

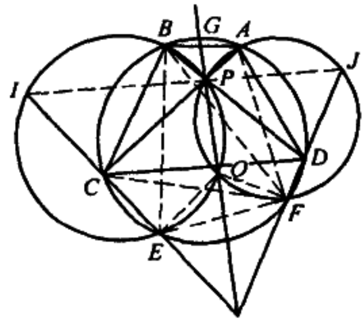


图 26.24

**证明** 如图 26.24，因为 $\angle PJF=\angle PAF=\angle CAF=\angle CDF$，所以 $PJ\parallel CD$，同理 $IP\parallel CD$，故 $I$、$P$、$J$ 三点共线. 又

$$\angle EFD=180^\circ-\angle ECD=180^\circ-\angle EIJ$$

故 $E$、$F$、$J$、$I$ 四点共圆.

这样，由根轴定理，知四边形 $IEFJ$ 的外接圆、圆 $O_1$、圆 $O_2$ 两两的公共弦

$IE$、$PQ$、$JF$ 共点或者互相平行，即直线 $PQ$、$CE$、$DF$ 共点或者互相平行.

## 第 1 节　完全四边形的优美性质(六)①②

有约束条件的完全四边形除具有一般完全四边形的优美性质外，还由于各种不同的约束条件，而具有一些特殊的优美性质. 许多竞赛试题就是以这些优美性质为背景或根据这些特殊的优美性质而编造或等价表达出来的. 本节从五个方向略作介绍.

***1. 具有相等的边的完全四边形***

在含有三角形中线或其重心为顶点的完全四边形中，就有这类特殊的图形. 下面给出另一种情形的这类图形问题.

**性质 30**　如图 26.25，在完全四边形 $ABCDEF$ 中，$AB = AE$.

(1) 若 $BC = EF$，则 $CD = DF$，反之若 $CD = DF$，则 $BC = EF$.

(2) 若 $BC = EF$(或 $CD = DF$)，$M$ 为完全四边形的密格尔点，则 $MD \perp CF$ 或 $\triangle ACF$ 的外心 $O_1$ 在直线 $MD$ 上.

(3) 若 $BC = EF$(或 $CD = DF$)，点 $A$ 在 $CF$ 上的射影为 $H$，$\triangle ABE$ 的外心为 $O_2$，则 $O_2$ 为 $AM$ 的中点，且 $O_2D = O_2H$.

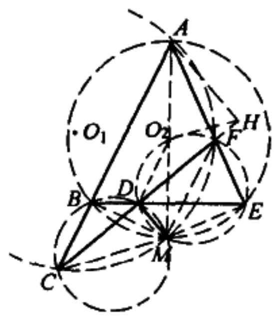


图 26.25

(4) 若 $BC = EF$(或 $CD = DF$)，$M$ 为完全四边形的密格尔点，则 $MB = ME$，且 $MB \perp AC$，$ME \perp AE$.

**证明**　(1) 由第 1 章第 3 节完全四边形的性质 1 中式②(或对 $\triangle ACF$ 及截线 $BDE$ 应用梅涅劳斯定理)有

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DF} \cdot \frac{FE}{EA} = 1$$

因 $AB = AE$，则由上式，知

$$CD = DF \Leftrightarrow BC = EF$$

(2) 由(1) 知，$\triangle BCD$ 和 $\triangle DEF$ 的外接圆是等圆(或由正弦定理计算推证得). 又由 $A$、$B$、$M$、$E$ 四点共圆，有 $\angle CBM = \angle AEM = \angle FEM$，从而 $CM =$

① 沈文选. 有约束条件的完全四边形的优美性质与竞赛命题[J]. 中等数学，2006(12)：16-21.
② 沈文选. 完全四边形的 Miquel 点及其应用[J]. 中学数学，2006(4)：36-39.

$MF$.于是$\triangle DCM \cong \triangle DFM$,有$\angle CDM = \angle FDM$,故$MD \perp CF$.

由于$DM$是$CF$的中垂线,而$O_1$在$CF$的中垂线上,故$\triangle ACF$的外心$O_1$在直线$MD$上.

(3) 由(2)知,$\triangle BCD$和$\triangle DEF$外接圆是等圆,从而$\triangle BCM \cong \triangle EFM$,即有$BM = EM$,即知点$M$在$\angle BAE$的平分线上,亦即$A$、$O_2$、$M$共线.从而知$O_2$为$AM$的中点.

或者直接计算$O_2$为$AM$的中点:在$\triangle ABE$中,由正弦定理,知

$$2 \cdot AO_2 = \frac{AB}{\sin \angle AEB} = \frac{2AB}{2\sin\left(90^\circ - \frac{1}{2}A\right)} = \frac{AC + AE}{2\cos \frac{1}{2}A}$$

设圆$O_1$的半径为$R_1$,注意到$O_1$、$D$、$M$共线则

$$AM = 2R_1\cos \angle O_1MA = 2R_1\sin \angle MCA = 2R_1\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)$$

于是
$$\frac{AM}{2 \cdot AO_2} = \frac{2R_1\cos\left(C + \frac{A}{2}\right)}{\dfrac{AC + AE}{2\cos \frac{A}{2}}} = \frac{2\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)\cos \frac{A}{2}}{\sin \angle AFC + \sin \angle C}$$



而
$$\begin{aligned}2\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)\cos \frac{A}{2} &= 2\left(\sin C\cos \frac{A}{2} + \cos C\sin \frac{A}{2}\right)\cos \frac{A}{2} = \\ &\sin C \cdot 2\cos^2 \frac{A}{2} + \cos C\sin A = \\ &\sin C(1 + \cos A) + \cos C\sin A = \\ &\sin C + \sin C\cos A + \cos C\sin A = \\ &\sin C + \sin \angle AFC\end{aligned}$$

故$AM = 2AO_2$,即$O_2$为$AM$的中点.

注意到$MD \perp CF$,$AH \perp CF$,所以$O_2$在线段$DH$的中垂线上.故$O_2D = O_2H$.

(4) 由(3)知,$BE = EM$.又$O_2$为$AM$的中点,而$O_2$为圆心即$AM$为直径,则$MB \perp AC$,$ME \perp AE$.或注意到$AB = AE$,从而$MB = ME$.

以性质30为背景,则可得到如下竞赛题.

**试题1** 已知锐角$\triangle ABC$,$CD$是过点$C$的高线,$M$是边$AB$的中点,过$M$的直线分别交射线$CA$、$CB$于点$K$、$L$,且$CK = CL$.若$\triangle CKL$的外心为$S$.证明:$SD = SM$.

(2003年第54届波兰数学奥林匹克题)

**证明**　事实上，如图 26.26，此题即为在完全四边形 $CKAMLB$ 中，$\angle C$ 为锐角，顶点在边 $AB$ 上的射影为 $D$，且 $CK = CL, AM = MB$，$S$ 为 $\triangle CKL$ 的外心. 此即为性质 30 中的(3). 过 $M$ 与 $AB$ 垂直的线与 $CS$ 延长线交为 $M$.

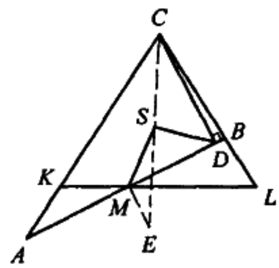



图 26.26

**试题 2**　设 $AM$、$AN$ 分别是 $\triangle ABC$ 的中线和内角平分线，过点 $N$ 作 $AN$ 的垂线分别交 $AM$、$AB$ 于点 $Q$、$P$，过 $P$ 作 $AB$ 的垂线交 $AN$ 于 $O$. 求证：$QO \perp BC$.

（2000 年亚太地区数学奥林匹克题）

**证明**　事实上，如图 26.27，过 $M$ 作 $PQ$ 的平行线交 $AB$ 于 $P'$，交 $AN$ 于 $N'$，过 $P'$ 与 $AB$ 垂直的直线交直线 $AN$ 于 $O'$，则由 Rt$\triangle P'O'N'$ 与 Rt$\triangle PON$ 是以 $A$ 为位似中心的位似形，知 $MO' /\!/ QO$.

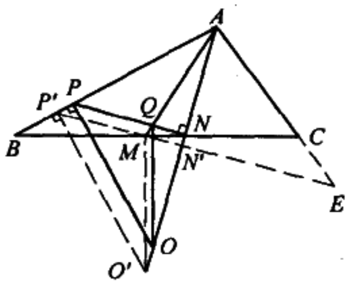



图 26.27

设 $P'N'$ 的延长线与 $AC$ 的延长线交于点 $E$，则在完全四边形 $AP'BMEC$ 的密格尔点，于是由性质 30 中的(2)，知 $O'M \perp BC$. 从而 $OQ \perp BC$.

以具有相等的边(含边上的线段)的完全四边形为背景的竞赛还有如下的 2003 年日本数学奥林匹克题.

**试题 3**　$P$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点，直线 $AC$、$BP$ 相交于 $Q$，直线 $AB$、$CP$ 相交于 $R$. 已知 $AR = RB = CP, CQ = PQ$. 求 $\angle BRC$.

**证明**　事实上，可在 $CR$ 上取点 $S$，使 $RS = CP$，则由 $\angle ACS = \angle QPC = \angle BPR$，可推证得 $SC = RP$.

又由完全四边形的性质 1 中式 ①(即对 $\triangle ABQ$ 及截线 $RPC$ 应用梅涅劳斯定理) 知 $AC = BP$.

又由 $\triangle ACS \cong \triangle BRP$ 得 $AD = BR$. 由此推得 $AS = AR = RS$，即 $\angle ARS = 60°$，从而 $\angle BRC = 120°$.

以性质 30 为背景的试题还可以找出一些，这就留给读者去找.

***2. 两双对边相互垂直的完全四边形***

两双对边相互垂直的完全四边形常存在于含有两条高线的三角形中，这类问题比较多，这里仅举一例.

**性质 31**　如图 26.28，完全四边形 $ABCDEF$ 中，$AC \perp BE, AE \perp CF$.

(1) 若顶点 $C$、$E$ 在对角线 $BF$ 所在直线上的射影分别为 $G$、$H$,则 $GB = FH$.

(2) 若对角线 $AD$ 的延长线交对角线 $CE$ 于 $P$,$\triangle BPF$ 的外接圆交 $AD$ 于 $A_1$,交 $CD$ 于 $C_1$,交 $DE$ 于 $E_1$,则 $S_{\triangle ACE} = 2S_{A_1BC_1PE_1F}$,且 $S_{\triangle ACE} \geqslant 4S_{\triangle BPF}$.

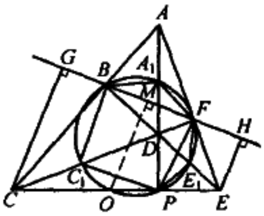



图 26.28

**证明** (1) 由题设知 $C$、$E$、$F$、$B$ 四点共圆,且 $CE$ 的中点为其圆心,过 $O$ 作 $OM \perp BF$ 于 $M$,则由弦心距性质知 $BM = MF$.又 $CG \parallel OM \parallel EH$,$CO = OE$,从而 $GM = MH$.故

$$GB = GM - BM = MH - MF = FH$$

(2) 在 $\triangle ACE$ 中,由题设知 $\triangle BPF$ 的外接圆为 $\triangle ACE$ 的九点圆,从而知 $A_1$、$C_1$、$E_1$ 分别为 $AD$、$CD$、$ED$ 的中点.于是

$$S_{\triangle BCC_1} + S_{\triangle PCC_1} = \frac{1}{2}S_{BCPD}$$



$$S_{\triangle PEE_1} + S_{\triangle FEE_1} = \frac{1}{2}S_{DPEF}$$

$$S_{\triangle BAA_1} + S_{\triangle FAA_1} = \frac{1}{2}S_{ABDF}$$

从而

$$S_{\triangle ACE} = 2S_{A_1BC_1PE_1F}$$

由完全四边形的性质 26(第 23 章第 2 节中例 6),即知 $S_{\triangle ACE} \geqslant 4S_{\triangle BPF}$.

以性质 31 为背景,则可得到如下竞赛题.

**试题 4** 锐角 $\triangle ABC$ 中,$BD$ 和 $CE$ 是其相应边上的高.分别过顶点 $B$ 和 $C$ 引直线 $ED$ 的垂线 $BF$ 和 $CG$,垂足为 $F$、$G$.求证:$EF = DG$.

(1998 年第 22 届独联体奥林匹克题)

**试题 5** 锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线与三角形外接圆交于另一点 $A_1$.点 $B_1$、$C_1$ 与此类似.直线 $AA_1$ 与 $\angle B$、$\angle C$ 两角的外角平分线相交于点 $A_0$,点 $B_0$、$C_0$ 与此类似,求证:

(1)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的两倍.

(2)$\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是 $\triangle ABC$ 面积的四倍.

(1989 年第 30 届 IMO 试题)

**试题 6** 已知圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 交于 $A$、$B$ 两点,过点 $A$ 作 $O_1O_2$ 的平行线,分别与圆 $O_1$、圆 $O_2$ 交于 $C$、$D$ 两点,以 $CD$ 为直径的圆 $O_3$ 分别与圆 $O_1$、圆 $O_2$ 交于 $P$、$Q$ 两点.证明:$CP$、$DQ$、$AB$ 三线共点.

（2004年第54届白俄罗斯数学奥林匹克题）

事实上，由 $CD \parallel O_1O_2$，且 $AB \perp O_1O_2$ 知 $CD \perp AB$. 又可推得 $CP$、$DQ$、$AB$ 是 $\triangle BCD$ 的三条高线，故共点.

**3. 相交两对角线为圆中相交弦的完全四边形**

这类完全四边形就是图 26.29 中的凸四边形内接于圆.

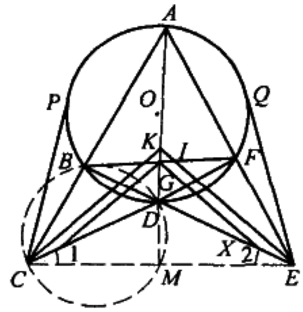



图 26.29

**性质 32** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，顶点 $A$、$B$、$D$、$F$ 四点共圆 $O$，其对角线 $AD$ 与 $BF$ 交于点 $G$.

(1) 若顶点角 $\angle C$、$\angle E$ 的平分线相交于点 $K$，则 $CK \perp EK$.

(2) $\angle BGD$ 的角平分线与 $CK$ 平行，$\angle DGF$ 的角平分线与 $EK$ 平行.

(3) 从 $C$、$E$ 分别引圆 $O$ 的切线，若记切点分别为 $P$、$Q$，则 $CE^2 = CP^2 + EQ^2$；此题设条件下的完全四边形 $ABCDEF$ 的密格尔点在对角线 $CE$ 上；若分别以 $C$、$E$ 为圆心，以 $CP$、$EQ$ 为半径作圆弧交于点 $T$，则 $CT \perp ET$.



(4) 若从 $C$(或 $E$) 引圆 $O$ 的两条切线，切点为 $R$、$Q$，则 $E$(或 $C$)、$R$、$G$、$Q$ 四点共圆.

(5) 过 $C$、$E$、$G$ 三点中任意两点的直线，分别是另一点关于圆 $O$ 的极线.

(6) 点 $O$ 是 $\triangle GCE$ 的垂心.

(7) 过对角线 $BF$(或 $BF \not\parallel CE$ 时的 $AD$) 两端点处的圆 $O$ 的切线的交点在对角线 $CE$ 所在直线上；

(8) 设 $O_1$、$O_2$ 分别是 $\triangle ACF$、$\triangle ABE$ 的外心，则 $\triangle OO_1O_2 \backsim \triangle DCE$.

(9) 设点 $M$ 是完全四边形 $ABCDEF$ 的密格尔点，则 $OM \perp CE$，且 $O$、$G$、$M$ 共线，$OM$ 平分 $\angle AMD$，$OM$ 平分 $\angle BMF$.

(10) 过点 $E$(或 $C$) 的圆的割线交圆 $O$ 于 $R$、$P$，直线 $PC$(或 $PE$) 交圆 $O$ 于点 $S$，则 $R$、$G$、$S$ 三点共线.

(11) 设对角线 $AD$ 的延长线交对角线 $CE$ 于 $W$，则 $WC = WE$ 的充要条件是 $WA \cdot WD = WC^2$.

(12) 设对角线 $CE$ 的中点为 $Z$，联结 $AZ$ 交圆 $O$ 于 $N$，则 $C$、$D$、$N$、$E$ 四点共圆.

**证明** (1) 如图 26.29，联结 $CE$，令 $\angle DCE = \angle 1$，$\angle DEC = \angle 2$，则

$$(\angle BCD + \angle 1 + \angle 2) + (\angle DEF + \angle 2 + \angle 1) = \angle ABD + \angle AFD = 180^\circ$$

即知 $$\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle DEF)+\angle 1+\angle 2=90^\circ$$

从而 $$\angle CKE=180^\circ-\left[\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle DEF)+\angle 1+\angle 2\right]=90^\circ$$

故 $$CK\perp EK$$

(2) 设 $\angle DGF$ 的平分线交 $DE$ 于 $X$，$KE$ 交 $GF$ 于 $I$，则

$$\angle FGX=\frac{1}{2}\angle DGF=\frac{1}{2}(\angle GFA+\angle GAF)$$

$$\angle FIE=\angle GFA-\frac{1}{2}\angle AED=\angle GFA-\frac{1}{2}(\angle ADB-\angle GAF)=$$
$$\frac{1}{2}(\angle GFA+\angle GAF)$$

故 $$GX\parallel KE$$

同理，$\angle BGD$ 的平分线与 $CK$ 平行.

(3) 设过点 $B$、$C$、$D$ 的圆交 $CE$ 于点 $M$，联结 $DM$，则 $\angle AFD=\angle CBD=\angle DME$，从而 $D$、$M$、$E$、$F$ 四点共圆. 于是



$$CM\cdot CE=CD\cdot CF,EM\cdot EC=ED\cdot EB$$

此两式相加，得 $$CE^2=CD\cdot CF+ED\cdot EB$$

又 $CP$、$EQ$ 分别是圆 $O$ 的切线，有

$$CD\cdot CF=CP^2,ED\cdot EB=EQ^2$$

故 $$CE^2=CP^2+EQ^2$$

显然，$M$ 是圆 $BCD$ 与圆 $DEF$ 的另一个交点，此即为密格尔点，即题设条件下的完全四边形的密格尔点在 $CE$ 上.

由于 $CT=CP$，$ET=EQ$，故 $CT^2+ET^2=CE^2$，即 $CT\perp ET$.

(4) 如图 26.30，联结 $CQ$ 交圆 $O$ 于 $R'$，过 $E$ 作 $EH\perp CQ$ 于 $H$，过点 $C$ 作圆的切线 $CP$，切点为 $P$，则

$$CE^2-EQ^2=CP^2=CR'CQ=(CH-HR')CQ$$

又 $$CE^2-EQ^2=(CH^2+HE^2)-(HE^2+HQ^2)=$$
$$CH^2-HQ^2=(CH-HQ)(CH+QH)=$$
$$(CH-HQ)CQ$$

从而 $HR'=HQ$，由此即可证

$$\mathrm{Rt}\triangle EHR'\cong\mathrm{Rt}\triangle EHQ$$

于是 $EQ=ER'$，而 $EQ=ER$，则 $ER'=ER$.

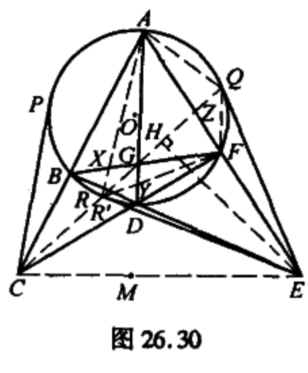


图 26.30

又 $R'$、$R$ 均为圆 $O$ 上，故 $R'$ 与 $R$ 重合，即 $C$、$R$、$Q$

三点共线.

或者,设 $CE$ 上的点 $M$ 是密格尔点,则

$$EQ^2 = ED \cdot EB = EM \cdot EC$$

从而
$$CE^2 - EQ^2 = CE^2 - EM \cdot EC = CE \cdot CM = CD \cdot CF = (CO - OQ)(CO + OQ) = CO^2 - OQ^2$$

由此,知 $CQ \perp OE$.而 $RQ \perp OE$,故 $C$、$R$、$Q$ 三点共线.

为证 $R$、$G$、$Q$ 共线,联结 $AR$ 交 $BF$ 于点 $X$,联结 $RF$ 交 $AD$ 于点 $Y$,设 $RQ$ 与 $AF$ 交于点 $Z$.联结 $AQ$、$QF$ 于是

$$\frac{AZ}{ZF} = \frac{S_{\triangle QAZ}}{S_{\triangle QZF}} = \frac{QA\sin\angle AQZ}{QF\sin\angle ZQF}$$

同理
$$\frac{FY}{YR} = \frac{DF\sin\angle FDY}{DR\sin\angle YDR}, \frac{RX}{XA} = \frac{BR\sin\angle RBX}{BA\sin\angle XBA}$$

由 $\triangle EAQ \backsim \triangle EQF$,有

$$\frac{QA}{QF} = \frac{EQ}{EF}$$

同理,有
$$\frac{DF}{DR} = \frac{ED}{EB}, \frac{RX}{XA} = \frac{EB}{ER}$$

而
$$\angle AQZ = \angle YDR, \angle ZQF = \angle RBX$$
$$\angle FDY = \angle XBA, EQ = ER$$

于是
$$\frac{AZ}{ZF} \cdot \frac{FY}{YR} \cdot \frac{RX}{XA} = 1$$

对 $\triangle ARF$ 应用塞瓦定理的逆定理,知 $AY$、$FX$、$RZ$ 共点于 $G$.故 $R$、$G$、$Q$ 共线.

综上可知,$C$、$R$、$G$、$Q$ 四点共线.

(5) 由(4) 即证.

(6) 由于 $OE \perp RQ$,即 $OE \perp CG$.同样 $OC \perp EG$.由此即知,$O$ 为 $\triangle GCE$ 的垂心.亦即知 $OG \perp CE$.

(7) 由(5) 知,直线 $CE$ 是点 $G$ 关于圆 $O$ 的极线,从而过点 $G$ 的弦的两端点处的切线的交点在直线 $CE$ 上.

(8) 若点 $O$ 在 $AD$ 上,则 $O_1$、$O_2$ 分别为 $AC$、$AE$ 的中点,此时,显然 $\triangle OO_1O_2 \backsim \triangle DCE$.

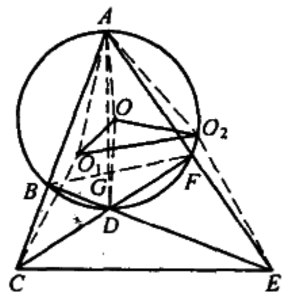


图 26.31

若点 $O$ 不在 $AD$ 上,如图 26.31 所示,则 $O_1$、$O_2$ 不在 $AC$、$AE$ 上.联结 $AO_1$、$CO_1$、$AD$、$AO$、$OD$、$AO_2$、$O_2E$、

BF.由

$$\angle AO_2E = 2(180° - \angle ABE) = 2\angle AFD = \angle AOD$$

及 $$O_2A = O_2E, OA = OD$$

知 $$\triangle AO_2E \backsim \triangle AOD$$

即有 $$\frac{AO_2}{AO} = \frac{AE}{AD}$$

又 $$\angle O_2AE = \angle OAD$$

则 $$\triangle AOO_2 \backsim \triangle ADE$$

同理 $$\triangle AO_1C \backsim \triangle AOD, \triangle AOO_1 \backsim \triangle ACD$$

于是 $$\frac{O_1O}{CD} = \frac{AO}{AD} = \frac{OO_2}{DE}$$

由 $\triangle AO_1C \backsim \triangle AO_2E$,知

$$\frac{O_1O_2}{CE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AO}{AD}$$

从而 $$\triangle OO_1O_2 \backsim \triangle DCE$$



(9) 如图26.32,过点 $D$ 和 $M$ 作圆 $O$ 的割线 $MD$ 交圆 $O$ 于点 $T$,联结 $AM$、$AO$、$TO$.由 $A$、$B$、$D$、$F$ 及 $A$、$B$、$M$、$E$ 分别共圆,知 $\angle EFD = \angle ABE = \angle AME$.

又由 $D$、$F$、$A$、$T$ 共圆,知 $\angle EFD = \angle ATD = \angle ATM$,因 $AE$、$TM$ 是过两相交圆交点 $F$、$D$ 的割线,从而 $EM /\!/ AT$.于是 $\angle TAM = \angle AME = \angle ATM$,即知 $MA = MT$.又 $OA = OT$,从而 $MO \perp AT$,故 $OM \perp ME$.

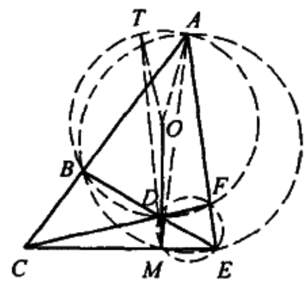


图26.32

而 $M$ 在 $CE$ 上,故 $OM \perp CE$,又由(6)知,$OG \perp CM$,故 $O$、$G$、$M$ 三点共线.

由性质27知,此时为2002年中国国家队选拔赛题的特殊情形,故 $OM$ 平分 $\angle AMD$,$OM$ 平分 $\angle BMF$.

(10) 如图26.33,联结 $PA$、$PB$、$SD$、$DR$、$RF$、$PF$.

由 $\triangle EFR \backsim \triangle FPA$,$\triangle CPA \backsim \triangle CSB$,有

$$\frac{FR}{PA} = \frac{FE}{PE}, \frac{AP}{SB} = \frac{CP}{CB}$$

从而 $$\frac{FR}{SB} = \frac{FE}{PE} \cdot \frac{CP}{CB}$$

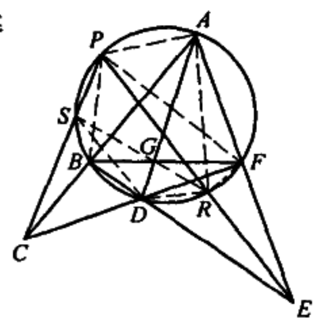


图26.33

由 $\triangle ERD \backsim \triangle EBP$,$\triangle CBP \backsim \triangle CSA$,亦有

$$\frac{RD}{AS}=\frac{ED}{EP}\cdot\frac{CP}{CA}$$

由上述两式相除，得

$$\frac{FR}{SB}\cdot\frac{AS}{RD}=\frac{FE}{ED}\cdot\frac{CA}{CB}$$

用$\frac{BD}{AF}$乘上式两边，应用完全四边形性质 1 中式 ①(即对 $\triangle ABE$ 及截线 $CDF$ 应用梅涅劳斯定理). 知

$$\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DE}=1$$

从而

$$\frac{FR}{RD}\cdot\frac{DB}{BS}\cdot\frac{SA}{AF}=1$$

对上式应用塞瓦定理角元形式的推论(或同(4)的证明中证 $R$、$G$、$Q$ 共线的方法) 即证得 $SR$、$BF$、$AD$ 三线共点. 故 $S$、$G$、$R$ 三点共线.

(11) 如图 26.34，由完全四边形性质 2 中式 ①(即对 $\triangle ACE$ 及点 $D$ 应用塞瓦定理). 有

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CW}{WE}\cdot\frac{EF}{FA}=1 \qquad ①$$

$$WA\cdot WD=WC^2\Leftrightarrow\frac{WC}{WD}=\frac{WA}{WC}\Leftrightarrow$$
$$\triangle DWC\backsim\triangle CWA\Leftrightarrow$$
$$\angle DCW=\angle CAW=\angle BFD\Leftrightarrow$$
$$BF\,/\!/\,CE\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FE}\Leftrightarrow$$
$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FA}=1\xLeftrightarrow{\text{式①}}WC=WE$$

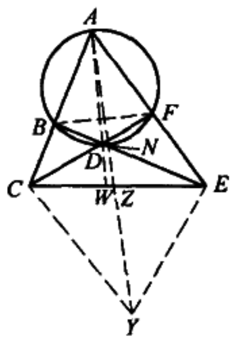


图 26.34

(12) 设 $AZ$ 不过点 $D$(否则 $D$ 与 $N$ 重合，$\triangle DCE$ 的外接圆即为所求)，如图 26.34 所示，延长 $AZ$ 到 $Y$，使 $ZY=AZ$，则 $ACYE$ 为平行四边形. 注意到 $\angle CDE=\angle BDF=180°-\angle BAF=180°-\angle CYE$. 从而，$C$、$Y$、$E$、$D$ 四点共圆. 又

$$\angle AND=\angle AFD=180°-\angle ABD=180°-\angle YEB$$

则

$$\angle YND=180°-\angle AND=\angle ABD=\angle YED$$

于是 $D$、$N$、$E$、$Y$ 四点共圆.

故 $C$、$Y$、$E$、$N$、$D$ 五点共圆，即知 $C$、$D$、$N$、$E$ 四点共圆.

以性质 32 为背景，可得到如下竞赛题.

**试题 7**　四边形 $ABCD$ 内接于圆，直线 $AB$、$DC$ 交于点 $E$，直线 $AD$、$BC$ 交于

点 $F$,$\angle AEC$ 的平分线交 $BC$ 于点 $M$,交 $AD$ 于点 $N$,$\angle BFD$ 的平分线交 $AB$ 于 $P$,交 $CD$ 于点 $Q$.求证:四边形 $MPNQ$ 是菱形.(事实上由性质 32(1) 即得)

(1950 年波兰数学奥林匹克题,2004 年斯洛文尼亚国家队选拔赛题)

**试题 8** 四边形 $ABCD$ 内接于圆,其边 $AB$ 与 $DC$ 的延长线交于点 $M$,边 $AD$ 与 $BC$ 的延长线交于点 $N$.由 $N$ 作该圆的两条切线 $NQ$ 和 $NR$,切点分别为 $Q$、$R$.求证:$M$、$Q$、$R$ 三点共线.(事实上,由性质 32(4) 即得).

(1997 年中国数学奥林匹克题)

**试题 9** $\triangle ABC$ 中,一个以 $O$ 为圆心的圆经过顶点 $A$ 及 $C$,又和线段 $AB$ 及线段 $BC$ 分别交于点 $K$ 及 $N$,$K$ 与 $N$ 不同.$\triangle ABC$ 和 $\triangle BNK$ 的外接圆恰相交于 $B$ 和另一点 $M$.求证:$\angle BMO = 90°$.(事实上,由性质 32(9) 即得).

(1985 年第 26 届 IMO 试题)

**试题 10** 一个圆通过 $\triangle ABC$ 的顶点 $A$、$B$,分别交线段 $AC$、$BC$ 于点 $D$、$E$,直线 $BA$ 和 $ED$ 交于点 $F$,直线 $BD$ 和 $CF$ 交于点 $M$.证明:$MF = MC$ 的充要条件为 $MB \cdot MD = MC^2$.(事实上,由性质 32(11) 即得).



(2003 年第 32 届美国数学奥林匹克题)

### 4.不相交两条对角线为圆中不相交弦的完全四边形

**性质 33** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,顶点 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆于圆 $O$,点 $M$ 为完全四边形的密格尔点.

(1) 从点 $A$ 向圆 $O$ 引切线 $AP$、$AQ$,切点为 $P$、$Q$,则 $P$、$D$、$Q$ 三点共线.

(2) 圆 $O$ 的两段弧调和分割对角线 $AD$ 所在直线.

(3) 点 $M$ 在对角线 $AD$ 所在直线上.

(4) $AM$ 平分 $\angle CME$,$AM$ 平分 $\angle BMF$,且 $C$、$O$、$M$、$E$ 共圆,$B$、$O$、$M$、$F$ 共圆.

(5) $OM \perp AD$.

(6) $A$、$P$、$O$、$M$、$Q$ 五点共圆.

(7) 直线 $OM$、$BF$、$CE$ 三线共点或相互平行.

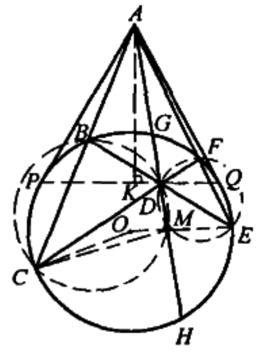


图 26.35

**证明** (1) 如图 26.35,同性质 32 中(4) 证 $R$、$G$、$Q$ 三点共线而证得 $P$、$D$、$Q$ 共线.

或者由点 $M$ 的性质有 $AD \cdot AM = AB \cdot AC = AP^2$,知 $\triangle APD \backsim \triangle AMP$ 有 $\angle ADP = \angle APM$.

同理 $\angle ADQ = \angle AQM$,而

$$\angle APM + \angle AQM = 180°$$

则

$$\angle ADP + \angle ADQ = 180°$$

故 $P$、$D$、$Q$ 共线.

(2) 设直线 $AD$ 交圆于 $G$、$H$，如图 26.35 所示. 过 $A$ 作 $AK\perp PQ$ 于 $K$，则 $PK=KQ$. 由

$$AP^2=AG\cdot AH=AK^2+PK^2, AD^2=AK^2+KD^2$$

两式相减有

$$AG\cdot AH-AD^2=PK^2-KD^2=(PK+KD)(PK-KD)=PD\cdot DQ=$$
$$DG\cdot DH=(AD-AG)(AH-AD)=$$
$$AD\cdot AH-AD^2+AD\cdot AG-AH\cdot AG$$

于是

$$2AG\cdot AH=AD(AH+AG)$$

即

$$\frac{AD}{AG}+\frac{AD}{AH}=2=\frac{AG}{AG}+\frac{AH}{AH}$$

从而

$$\frac{AD-AG}{AG}=\frac{AH-AD}{AH}$$

故

$$\frac{DG}{AG}=\frac{DH}{AH}$$

此式表明圆 $O$ 的两段弧调和分割 $AD$ 所在直线.

(3) 在直线 $AD$ 上取点 $M'$，使

$$AD\cdot AM'=AP^2=AB\cdot AC=AF\cdot AE$$

则 $B$、$C$、$M'$、$D$ 四点共圆，$E$、$F$、$D$、$M'$ 四点共圆，即 $M'$ 为圆 $BCD$ 与圆 $DEF$ 的交点，从而 $M'$ 为完全四边形 $ABCDEF$ 的密格尔点，即 $M'$ 与 $M$ 重合，故点 $M$ 在直线 $AD$ 上.

(4) 联结 $CM$、$EM$，则 $\angle CMH=\angle CBD=\angle EFD=\angle EMH$. 故

$$\angle CME=2\angle CBE=\angle COE$$

从而，$AM$ 平分 $\angle CME$，且 $C$、$O$、$M$、$E$ 四点共圆.

同理，$AM$ 平分 $\angle BMF$，且 $B$、$O$、$M$、$F$ 四点共圆.

(5) 联结 $OC$、$OE$，由 $C$、$O$、$M$、$E$ 共圆，则

$$\angle OMC=\angle OEC=\angle OCE=\frac{1}{2}(180°-\angle COE)=90°-\frac{1}{2}\angle COE=$$
$$90°-\angle CBE=90°-\angle CMH$$

即

$$\angle OMC+\angle CMH=90°$$

故

$$OM\perp AM$$

即

$$OM\perp AD$$

(6) 由 $\angle APO=\angle AMO=\angle AQO=90°$，知 $A$、$P$、$O$、$M$、$Q$ 五点共圆.

(7) 对圆 $OMFB$、圆 $CEMO$、圆 $O$ 用根轴定理，即知直线 $OM$、$BF$、$CE$ 三线共

点或平行.

**注** 由(5)$OM \perp AD$,知 $A$、$P$、$O$、$M$、$Q$ 五点共圆.又 $AD \cdot AM = AB \cdot AC = AP$,即有 $\triangle APD \backsim \triangle AMP$,亦有 $\angle ADP = \angle APM$.同理 $\angle ADQ = \angle AQM$.而 $\angle APM + \angle AQM = 180°$,故 $\angle ADP + \angle ADQ = 180°$.得(1)中 $P$、$D$、$Q$ 共线.

以性质 33 题设为背景也可以编写如下竞赛题.

**试题 11** 已知圆 $O$ 的半径为 $r$,$A$ 为圆外一点,过点 $A$ 作直线 $l$(与 $AO$ 不同),交圆 $O$ 于点 $B$、$C$,且 $B$ 在 $A$、$C$ 之间,作直线 $l$ 关于 $AO$ 的对称直线交圆 $O$ 于点 $D$、$E$,且 $E$ 在 $A$、$D$ 之间.证明:四边形 $BCDE$ 两条对角线的交点为定点,即该点不依赖于直线 $l$ 的位置.

(2004 年第 21 届希腊数学奥林匹克题)

事实上,可推证得 $O$、$D$、$E$、$P$ 共圆,$AP = \dfrac{AO^2 - r^2}{AO}$ 为定值.

*5.边为圆的切线段的完全四边形*



**例 1** 如图 26.36,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,对角线 $AD$ 与 $BF$ 交于点 $G$,若过 $D$、$F$、$G$ 的圆与边 $AE$、$BE$ 分别切于点 $F$、$D$,则直线 $CG$ 是圆 $DFG$ 的切线.

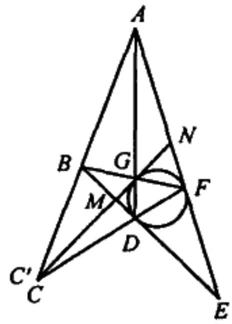



图 26.36

**证明** 设过点 $G$ 的圆 $DFG$ 的切线与直线 $FD$ 交于点 $C'$.

又已知直线 $DG$ 与过点 $F$ 的圆 $DFG$ 的切线交于点 $A$,直线 $FG$ 与过点 $D$ 的圆 $DFG$ 的切线交于点 $B$,则由勒莫恩定理知,$A$、$B$、$C'$ 三点共线,即直线 $AB$ 与直线 $FD$ 交于点 $C'$.而题设直线 $AB$ 与 $FD$ 交于点 $C$,故 $C'$ 与 $C$ 重合.即直线 $CG$ 是圆 $DFG$ 的切线.

**试题 12** 在完全四边形 $CFBEGA$ 中,对角线 $CE$ 所在直线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 $D$,过点 $D$ 且与 $FG$ 切于点 $E$ 的圆交 $AB$ 于点 $M$,已知 $\dfrac{AM}{AB} = t$,求 $\dfrac{GE}{EF}$(用 $t$ 表示).

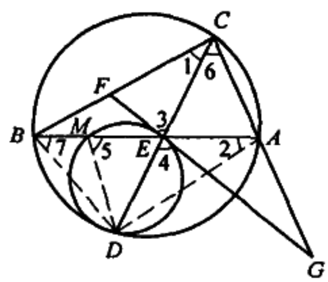



图 26.37

(1990 年第 31 届 IMO 试题的等价表述)

**解** 联结 $AD$、$MD$、$BD$,角的记号如图 26.37 所示.由 $\angle 5 = \angle 4 = \angle 3$,$\angle 1 = \angle 2$,得 $\triangle EFC \backsim$

$\triangle MDA$. 即有

$$\frac{EF}{MD}=\frac{CE}{AM}$$

即 $$EF\cdot AM=MD\cdot CE$$

又 $$\angle 3=\angle 5$$

知 $$\angle GEC=\angle DMB,\angle 6=\angle 7$$

于是 $\triangle GEC\backsim\triangle DMB$，即有 $\frac{GE}{DM}=\frac{EC}{MB}$，即

$$GE\cdot MB=DM\cdot EC$$

从而 $$EF\cdot AM=GE\cdot MB$$

故 $$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{AB-AM}=\frac{tAB}{AB-tAB}=\frac{t}{1-t}$$

**试题 13**　在完全四边形 $BXAPCR$ 中，圆 $O_1$ 切 $AB$ 于 $A$，切 $XC$ 于点 $P$，圆 $O_2$ 过点 $C$、$P$，且与 $AB$ 切于点 $B$. 圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 除相交于点 $P$ 外，还相交于点 $Q$. 证明：$\triangle PQR$ 的外接圆与直线 $BP$、$BR$ 相切.

（2003 年斯洛文尼亚国家队选拔赛题的等价表述）



**证明**　如图 26.38，联结 $AQ$、$BQ$. 由

$$\angle BPR=\angle PBA+\angle BAP=\angle BCX+\angle APX=\angle BCX+\angle CPR=\angle BRP$$

知 $BP=BR$.

由弦切角定理的逆定理知，只要证明 $\angle BPR=\angle PQR$.

由

$$\angle BRP=\angle BPR=\angle PBA+\angle PAB=\angle AQP+\angle BQP=\angle AQB$$

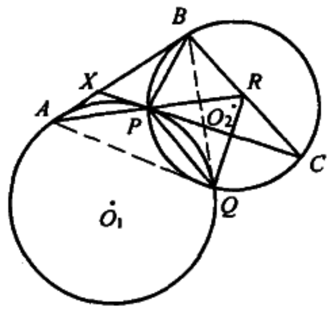



图 26.38

知 $A$、$Q$、$R$、$B$ 四点共圆，则 $\angle BQR=\angle PAB$，又 $\angle BQP=\angle PBA$，则

$$\angle PQR=\angle PAB+\angle PBA=\angle BPR$$

故 $BP$ 是圆 $PQR$ 的切线. 由 $BP=BR$ 知 $BR$ 也是圆 $PQR$ 的切线. 结论获证.

**例 2**　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，圆 $O$ 内切于四边形 $ABDF$ 的边 $AB$、$BD$、$DF$、$FA$ 分别于 $P$、$Q$、$R$、$S$ 四点. 求证：

(1) $AD$、$BF$、$PR$、$QS$ 四线共点.

(2) $AC-CD=AE-DE$.

**证明**　(1) 设 $BF$ 与 $QS$ 交于点 $M$，$BF$ 与 $PR$ 交于点 $M'$. 下证 $M$ 与 $M'$ 重合. 分别对 $\triangle BEF$ 及截线 $QS$，对 $\triangle BCF$ 及截线 $PR$ 应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{BM}{MF}\cdot\frac{FS}{SE}\cdot\frac{EQ}{QB}=1$$

即有
$$\frac{BM}{MF}=\frac{QB}{SF}$$

$$\frac{BM'}{M'F}\cdot\frac{FR}{RC}\cdot\frac{CP}{PB}=1$$

即有
$$\frac{BM'}{M'F}=\frac{PB}{RF}$$

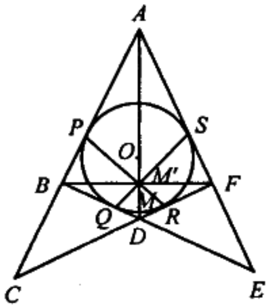


图 26.39

注意到 $BP=BQ$,$FS=FR$,则$\frac{BM}{MF}=\frac{BM'}{M'F}$,故 $M$ 与 $M'$ 重合,从而 $BF$、$QS$、$PR$ 三线共点于 $M$.

同理,$AD$、$QS$、$PR$ 三线共点于 $M$.故 $AD$、$BF$、$PR$、$QS$ 共点.

(2) 由圆的切线长定理,有

$$AC-AE=(AP+PC)-(AS+SE)=PC-SE=CR-QE=(CD+DR)-(DE+DQ)=CD-DE$$

故
$$AC-CD=AE-DE$$



**试题 14** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$\angle ABE=\angle AFC$,过点 $B$ 作 $BS\perp AB$ 交 $CD$ 于点 $S$,过点 $F$ 作 $FR\perp AC$ 交 $DE$ 于 $R$.设直线 $BS$ 与 $FR$ 交于点 $T$,则 $AT\perp CE$,且 $SR\parallel CE$.

(2004 年第 7 届中国香港数学奥林匹克推广题)

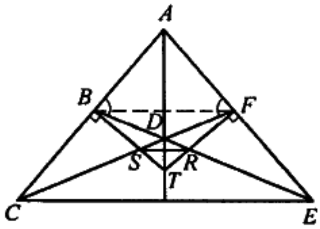


图 26.40

**证明** 由 $\angle ABE=\angle AFC$,知 $\angle CBE=\angle CFE$,从而知 $B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆.

又由题设,知 $A$、$B$、$T$、$F$ 四点共圆,联结 $BF$,则 $\angle ATF=\angle ABF=\angle AEC$.

由 $\angle ATF$ 与 $\angle TAF$ 互余,知 $\angle AEC$ 与 $\angle TAF$ 互余,故推知 $AT\perp CE$.

又由

$$\angle SBR=\angle FBE=90^\circ-\angle ABE=90^\circ-\angle AFC=\angle CFT=\angle SFR$$

知 $B$、$S$、$R$、$F$ 四点共圆,从而 $\angle RST=\angle RBF$.

而 $\angle RBF=\angle EBF=\angle ECF$,则 $\angle RSF=\angle ECF$.

故 $SR\parallel CE$.

**试题 15** 在完全四边形 $ABCDEF$ 中,顶点 $B$、$C$、$E$、$F$ 共圆 $O$.若直线 $OD$ 交 $\triangle ACE$ 的外接圆于点 $P$,则 $\triangle PCF$ 与 $\triangle PBE$ 有共同的内心.

（2005 年中国台湾数学奥林匹克选拔题的等价表述）

**证明**　先证一条引理.

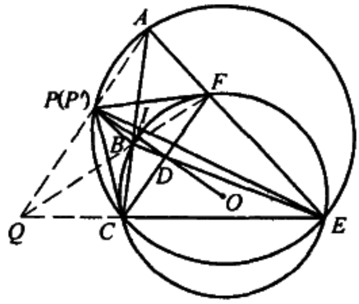



图 26.41

**引理**　设 $P$ 是半径为 $r$ 的 $\odot O$ 上的一动点，$A$、$B$ 是过圆心 $O$ 的一条射线上两定点，且满足 $OA \cdot OB = r^2$，则 $\frac{PA}{PB}$ 是定值.

事实上，如图 26.42，可设 $OA = kr$，$\angle POA = \alpha$，则 $OB = \frac{1}{k}r$，且

$$PA^2 = PO^2 + OA^2 - 2PO \cdot OA\cos\alpha = r^2(1 + k^2 - 2k\cos\alpha)$$

$$PB^2 = PO^2 + OB^2 - 2PO \cdot OB\cos\alpha = r^2\frac{1}{k^2}(1 + k^2 - 2k\cos\alpha)$$

所以，$PB^2 = \frac{1}{k^2}PA^2$. 故 $\frac{PA}{PB} = k$ 为定值.

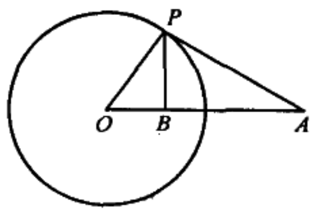



图 26.42



下面证明原题.

设直线 $FB$ 与 $EC$ 相交于点 $Q$，联结 $QA$ 交 $\triangle ACE$ 的外接圆于 $P'$（异于点 $A$）.

由 $QP' \cdot QA = QC \cdot QE = QB \cdot QF$，知 $P'$、$B$、$F$、$A$ 四点共圆.

对完全四边形 $EFABQC$，运用性质 32(9)，知 $OP' \perp QA$，且 $OD \perp QA$.

从而，知 $O$、$D$、$P'$ 三点共线. 因此 $P'$ 与 $P$ 重合.

设 $\odot O$ 的半径为 $r$，则

$$OD \cdot OP = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OD}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$$

若从 $A$ 向 $\odot O$ 引两条切线 $AM$、$AN$，切点为 $M$、$N$，联结 $OA$ 交 $MN$ 于 $K$，则

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}) \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OA} = r^2$$

又设 $OP$ 与 $\odot O$ 交于点 $I$，由引理，有 $\frac{PC}{CD} = \frac{PI}{ID}$，所以 $CI$ 平分 $\angle PCD$.

同理，$FI$ 平分 $\angle PFC$. 于是 $I$ 是 $\triangle PCF$ 的内心.

同理，$I$ 是 $\triangle PBE$ 的内心.

故 $\triangle PCF$ 与 $\triangle PBE$ 有共同的内心.

## 第2节 圆内接四边形的位似形与欧拉线[①②]

**命题1** 如图26.43,设$A_1A_2A_3A_4$内接于圆$O$,$G_1$和$H_1$、$G_2$和$H_2$、$G_3$和$H_3$、$G_4$和$H_4$依次为$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$的重心和垂心,则四边形$A_1A_2A_3A_4$、$G_1G_2G_3G_4$和$H_1H_2H_3H_4$彼此相位似.

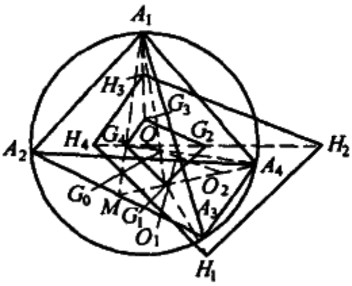


图26.43

**证明** (1)设$A_1G_1$、$A_4G_4$相交于$G_0$,联结$A_1G_4$,并延长交$A_2A_3$于$M$,则$M$是$A_2A_3$中点.联结$A_4M$,则$G_1$在$A_4M$上.$\triangle A_1MG_1$被直线$A_4G_0G_4$所截,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{G_1G_0}{G_0A_1}\cdot\frac{A_1G_4}{G_4M}\cdot\frac{MA_4}{A_4G_1}=1 \qquad ①$$



因$G_1$、$G_4$分别为$\triangle A_2A_3A_4$和$\triangle A_1A_2A_3$重心,所以$\frac{A_1G_4}{G_4M}=\frac{2}{1}$,$\frac{MA_4}{A_4G_1}=\frac{3}{2}$,代入①解之得$\frac{G_1G_0}{G_0A_1}=\frac{1}{3}$.

同理$\frac{G_4G_0}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$,故$A_1G_1$经过$A_4G_4$上定点$G_0$,且被$G_0$分为1:3.

同法可证$A_2G_2$、$A_3G_3$都经过$G_0$,且被$G_0$分为1:3.故得

(i) $A_1G_1$、$A_2G_2$、$A_3G_3$、$A_4G_4$都通过同一点$G_0$.

(ii) $\frac{G_0G_1}{G_0A_1}=\frac{G_0G_2}{G_0A_2}=\frac{G_0G_3}{G_0A_3}=\frac{G_0G_4}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$.

故四边形$G_1G_2G_3G_4$是四边形$A_1A_2A_3A_4$的位似形,位似比$-\frac{1}{3}$(内位似),位似中心$G_0$(参见初中几何课本)(若$A_1A_2A_3A_4$是任意四边形,此结论依然成立).由于$A_1A_2A_3A_4$有外接圆圆$O$,故四边形$G_1G_2G_3G_4$也有外接圆.联结$OG_0$使延长到$O_1$,且使$G_0O_1=\frac{1}{3}OG_0$,则$O_1$就是四边形$G_1G_2G_3G_4$外接圆圆心.

(2)因$OG_1H_1$、$OG_2H_2$、$OG_3H_3$、$OG_4H_4$都是直线(称为欧拉线)且

$$\frac{OH_1}{OG_1}=\frac{OH_2}{OG_2}=\frac{OH_3}{OG_3}=\frac{OH_4}{OG_4}=\frac{3}{1}$$

---

① 胡耀宗.圆内接四边形的位似形与欧拉线[J].中学教研(数学),1994(3):26-27.
② 朱德祥.初等几何研究[M].北京:高等教育出版社,1985.

（参见第 17 章第 1 节）故 $H_1H_2H_3H_4$ 与 $G_1G_2G_3G_4$ 成外位似，位似比为 3，位似中心为 $O$. 要定出圆 $H_1H_2H_3H_4$ 的圆心，因 $G_1G_2G_3G_4$ 有外接圆，故四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 也有外接圆. 只要延长 $OO_1$ 到 $O_2$ 使 $\frac{OO_2}{OO_1}=3$，$O_2$ 就是四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的外接圆的圆心.

(3) 由位似变换传递性知，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 成位似，位似比为 $k=k_1k_2=(-\frac{1}{3})3=-1$（参见第 16 章第 2 节），设位似中心为 $H_0$，由于在位似变换中，对应点之连线必过位似中心 $H_0$，$H_0$ 是 $OO_2$ 中点. 由此可见四边形 $A_1A_2A_3A_4$、$G_1G_2G_3G_4$ 和 $H_1H_2H_3H_4$ 彼此互相位似，命题 1 获证.

我们把命题 1 中出现的点 $O$、$G_0$、$H_0$ 分别叫做圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心、重心和垂心.

**命题 2**　圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 $O$，重心 $G_0$，垂心 $H_0$ 共线，且相应的四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 和 $H_1H_2H_3H_4$ 的外心 $O_1$、$O_2$ 也在此线上（即五点共线，本文把此线称为圆内接四边形的欧拉线），并有比值 $OG_0:G_0O_1:O_1H_0:H_0O_2=3:1:2:6$.

**略证**　由于若三图形彼此互相位似，则三位似中心共线及命题 1 中 $O_1$、$O_2$ 的位置，命题 2 立即获证.

# 第27章　2005～2006年度试题的诠释

这一年度我国又举办了北方数学奥林匹克邀请赛,其试题我们简记为北方赛试题,这一届6道试题中有1道平面几何题.我们把它排在西部竞赛题之后.

**东南赛试题1**　圆 $O$ 与直线 $l$ 相离,作 $OP\perp l$,$P$ 为垂足.设点 $Q$ 是 $l$ 上任意一点(不与点 $P$ 重合),过点 $Q$ 作圆 $O$ 的两条切线 $QA$、$QB$,$A$、$B$ 为切点,$AB$ 与 $OP$ 相交于点 $K$.过点 $P$ 作 $PM\perp QB$,$PN\perp QA$,$M$、$N$ 为垂足.求证:直线 $MN$ 平分线段 $KP$.

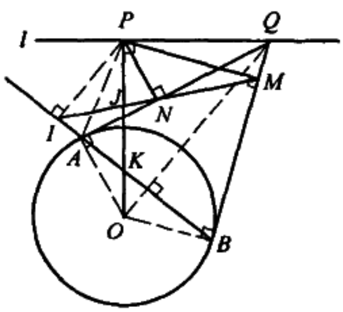


图27.1



**证明**　如图27.1,作 $PI\perp AB$,$I$ 为垂足,记 $J$ 为直线 $MN$ 与线段 $PK$ 的交点.易知

$$\angle QAO=\angle QBO=\angle QPO=90^\circ$$

故 $O$、$B$、$Q$、$P$、$A$ 均在以线段 $OQ$ 为直径的圆周上.

由于 $PN\perp QA$,$PM\perp QB$,$PI\perp AB$,则由西姆松定理知 $\triangle QAB$ 的外接圆上一点 $P$ 在其三边上的垂足 $N$、$M$、$I$ 三点共线,即 $N$、$M$、$J$、$I$ 四点共线.因为

$$QO\perp AB,PI\perp AB$$

所以

$$QO\parallel PI$$

因此,有 $\angle POQ=\angle IPO$.

又 $P$、$I$、$A$、$N$,$P$、$A$、$O$、$Q$ 分别四点共圆,所以

$$\angle PIJ=\angle PAN=\angle PAQ=\angle POQ=\angle IPJ$$

于是,在 $\mathrm{Rt}\triangle PIK$ 中,有 $\angle PIJ=\angle JPI$,则 $J$ 为 $PK$ 的中点.

因此,直线 $MN$ 平分线段 $KP$.

**东南赛试题2**　已知直线 $l$ 与单位圆圆 $O$ 相切于点 $P$,点 $A$ 与圆 $O$ 在直线 $l$ 的同侧,且点 $A$ 到直线 $l$ 的距离为 $h(h>2)$,从点 $A$ 作圆 $O$ 的两条切线,分别与直线 $l$ 交于 $B$、$C$ 两点.求线段 $PB$ 与线段 $PC$ 的长度之乘积.

**解**　如图27.2,设 $PB$、$PC$ 的长度分别为 $p$、$q$,$\angle ABP=\beta$,$\angle ACP=\gamma$,$AC$ 与圆 $O$ 的切点为 $E$,$AE$ 的长度为 $t$.联结 $AO$、$OE$.则在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中,有

$$\angle AOE = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

因此　　$t = \tan\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{p + q}{pq - 1}$

因此可得

$$S_{\triangle ABC} = (p + q + t) \times 1 = \frac{pq(p + q)}{pq - 1}$$

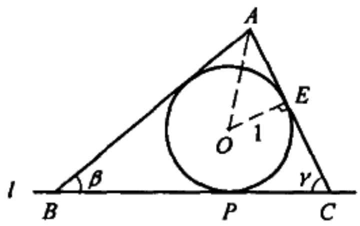



图 27.2

又因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(p + q)h$，所以

$$\frac{1}{2}h = \frac{pq}{pq - 1}$$

故

$$pq = \frac{h}{h - 2}$$

**女子赛试题 1**　如图 27.3，点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 $CP$、$AB$ 相交于点 $E$，直线 $BP$、$AC$ 相交于点 $F$，边 $AC$ 的垂直平分线交边 $AB$ 于点 $J$，边 $AB$ 的垂直平分线交边 $AC$ 于点 $K$. 求证：$\frac{CE^2}{BF^2} = \frac{AJ \cdot JE}{AK \cdot KF}$.

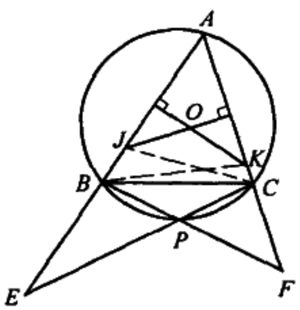



图 27.3

**证明**　如图 27.3，联结 $BK$、$CJ$. $\angle E = \angle ABP - \angle BPE$，而由 $A$、$B$、$P$、$C$ 四点共圆，知 $\angle BPE = \angle A$，故 $\angle E = \angle ABP - \angle A$. 又由 $KA = KB$，知 $\angle A = \angle ABK$，故

$$\angle E = \angle ABP - \angle ABK = \angle KBF \quad ①$$

同理

$$\angle F = \angle JCE \quad ②$$

由 ①、② 得 $\triangle JEC \backsim \triangle KBF$. 由此

$$\frac{CE}{BF} = \frac{JE}{KB} = \frac{JE}{AK} \quad ③$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{JC}{KF} = \frac{AJ}{KF} \quad ④$$

将 ③、④ 两式的左端和右端分别相乘即得结论.

**女子赛试题 2**　是否存在这样的凸多面体，它共有 8 个顶点、12 条棱和 6 个面，并且其中有 4 个面，每 2 个面都有公共棱？

**解** 存在.如图27.4所示.

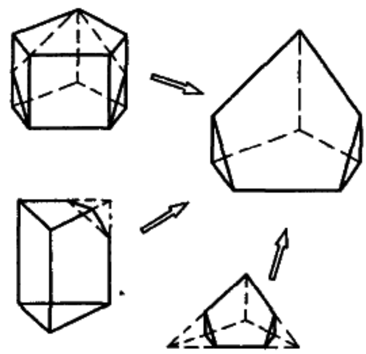


图27.4

**女子赛试题3** 给定实数 $a$、$b(a>b>0)$,将长为 $a$、宽为 $b$ 的矩形放入一个正方形内(包含边界).问正方形的边至少为多长?

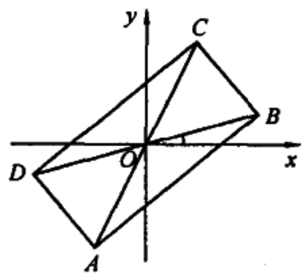



图27.5

**解** 设长方形为 $ABCD$,$AB=a$,$BC=b$,中心为 $O$.以 $O$ 为原点,建立直角坐标系,$x$ 轴、$y$ 轴分别与正方形的边平行.

(i) 线段 $BC$ 与坐标轴不相交.不妨设 $BC$ 在第一象限内,$\angle BOx\leqslant(90^\circ-\angle BOC)/2$,如图27.5所示,此时正方形的边长大于等于

$$\begin{aligned}BD\cos\angle BOx\geqslant BD\cos[(90^\circ-\angle BOC)/2]&=\\BD\cos 45^\circ\cos(\angle BOC/2)&+\\BD\sin 45^\circ\sin(\angle BOC/2)&=\\\sqrt{2}(a+b)/2\end{aligned}$$

所以此时所在正方形边长至少为 $\sqrt{2}(a+b)/2$.

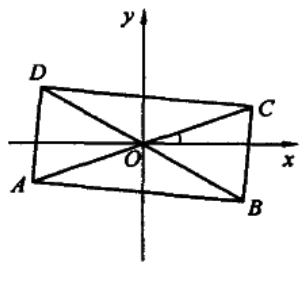



图27.6

(ii) 线段 $BC$ 与坐标轴相交.不妨设 $BC$ 与 $x$ 轴相交,$\angle COx\leqslant\angle COB/2$,如图27.6所示.此时正方形的边长大于等于

$$AC\cos\angle COx\geqslant AC\cos(\angle COB/2)=a$$

故此时所在正方形边长至少为 $a$.

比较情形1,2中结论知:若 $a<(\sqrt{2}+1)b$,则正方形的边长至少为 $a$;若 $a\geqslant(\sqrt{2}+1)b$,则正方形的边长至少为 $\sqrt{2}(a+b)/2$.

**西部赛试题1** 如图27.7,过圆外一点 $P$ 作圆的两条切线 $PA$、$PB$,$A$、$B$ 为

切点，再过点 $P$ 作圆的一条割线分别交圆于 $C$、$D$ 两点，过切点 $B$ 作 $PA$ 的平行线分别交直线 $AC$、$AD$ 于 $E$、$F$. 求证：$BE = BF$.

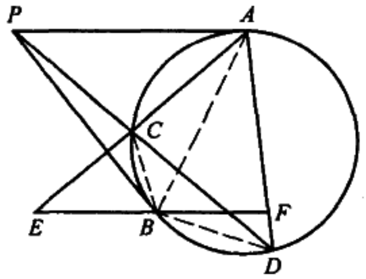


图 27.7

**证明** 如图 27.7，联结 $BC$、$BA$、$BD$，则

$$\angle ABC = \angle PAC = \angle E$$

故 $$\triangle ABC \backsim \triangle AEB$$

从而，$\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{AB}$，即

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} \quad ①$$

又 $\angle ABF = \angle PAB = \angle ADB$，所以

$$\triangle ABF \backsim \triangle ADB$$

从而，$\frac{BF}{BD} = \frac{AB}{AD}$，即

$$BF = \frac{AB \cdot BD}{AD} \quad ②$$

另一方面，又因为

$$\triangle PBC \backsim \triangle PDB, \triangle PCA \backsim \triangle PAD$$

所以 $$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PB}, \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{PA}$$

而 $PA = PB$，则

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \quad ③$$

于是 $$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$$

故由式①、②、③即知 $BE = BF$.

**西部赛试题 2** 如图 27.8，圆 $O_1$、圆 $O_2$ 交于 $A$、$B$ 两点. 过点 $O_1$ 的直线 $DC$ 交圆 $O_1$ 于点 $D$ 且切圆 $O_2$ 于点 $C$，$CA$ 切圆 $O_1$ 于点 $A$，圆 $O_1$ 的弦 $AE$ 与直线 $DC$ 垂直. 过点 $A$ 作 $AF$ 垂直于 $DE$，$F$ 为垂足. 求证：$BD$ 平分线段 $AF$.

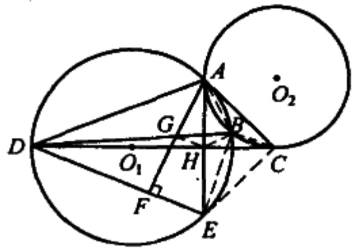


图 27.8

**证明** 如图 27.8，设 $AE$ 交 $DC$ 于点 $H$，$AF$ 交 $BD$ 于点 $G$，联结 $AB$、$BC$、$BH$、$BE$、$CE$、$GH$.

由对称性知边 $CE$ 也是圆 $O_1$ 的切线，$H$ 为 $AE$ 的中点. 因为

$$\angle HCB = \angle BAC, \angle BAC = \angle BEH$$

所以
$$\angle HCB = \angle HEB$$

则 $H$、$B$、$C$、$E$ 四点共圆.故

$$\angle BHC = \angle BEC$$

又 $\angle BEC = \angle BDE$,则

$$\angle BHC = \angle BDE \quad ①$$

由 $AF \perp DE$,得

$$\angle AGB = \frac{\pi}{2} - \angle BDE \quad ②$$

由 $AE \perp DC$,得

$$\angle AHB = \frac{\pi}{2} - \angle BHC \quad ③$$

由式①、②、③得 $\angle AGB = \angle AHB$,故 $A$、$G$、$H$、$B$ 四点共圆.所以

$$\angle AHG = \angle ABG = \angle AED$$

因此
$$GH /\!/ DE$$



而 $H$ 为 $AE$ 的中点,故 $G$ 为 $AF$ 的中点.

**西部赛试题 3** 在等腰 Rt$\triangle ABC$ 中,$CA = CB = 1$,$P$ 是 $\triangle ABC$ 边界上任意一点.求 $PA \cdot PB \cdot PC$ 的最大值.

**解** (i) 如图 27.9(a),当 $P \in AC$ 时,有

$$PA \cdot PC \leqslant \frac{1}{4}, PB \leqslant \sqrt{2}$$

故
$$PA \cdot PB \cdot PC \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$$

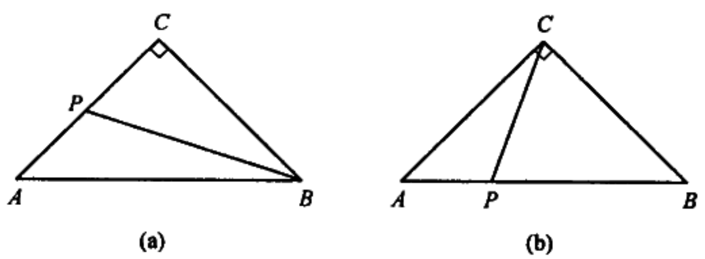



图 27.9

其中等号不成立(因为两个等号不可能同时成立),即

$$PA \cdot PB \cdot PC < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(ii) 如图 27.9(b),当 $P \in AB$ 时,设 $AP = x \in [0,\sqrt{2}]$,则

$$f(x) = PA^2 \cdot PB^2 \cdot PC^2 = x^2(\sqrt{2} - x)^2(1 + x^2 - \sqrt{2}x)$$

令 $t = x(\sqrt{2} - x)$,则

$$t \in [0,\frac{1}{2}], f(x) = g(t) = t^2(1 - t)$$

注意到 $g'(t) = 2t - 3t^2 = t(2 - 3t)$,所以,$g(t)$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上递增.则

$$f(x) \leqslant g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

故

$$PA \cdot PB \cdot PC \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当 $t = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $P$ 为 $AB$ 的中点时,等号成立.

**北方赛试题**　$AB$ 是圆 $O$ 的一条弦,它的中点为 $M$,过点 $M$ 作一条非直径的弦 $CD$,过点 $C$ 和 $D$ 作圆 $O$ 的两条切线,分别与直线 $AB$ 相交于 $P$、$Q$ 两点.求证:$PA = QB$.

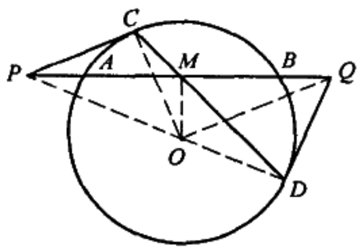


图 27.10

**证明**　如图 27.10,联结 $OM$、$OP$、$OQ$、$OC$、$OD$.因为 $PC$ 为圆 $O$ 的切线,$M$ 为弦 $AB$ 的中点,则

$$\angle PCO = \angle PMO = 90^\circ$$

所以,$P$、$C$、$M$、$O$ 四点共圆.

同理,$Q$、$D$、$O$、$M$ 四点共圆.

则有

$$\angle OPM = \angle OCM = \angle ODM = \angle OQM$$

故 $OP = OQ$,从而 $MP = MQ$,又 $MA = MB$,所以 $PA = QB$.

**试题 A**　在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB > AC$,过 $A$ 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线 $l$,又以 $A$ 为圆心,$AC$ 为半径作圆分别交线段 $AB$ 于 $D$,交直线 $l$ 于 $E$、$F$.证明:直线 $DE$、$DF$ 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.

这里先分别给出通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心的若干证法.然后给出几种综合证法.①②③④

---

① 沈文选.2005 年全国高中数学联赛加试题另解[J].中学数学研究,2005(12):10-12.
② 李昌勇,宁锐.2005 年全国高中数学联赛加试第一题解法探讨[J].数学竞赛之窗,2005(12):14-16.
③ 李建泉.2005 年全国高中数学联赛加试题另解[J].中等数学,2006(1):12-15.
④ 罗增儒.案例分析:继续暴露数学解题的思维过程[J].中学数学教学参考,2006(1-2):28-31.

我们通过特殊探索易知直线 $DE$ 过内心，而直线 $FD$ 通过的是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 所含的旁心.

为了便于书写，我们记 $\angle BAC = 2\alpha$，$\angle ABC = 2\beta$，$\angle ACB = 2\gamma$.

(1) 首先证明直线 $DE$ 通过 $\triangle ABC$ 的内心

**分析 1** 如图 27.11，作 $\angle BAC$ 的平分线交直线 $DE$ 于 $I$. 下证 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，只要证明 $IC$ 平分 $\angle ACB$，即只要证明 $\angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$ 或者 $\angle ACI = \angle BCI$.

由 $C$ 与 $D$ 关于 $\angle BAC$ 平分线 $AI$ 对称知，$\angle ACI = \angle ADI$，又 $AC = AD = AE = AF$ 且 $l$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切.

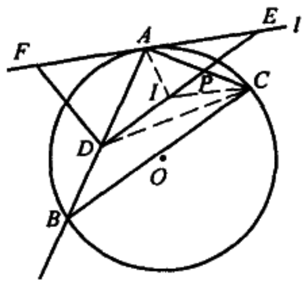


图 27.11

**证法 1** 作 $\angle BAC$ 的平分线，交 $DE$ 于 $I$. 易知 $\triangle ADI \cong \triangle ACI$. 所以

$$\angle ACI = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle ACB$$

从而 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心.



**证法 2** 同证法 1，有 $\triangle ACI \cong \triangle ADI$，亦有 $\angle ACI = \angle ADI = \angle AED = \frac{1}{2}\angle DAF = \frac{1}{2}\angle ACB$.

从而 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心.

**证法 3** 作 $\angle BAC$ 的平分线交 $DE$ 于点 $I$，交直线 $FD$ 于点 $I'$，联结 $IC$、$CI'$、$EC$、$DC$. 由 $F$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆(圆 $A$)，知 $\angle CAI = \alpha = \angle DEC$. 从而 $A$、$I$、$C$、$E$ 四点共圆，$\angle AEI = \angle ACI$. 又 $AD = AE$，知 $2\angle AEI = \angle DAF = \angle ACB$，即 $\angle ACI = \beta$，亦即 $IC$ 平分 $\angle ACB$，故 $DE$ 过 $\triangle ABC$ 的内心 $I$.

**证法 4** 如图 27.12，联结 $DE$、$DC$，作 $\angle BAC$ 的平分线分别交 $DE$、$DC$ 于点 $I$、$G$，联结 $IC$. 由 $AD = AC$，得

$$AG \perp DC, ID = IC$$

又点 $D$、$C$、$E$ 在圆 $A$ 上，有

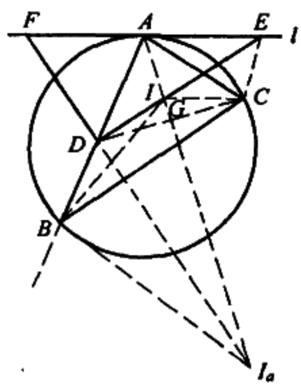


图 27.12

$$\angle IAC = \frac{1}{2}\angle DAC = \angle IEC$$

则 $A$、$I$、$C$、$E$ 四点共圆.故

$$\angle CIE = \angle CAE = \angle ABC \qquad (*)$$

而
$$\angle CIE = 2\angle ICD$$

所以
$$\angle ICD = \frac{1}{2}\angle ABC$$

故
$$\angle AIC = \angle IGC + \angle ICG = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$$

即
$$\angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$$

因此,$I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心.

**注**　因式(*)知 $D$、$B$、$C$、$I$ 共圆,有 $\angle ICB = \angle IDA = \angle ICA$.

**分析 2**　设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,下证 $D$、$I$、$E$ 三点共线.

角度 1:从角的关系来看,即只要证明 $\angle ADI = \angle ADE$;

角度 2:从边的关系来看,可利用张角定理、梅涅劳斯定理等入手;

角度 3:将三点共线转化为三线共点,可利用塞瓦定理.

**证法 5**　设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,联结 $DI$、$IC$.则

$$\angle ADI = \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle FAB = \angle ADE$$

故 $D$、$I$、$E$ 三点共线.

**注**　这里角度转化与证法 2 同.

**证法 6**　如图 27.13,作 $IM \perp AB$ 于 $M$,$IN \perp BC$ 于 $N$,联结 $IC$.则

$$2DM = 2(AC - AM) = 2AC - (AB + AC - BC) = AC + BC - AB$$

同理 $2CN = 2(BC - BN) = AC + BC - AB$

故
$$DM = CN$$

又
$$IM = IN$$

从而
$$\mathrm{Rt}\triangle IDM \cong \mathrm{Rt}\triangle ICN$$

$$\angle MDI = \angle NCI = \angle C/2 = (\angle FAD)/2 = \angle ADE$$

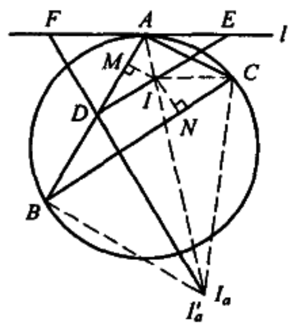


图 27.13

故 $D$、$I$、$E$ 三点共线,即 $DE$ 过 $\triangle ABC$ 的内心 $I$.

**证法 7** 在 $\triangle ABI$ 中应用正弦定理,有

$$\frac{AB}{\sin\angle AIB}=\frac{AI}{\sin\angle ABI}$$

即

$$\frac{2R\sin C}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{AI}{\sin\beta}$$

亦即

$$AI=4R\sin\beta\sin\gamma$$

由于

$$\frac{\sin\angle DAE}{AI}=\frac{\sin(A+B)}{4R\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\cos\gamma}{2R\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\angle DAI}{AE}+\frac{\sin\angle IAE}{AD}=\frac{\sin\alpha+\sin(\alpha+B)}{AC}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{2R\sin B}=\frac{\cos\gamma}{2R\sin\beta}$$

对 $\triangle ADE$ 运用张角定理的逆定理,知 $D$、$I$、$E$ 三点共线,故 $DE$ 过 $\triangle ABC$ 的内心 $I$.

或者设 $I$ 为内心,由张角定理知只要证明

$$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{AI}=\frac{\sin\alpha}{AE}+\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{AD}=\frac{\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)}{AC}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{AI}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{AC}\Leftrightarrow$$

$$\frac{AI}{AC}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{\cos(90^\circ-\gamma)}{\cos(90^\circ-\alpha-\gamma)}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{\sin\gamma}{\sin[180^\circ-(\alpha+\gamma)]}$$

又在 $\triangle AIC$ 中,显然有

$$\frac{AI}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin[180^\circ-(\alpha+\gamma)]}$$

**证法 8** 如图 27.14,设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,联结 $AI$,延长 $CI$ 交 $AB$ 于 $Q$,设 $DE$ 交 $AC$ 于 $P$.

只要证明 $D$、$I$、$P$ 三点共线,由梅涅劳斯定理知,只要证明

$$\frac{AD}{DQ}\cdot\frac{QI}{IC}\cdot\frac{CP}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{AC}{DQ}\cdot\frac{AQ}{AC}\cdot\frac{CP}{PA}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{PA}{PC}\Leftrightarrow\frac{AQ}{AQ+DQ}=$$

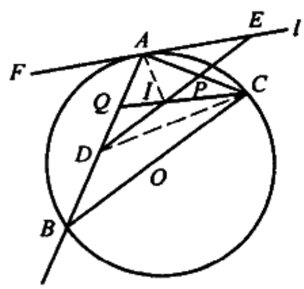



图 27.14

$$\frac{AP}{AP+PC} \Leftrightarrow AQ = AP$$

由
$$\angle ADP = \frac{1}{2}\angle FAD = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ACQ$$

易知
$$\triangle ADP \cong \triangle ACQ(\text{ASA})$$

故
$$AQ = AP$$

**证法 9**　如图 27.15,设 $I$ 为内心,延长 $AI$ 交 $DC$ 于 $K$,延长 $CI$ 交 $AB$ 于 $Q$,设 $DE$ 交 $AC$ 于 $P$,显然 $DK = KC$.只要证 $DP$、$AK$、$CQ$ 三线共点.由塞瓦定理知只要证明

$$\frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AQ}{QD} = \frac{AP}{PC}$$

以下同证 8.

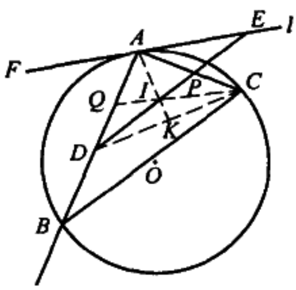



图 27.15

**分析 3**　作 $\angle BAC$ 的平分线交直线 $DE$ 于 $I'$,设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,证 $I$、$I'$ 重合.

角度 1:从角来看,只要证 $\angle ACI = \angle ACI'$;

角度 2:从边来看,只要证 $AI = AI'$.

**证法 10**　易知 $\angle ADI' = \frac{1}{2}\angle FAD = \frac{1}{2}\angle ACB = \gamma$,$\angle DAI' = \alpha$,$\angle IAC = \alpha$,$\angle ACI = \gamma$,在 $\triangle ADI'$ 及 $\triangle ACI$ 中分别用正弦定理知

$$AI' = \frac{AD\sin\gamma}{\sin(180° - \alpha - \gamma)}, AI = \frac{AC\sin\gamma}{\sin(180° - \alpha - \gamma)}$$

故
$$AI' = AI$$

(2) 再证直线通过的一个旁心

**分析 1**　如图 27.16,作 $\angle BAC$ 的平分线,交 $DE$ 于 $I$,交 $FD$ 的延长线于 $I_a$,下证 $I_a$ 为旁心.只要证明:$CI_a$ 平分 $\angle ACB$ 的外角(或者 $BI_a$ 平分 $\angle ABC$ 的外角).

**证法 1**　类似 (1) 中证法 2,由 $\triangle ICI_a \cong \triangle IDI_a$,有 $\angle ICI_a = \angle IDI_a = 90°$.

因为已证 $I$ 为内心,所以 $CI_a$ 平分 $\angle ACB$ 的外角.

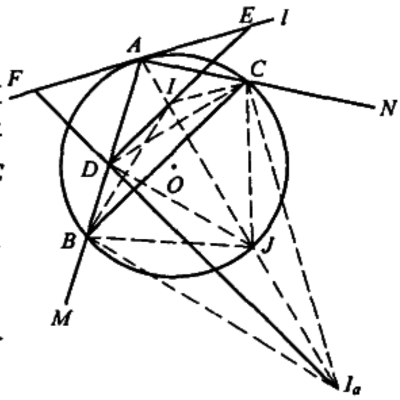



图 27.16

**证法 2** 设 $AI$ 的延长线交圆 $O$ 于点 $J$,则 $JB = JI = JC = JD$,故 $D$、$B$、$C$、$I$ 共圆于圆 $J$.由 $\angle IDI_a = 90^\circ$ 知 $I_a$ 也在圆 $J$ 上,故 $\angle IBI_a = \angle IDI_a = 90^\circ$,所以 $BI_a$ 平分 $\angle ABC$ 的外角.

**证法 3** 同证法 2,可证 $D$、$B$、$C$、$I$、$I_a$ 共圆于圆 $J$,则 $\angle MBI_a = \angle DII_a = \angle CII_a = \angle CBI_a$,故 $BI_a$ 平分 $\angle ABC$ 的外角.

**证法 4** 作 $\angle BAC$ 的平分线交直线 $DF$ 于 $I_a$,易得 $\triangle ADI_a \cong \triangle ACI_a$,所以

$$180^\circ - \angle ACI_a = 180^\circ - \angle ADI_a = \angle ADF = \angle AFD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAF) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB)$$

即 $CI_a$ 是 $\angle ACB$ 的外角平分线,故 $I_a$ 为旁心.

**证法 5** 由 $AD = AC$,$AI_a$ 平分 $\angle DAC$,知 $C$、$D$ 关于 $AI_a$ 对称,从而知



$I_aD = I_aC$.又由 $F$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆,知 $\angle CDI_a = \angle AEC$,即两个等腰三角形 $CI_aD$ 和 $CAE$ 的底角相等,从而 $\angle FI_aC = \angle EAC$,$C$、$A$、$F$、$I_a$ 四点共圆.设 $N$ 为线段 $AC$ 延长线上一点,则

$$\angle I_aCN = \angle AFI_a$$

由

$$\angle FAB = \angle ACB$$

知

$$\angle BAE = \angle BCN$$

而

$$2\angle AFI_a = \angle DAE = \angle BCN$$

即知 $I_aC$ 平分 $\angle BCN$,故直线 $FD$ 过 $\triangle ABC$ 的旁心 $I_a$.

**分析 2** 如图27.16,作 $\angle ACB$ 的外角平分线(或 $\angle ABC$ 的外角平分线)交直线 $FD$ 于 $I_a$,证 $A$、$I$、$I_a$ 三点共线.

角度 1:从角的角度来看,可证明 $\angle CII_a + \angle CIA = 180^\circ$;

角度 2:从边的角度来看,可利用张角定理来证明.

**证法 6** 作 $\angle ACB$ 的外角平分线交直线 $FD$ 于 $I_a$,联结 $CI$、$AI$、$II_a$.因为 $I$ 为内心,所以 $\angle ICI_a = 90^\circ = \angle IDI_a$,故 $C$、$I$、$D$、$I_a$ 四点共圆.故

$$\angle CII_a = \angle CDI_a = 90^\circ - \angle IDC$$

又由(1)中证法 4 知 $D$、$B$、$C$、$I$ 四点共圆.则

$$\angle IDC = \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

即 $$\angle CII_a = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$$

又由内心性质知 $$\angle AIC = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$$

故 $\angle CII_a + \angle CIA = 180°$,所以,$A$、$I$、$I_a$ 三点共线.

**证法7** 同证法6有,$C$、$I$、$D$、$I_a$ 四点共圆,故

$$\angle CI_aI = \angle IDC = \beta, \angle ACI = \gamma$$

由正弦定理知 $$IC = \frac{AC\sin \alpha}{\sin (180° - \alpha - \gamma)} = \frac{AC\sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$CI_a = IC\cot\beta = \frac{AC\sin \alpha}{\sin \beta}$$

由张角定理知,只要证明

$$\frac{\sin (90° + \gamma)}{IC} = \frac{\sin \gamma}{CI_a} + \frac{\sin 90°}{AC} \Leftrightarrow \frac{\cos \gamma\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma\sin \beta}{\sin \alpha + 1} \Leftrightarrow$$

$$\cos (\gamma + \beta) = \sin \alpha$$

这是显然的.



**证法8** 联结 $AI_a$、$BI_a$,则 $2\angle ABI_a = \pi + \angle B$,$2\angle BAI_a = \angle A$,$2\angle AI_aB = 2\pi - \angle A - (\pi + \angle B) = \angle C$.在 $\triangle ABI_a$ 中运用正弦定理,有

$$\frac{2R\sin C}{\sin \angle AI_aB} = \frac{AI_a}{\sin \angle ABI_a}$$

即知 $$AI_a = 4R\cos \beta\cos \gamma$$

设直线 $FD$ 与 $AI_a$ 交于 $I'_a$,联结 $AI'_a$、$I'_aB$.由

$$2\angle AFD = \pi - \angle FAD = \pi - \angle C$$

$$2\angle AI'_aF = 2(\pi - \angle AFD - \angle FAI'_a) =$$

$$2\pi - (\pi - \angle C) - (2\angle C + \angle A) = \angle B$$

在 $\triangle AI'_aF$ 中应用正弦定理,有

$$\frac{AI'_a}{\sin \angle AFD} = \frac{AF}{\sin \angle AI'_aF}$$

即 $$\frac{AI'_a}{\sin (\pi - C)/2} = \frac{2R\sin B}{\sin \beta}$$

亦即 $$AI'_a = 4R\cos \beta\cos \gamma$$

从而 $$AI'_a = AI_a$$

$I'_a$ 与 $I_a$ 重合.故直线 $DF$ 过 $\triangle ABC$ 的旁心 $I_a$.

**分析 3** 设 $I_a$ 为 $\triangle ABC$ 的旁心,只要证 $F$、$D$、$I_a$ 三点共线.

角度 1:从角的角度来看,只要证 $\angle IDF+\angle IDI_a=180°$;

角度 2:从边的角度来看,可利用张角定理等来证.

**证法 9** 设 $I_a$ 为 $\triangle ABC$ 的旁心,联结 $AI_a$ 交 $DE$ 于 $I$,则 $I$ 为内心.

联结 $IC$、$CI_a$,由对称性易知

$$\angle IDI_a=\angle ICI_a=90°$$

又

$$\angle IDF=90°$$

故

$$\angle IDF+\angle IDI_a=180°$$

所以 $F$、$D$、$I_a$ 三点共线.

**证法 10** 同证法 2,可证 $D$、$B$、$C$、$I$、$I_a$ 共圆于圆 $J$,则 $\angle AI_aD=\angle IBD=\beta$. 由正弦定理知

$$AI_a=\frac{AD\sin(180°-\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{AD\cos\gamma}{\sin\beta}$$



又

$$\angle FAD=2\gamma,\angle DAI_a=\alpha$$

由张角定理知,只要证明

$$\frac{\sin(\alpha+2\gamma)}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AF}+\frac{\sin 2\gamma}{AI_a}\Leftrightarrow\frac{\sin(\alpha+2\gamma)}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin 2\gamma\sin\beta}{AD\cos\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\sin(\alpha+2\gamma)-\sin\alpha=2\sin\gamma\sin\beta\Leftrightarrow$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=2\sin\gamma\sin\beta$$

上式显然成立.

或者由证法 8 知

$$AI_a=4R\cos\beta\cos\gamma$$

由于

$$\frac{\sin\angle FAI_a}{AD}-\frac{\sin\angle DAI_a}{AF}=\frac{\sin(\alpha+C)}{AC}-\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{2\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma}{2R\sin B}=$$

$$\frac{\sin\gamma}{2R\cos\beta}=\frac{\sin C}{4R\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin C}{AI_a}$$

即有

$$\frac{\sin\angle FAI_a}{AD}=\frac{\sin\angle DAI_a}{AF}+\frac{\sin\angle FAD}{AI_a}$$

对 $\triangle AFI_a$ 应用张角定理的逆定理,知 $F$、$D$、$I_a$ 三点共线,故直线 $FD$ 经过 $\triangle ABC$ 的旁心 $I_a$.

**证法11** 设$\triangle ABC$在$\angle A$内的旁心为$I_a$.假设$DI_a$交$EF$所在直线于点$F'$，在$\triangle AI_aF'$中应用张角公式有

$$\frac{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{AD}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{AF'}+\frac{\sin C}{AI_a} \tag{③}$$

下面证明

$$\frac{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{AC}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{AC}+\frac{\sin C}{AI_a} \tag{④}$$

$$\text{式④成立}\Leftrightarrow\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{AC}=\frac{\sin C}{AI_a}\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{B}{2}}{AC}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{AI_a}$$

在$\triangle ACI_a$中应用正弦定理,知上式成立,所以,式④成立.

注意到由式③确定的$AF'$是唯一的.

又因为$AD=AC$,则$AF'=AC=AF$,即点$F$与$F'$重合.

故$D$、$F$、$I_a$三点共线,即$DF$通过$\triangle ABC$的一个旁心$I_a$.



**综合证法1** （由西北工业大学李潜给出）如图27.17，记直线$DE$、$DF$分别交$\angle BAC$的平分线于点$I$、$I_a$.联结$CI$、$CD$,作轴反射变换$S(AI_a)$,则$D\to C$.

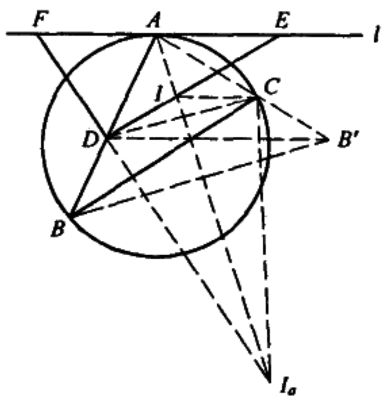



图27.17

令$B\to B'$,则点$B'$在$AC$的延长线上.

联结$B'D$.由于$\angle EAB'=\angle ABC=\angle AB'D$,因此

$$B'D\ /\!/\ EF$$

故
$$\angle ICB=\angle IDB'=\angle AED=\angle ADI=\angle ACI$$

从而,$CI$平分$\angle ACB$,即$I$是$\triangle ABC$的内心.又

$$\angle B'CI_a=\angle BDI_a=\angle ADF=\angle AFD=\angle B'DI_a=\angle BCI_a$$

所以,$CI_a$平分$\angle ACB$的外角.

从而,$I_a$是$\triangle ABC\angle A$内的旁心.

综上所述,结论成立.

**综合证法2** （由南开大学李成章教授给出）

(i) 先证 $DE$ 过 $\triangle ABC$ 的内心.

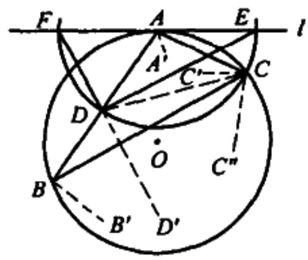


图 27.18

如图 27.18,设 $AA'$ 和 $CC'$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$、$\angle ACB$ 的平分线,联结 $CD$.于是

$$\angle DAA' = \angle A'AC = \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$\angle ACC' = \angle C'CB = \frac{1}{2}\angle ACB$$

因为 $FA$ 为圆 $O$ 的切线,则

$$\angle FAD = \angle ACB$$

因为 $AD = AE$,则

$$\angle ADE = \frac{1}{2}\angle FAD = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ACC'$$

又 $AA'$ 是等腰 $\triangle ADC$ 的顶角平分线,则

$$AA' \perp DC$$

$$\angle ADC = \angle ACD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$



从而
$$\angle EDC = \angle C'CD = \frac{1}{2}\angle ABC$$

故
$$\frac{\sin\angle DAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CD}\cdot\frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle EDA} = 1$$

由角元塞瓦定理的逆定理知 $AA'$、$CC'$、$DE$ 三线共点.因为 $AA'$、$CC'$ 的交点即为 $\triangle ABC$ 的内心,所以,$DE$ 过内心.

(ii) 再证直线 $FD$ 过 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 之外的旁心.设 $BB'$、$CC''$ 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 外角的平分线.于是,有

$$\angle B'BC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB), \angle BCC'' = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$$

因为
$$\angle FAD = \angle ACB$$

所以
$$\angle BDD' = \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$$

故
$$\angle DBB' = \angle ABC + \angle B'BC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$$

因为 $CC'$ 和 $CC''$ 分别为 $\angle ACB$ 及其外角的平分线,所以 $\angle C'CC'' = 90^\circ$.则

$$\angle DCC'' = 90^\circ - \angle DCC' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

故
$$\frac{\sin\angle BDD'}{\sin\angle D'DC}\cdot\frac{\sin\angle DCC''}{\sin\angle C''CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BD} = 1$$

对 $\triangle DBC$ 应用角元塞瓦定理的逆定理便知 $FD'$、$BB'$、$CC''$ 三线共点,即直线 $FD$ 过 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 之外的旁心.

**综合证法 3** (由青岛二中邹明给出) 如图 27.19,以 $A$ 为坐标原点,直线 $l$ 为 $x$ 轴建立直角坐标系.

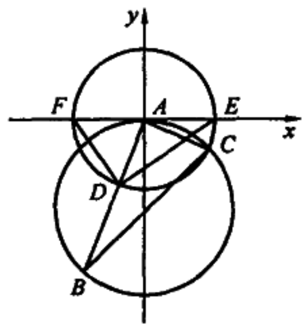


图 27.19

设圆 $A$ 的半径为 1,其方程为

$$x^2+y^2=1 \quad ①$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R$,其方程为

$$x^2+(y+R)^2=R^2, R>0 \quad ②$$

由弦切角的性质有

$C(\cos B, -\sin B), D(-\cos C, -\sin C)$

由方程 ①、② 解得

$$y_C=-\frac{1}{2R}$$

故

$$\frac{1}{2R}=\sin B, 2R=\frac{1}{\sin B}$$

又直线

$$l_{AD}: y=\frac{\sin C}{\cos C}x \quad ③$$

由方程 ②、③ 解得 $B(-\frac{\sin C\cos C}{\sin B}, -\frac{\sin^2 C}{\sin B})$.

设 $AC=b=1, BC=a=2R\sin A=\frac{\sin A}{\sin B}, AB=c=2R\sin C=\frac{\sin C}{\sin B}$,若 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,则

$$aIA+bIB+cIC=0$$

故

$$x_I=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}, y_I=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$$

即

$$x_I=\frac{\sin C\cos B-\cos C\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}, y_I=\frac{-\sin C\sin B-\sin^2 C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

于是

$$EI=(\frac{\sin C\cos B-\cos C\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}-1, \frac{-\sin C(\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C})$$

$$ED=(-(\cos C+1), -\sin C)$$

由于

$$\frac{\sin C\cos B-\cos C\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}-1=-\frac{(\sin B+\sin C)(\cos C+1)}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

所以,$EI$ 与 $ED$ 共线,即点 $I$ 在 $ED$ 上.

又设 $I_A$ 为 $\triangle ABC$ 的一个旁心,则

$$aI_AA - bI_AB - cI_AC = 0$$

故

$$x_{I_A} = \frac{-\sin C\cos C + \sin C\cos B}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

$$y_{I_A} = \frac{-\sin^2 C - \sin C\sin B}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

由 $F(-1,0)$ 可得

$$FD = (1 - \cos C, -\sin C)$$

$$FI_A = (\frac{-\sin C\cos C + \sin C\cos B}{\sin B + \sin C - \sin A} + 1, \frac{-\sin^2 C - \sin C\sin B}{\sin B + \sin C - \sin A}) =$$

$$(\frac{(\sin B + \sin C)(1 - \cos C)}{\sin B + \sin C - \sin A}, \frac{-\sin C(\sin C + \sin B)}{\sin B + \sin C - \sin A})$$

故 $FD$ 与 $FI_A$ 共线,即点 $I_A$ 在 $FD$ 上.

**综合证法 4** (由陕西师大罗增儒教授给出)如图 27.19,以切线为 $x$ 轴、$A$ 为原点建立直角坐标系,记 $AE$ 为单位长度,将已知条件坐标化,有



$$A(0,0), E(1,0), F(-1,0)$$

再由弦切角定理知点 $C$、$D$ 的坐标分别为

$$(\cos B, -\sin B), (-\cos C, -\sin C)$$

这就可以得出直线 $AC$、$AD$、$DE$、$DF$ 的方程分别为

$$x\sin B + y\cos B = 0$$

$$x\sin C - y\cos C = 0$$

$$x\sin\frac{C}{2} - y\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2} = 0$$

$$x\cos\frac{C}{2} + y\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2} = 0$$

进一步,设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,$I_a$ 为 $\triangle ABC$ 的一个旁心,可求出 $\angle BAC$ 的平分线($AI$ 或 $AI_a$)的方程为

$$x\sin(C + \frac{A}{2}) - y\cos(C + \frac{A}{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\cos\frac{C - B}{2} + y\sin\frac{C - B}{2} = 0$$

最后,求出 $\angle ACB$ 内、外角平分线 $CI$、$CI_a$ 的方程为

$$x\sin(B - \frac{C}{2}) + y\cos(B - \frac{C}{2}) + \sin\frac{C}{2} = 0$$

$$x\cos\left(B-\frac{C}{2}\right)-y\sin\left(B-\frac{C}{2}\right)-\cos\frac{C}{2}=0$$

将 $DE$ 与 $CI$ 的方程相加，得

$$x\left[\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\left(B-\frac{C}{2}\right)\right]-y\left[\cos\frac{C}{2}-\cos\left(B-\frac{C}{2}\right)\right]=0$$

即
$$2x\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-B}{2}+2y\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-B}{2}=0$$

得
$$x\cos\frac{C-B}{2}+y\sin\frac{C-B}{2}=0$$

这就是直线 $AI$ 的方程，故 $AI$、$CI$、$DE$ 三线共点于 $I$，即 $DE$ 通过 $\triangle ABC$ 的内心 $I$.

同理，由 $DF$、$CI_a$ 的方程相加也得直线 $AI_a$ 的方程

$$x\cos\frac{C-B}{2}+y\sin\frac{C-B}{2}=0$$

故 $AI_a$、$CI_a$、$DF$ 三线共点于 $I_a$，即 $DF$ 通过 $\triangle ABC$ 的一个旁心 $I_a$.



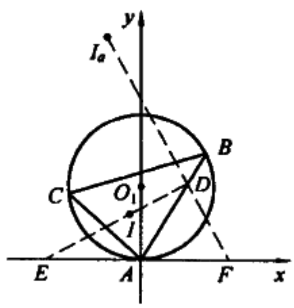


图 27.20

**结合证法 5**　(由哈尔滨三中丁薇给出) 以 $A$ 为原点，$EF$、$AO_1$ 分别为 $x$、$y$ 轴建立直角坐标系 ($O_1$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心)，如图 27.20 所示. 令 $\angle BAO_1=\alpha$，$\angle CAO_1=\beta$，$AO_1=r$，$AE=R$，则

$$AB=c=2r\cos\alpha$$
$$AC=b=R=2r\cos\beta$$
$$BC=a=2r\sin(\alpha+\beta)$$
$$E(-2r\cos\beta,0),F(2r\cos\beta,0),B(2r\cos\alpha\sin\alpha,2r\cos^2\alpha)$$
$$C(-2r\cos\beta\sin\beta,2r\cos^2\beta),D(R\sin\alpha,R\cos\alpha)$$

所以
$$D(2r\cos\beta\sin\alpha,2r\cos\beta\cos\alpha)$$

于是，直线 $DE$、$DF$ 的方程分别为

$$y=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}(x+2r\cos\beta)$$

$$y=-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}(x-2r\cos\beta)$$

$\triangle ABC$ 的内心、旁心分别为

$$I\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

$$I_A\left(\frac{-ax_A+bx_B+cx_C}{-a+b+c},\frac{-ay_A+by_B+cy_C}{-a+b+c}\right)$$

故
$$x_I=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},y_I=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$x_{I_A}=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},y_{I_A}=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(i) 证明 $DE$ 过点 $I$.

$DE$ 过点 $I\Leftrightarrow y_1=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}(x_I+2r\cos\beta)\Leftrightarrow$

$$\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\left(\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+2r\cos\beta\right)\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(1+\sin\alpha)=\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

最后一式显然成立.所以,$DE$ 过点 $I$.

(ii) 证明 $DF$ 过点 $I_a$.

$DF$ 过点 $I_a\Leftrightarrow y_{I_a}=-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}(x_{I_a}-2r\cos\beta)\Leftrightarrow$

$$\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\left(\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}-2r\cos\beta\right)\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha-1)=\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

最后一式显然成立.所以,$DF$ 过点 $I_a$.

综合(i)、(ii)知,$DE$ 过点 $I$,$DF$ 过点 $I_a$.

**试题 B**　在 Rt△$ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,△$ABC$ 的内切圆圆 $O$ 分别与边 $BC$、$CA$、$AB$ 相切于点 $D$、$E$、$F$,联结 $AD$,与内切圆圆 $O$ 相交于点 $P$,联结 $BP$、$CP$.若 $\angle BPC=90°$,求证:$AE+AP=PD$.

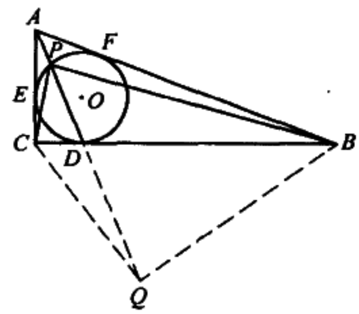


图 27.21

**证明**　设 $AE=AF=x$,$BD=BF=y$,$CD=CE=z$,$AP=m$,$PD=n$.

因为 $\angle ACP+\angle PCB=90°=\angle PBC+\angle PCB$,所以,$\angle ACP=\angle PBC$.

如图 27.21,延长 $AD$ 至 $Q$,使得 $\angle AQC=\angle ACP=\angle PBC$,联结 $BQ$、$CQ$.则 $P$、$B$、$Q$、$C$ 四点共圆.令 $DQ=l$,由相交弦定理和切割线定理可得

$$yz=nl \tag{①}$$

$$x^2=m(m+n) \tag{②}$$

因为 △$ACP$ ∽ △$AQC$,所以$\frac{AC}{AQ}=\frac{AP}{AC}$.故

$$(x+z)^2=m(m+n+l) \tag{③}$$

在 Rt△$ACD$ 和 Rt△$ACB$ 中,由勾股定理得

$$(x+z)^2+z^2=(m+n)^2 \tag{④}$$

$$(y+z)^2+(z+x)^2=(x+y)^2 \tag{⑤}$$

③ - ②,得

$$z^2+2zx=ml \tag{⑥}$$

① ÷ ⑥,得$\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{n}{m}$,所以

$$1+\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{m+n}{m} \tag{⑦}$$

② × ⑦,结合式 ④ 得

$$x^2+\frac{x^2yz}{z^2+2zx}=(m+n)^2=(x+z)^2+z^2$$

整理得

$$\frac{x^2y}{z+2x}=2z(x+z) \tag{8}$$

而式⑤可写为

$$x+z=\frac{2xy}{y+z} \tag{9}$$

由式⑧、⑨得

$$\frac{x}{z+2x}=\frac{4z}{y+z} \tag{10}$$

又式⑤还可写为

$$y+z=\frac{2xz}{x-z} \tag{11}$$

把上式代入⑩,消去 $y+z$ 得

$$3x^2-2xz-2z^2=0$$

解得 $$x=\frac{\sqrt{7}+1}{3}z$$



代入式⑪得 $$y=(2\sqrt{7}+5)z$$

将上面的 $x$ 代入式④得

$$m+n=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}z$$

结合式②得 $$m=\frac{x^2}{m+n}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}z$$

从而 $$n=\frac{\sqrt{7}+1}{2}z$$

所以,$x+m=n$,即 $AE+AP=PD$.

**注** 该试题,叶中豪与吕峰波探讨了其推广,可将 Rt△$ABC$ 推广为任意三角形①.

**推广命题** 在△$ABC$ 中,设内切圆⊙$O$ 分别与边 $BC$、$CA$、$AB$ 相切于点 $D$、$E$、$F$,联结 $AD$,与内切圆⊙$O$ 相交于点 $P$,联结 $BP$、$CP$,则 $\angle BPC=90°$ 的充要条件是 $AE+AP=PD$.

为了证明该命题,先介绍一条引理.

**引理** 自⊙$O$ 外一点 $A$ 作⊙$O$ 的切线 $AE$ 及割线 $APD$($AP<AD$),则关系式 $AE+AP=PD$ 成立的充要条件是 $AP:AE:AD=1:2:4$.

事实上,如图 27.22 所示,由切割线定理得

① 叶中豪,吕峰波.一道冬令营试题的推广[J].中等数学,2006(10):21-22.

$$AE^2 = AP \cdot AD$$

即 $$(AD - 2AP)^2 = AP \cdot AD$$

展开化简得

$$\left(\frac{AD}{AP}\right)^2 - 5\left(\frac{AD}{AP}\right) + 4 = 0$$

解得$\frac{AD}{AP} = 4$，$\frac{AD}{AP} = 1$(舍去).

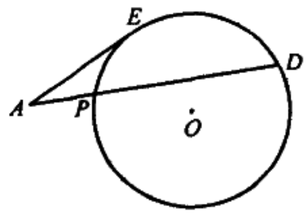



图 27.22

于是 $AD = 4AP$ 进而知 $AE = 2AP$.

反之亦然.

下面证明推广命题.

充分性：为使 $AE + AP = PD$ 成立，根据上面的引理，必须满足 $AP : PD = 1 : 3$.

对 $\triangle ACD$ 应用斯特瓦尔特定理(第1章第1节定理4)，得

$$CP^2 = \frac{3}{4}AC^2 + \frac{1}{4}CD^2 - AP \cdot PD \qquad (*)$$

注意到 $AP = \frac{1}{3}PD$，$AC = AE + CD = \frac{2}{3}PD + CD$.

代入式(*)并化简得

$$CP^2 = CD^2 + CD \cdot PD$$

在 $\triangle PDC$ 中，由第7章第2节倍角三角形结论，有

$$\angle PDC = 2\angle DPC \qquad ①$$

同理，在 $\triangle PDB$ 中，有

$$\angle PDB = 2\angle DPB \qquad ②$$

由①、②得

$$\angle BPC = \angle DPB + \angle DPC = \frac{1}{2}(\angle PDB + \angle PDC) = 90^\circ$$

必要性：如图27.23所示，过点 $P$ 作 $\odot O$ 的切线交 $AB$ 于 $N$、交 $AC$ 于 $M$，交 $BC$ 的延长线于 $G$.

联结 $BM$、$CN$，则由第26章第1节中例4的结论(1)，对完全四边形 $BCGMAN$，有 $AD$、$BM$、$CN$ 三线共点于 $Q$. 从而，对完全四边形 $ANBQCM$，应用对角线调和分割性质(第1章第3节中性质4)知 $B$、$C$、$D$、$G$ 四点构成调和点

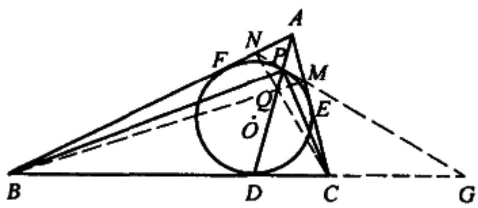



图 27.23

列.由此知 $PB$、$PC$、$PD$、$PG$ 四直线构成调和线束.

又根据调和线束的性质:若调和线束中有两条直线互相垂直,则它们必平分另外两条直线所构成的角.(其证明可参见:单墫,等著.《初等数学论丛(第1辑)》.上海:上海教育出版社,1980.)

因 $\angle BPC = 90°$,故知 $PC$ 必平分 $\angle DPG$.

于是,$\angle PDC = \angle DPC = 2\angle DPC$.

再由充分性的证明,即可逆推得到 $AE + AP = PD$.

**试题 C1** 设 $H$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心,$D$、$E$、$F$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上三点使得 $AD /\!/ BE /\!/ CF$,$S$、$T$、$U$ 分别为 $D$、$E$、$F$ 关于边 $BC$、$CA$、$AB$ 的对称点.求证:$S$、$T$、$U$、$H$ 四点共圆.

**证明** 先证明引理:如图27.24所示,设 $O$、$H$ 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心,$P$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点,$P$ 关于 $BC$ 的中点的对称点为 $Q$,则 $QH$ 的垂直平分线与直线 $AP$ 关于 $OH$ 的中点对称.

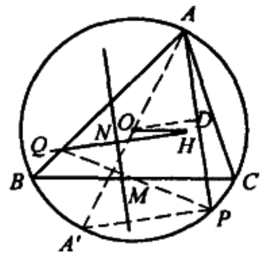


图 27.24



事实上,过 $A$ 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 $AA'$,则 $A'$ 与 $\triangle ABC$ 的垂心 $H$ 也关于 $BC$ 的中点对称,所以 $QH \underline{/\!/} A'P$.又 $A'P \perp AP$,因此,$QH \perp AP$.设 $D$、$N$ 分别为 $AP$、$QH$ 的中点,则 $A'P = 2OD$,$QH = 2NH$,于是 $OD \underline{/\!/} NH$.而 $AP \perp OD$,故 $QH$ 的垂直平分线与直线 $AP$ 关于 $OH$ 的中点对称.

再证原题,如图27.25所示,过点 $D$ 作 $BC$ 的平行线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 $P$.由 $AD /\!/ BE /\!/ CF$ 易知 $PE /\!/ CA$,$PF /\!/ AB$.因 $PD /\!/ BC$,$S$ 是点 $D$ 关于 $BC$ 的对称点,所以,点 $P$ 关于 $BC$ 的中点的对称点是 $S$.于是,设 $\triangle ABC$ 的外心为 $O$,$OH$ 的中点为 $M$,由引理,直线 $AP$ 关于点 $M$ 的对称直线是 $HS$ 的垂直平分线;同理,直线 $BP$、$CP$ 关于点 $M$ 的对称直线分别是 $HT$ 的垂直平分线和 $HU$ 的垂直平分线.而 $AP$、$BP$、$CP$ 有公共点 $P$,因此 $HS$、$HT$、$HU$ 这三条线段的三条垂直平分线交于一点.故 $S$、$T$、$U$、$H$ 四点共圆.

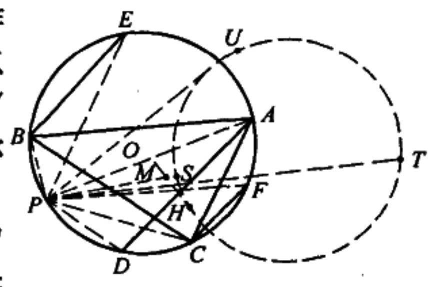


图 27.25

**试题 C2** 已知 $\triangle ABC$ 覆盖凸多边形 $M$.证明:存在一个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形,能够覆盖 $M$,并且它的一条边所在的直线与 $M$ 的一条边所在的直线平行或者重合.

**证明** 首先我们不妨设 $M$ 有三个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上或 $M$ 有一个顶点与 $\triangle ABC$ 的某顶点重合(比如 $B$),$M$ 的另一顶点位于点 $A$ 的对边上. 如图 27.26,27.27 所示.

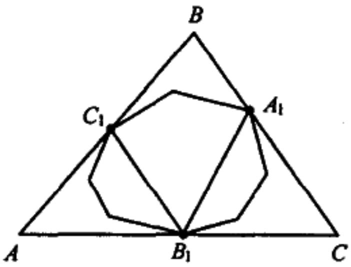


图 27.26

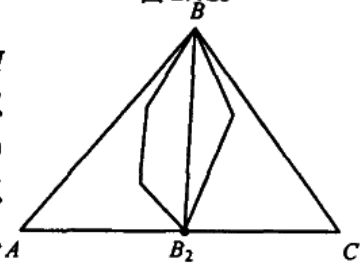


图 27.27

设初始状态下 $\angle AC_1B_1=\theta_0$,我们分别将 $M$ 绕 $C_1$ 顺时针和逆时针旋转. 以顺时针转 $\delta_1$ 时 $M$ 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行,逆时针转 $\delta_2$ 时 $M$ 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行. 对 $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,$\theta_1=\theta_0-\delta_1$,$\theta_2=\theta_0+\delta_2$,设 $M$ 首先绕 $C_1$ 旋转到相应的 $\theta$ 角度,然后再分别作以 $A$ 和 $B$ 为中心的位似变换,使得 $M$ 的像(记为 $M_\theta$)的相应的两顶点重新分别位于 $AC$ 和 $BC$ 上. 以 $C_1B_1=mf(\theta)$,$A_1B_1=nf(\theta)$,$f(\theta_0)=1$,其中 $m$、$n$ 分别是初始状态下相应的距离. 令 $\varphi=\angle B+\angle C_1B_1A_1$(为定值),则

$$AC=AB_1+B_1C=\frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin A}+\frac{nf(\theta)}{\sin C}\sin(\varphi-\theta)$$

故
$$f(\theta)=\frac{AC\sin A\sin C}{m\sin\theta\sin C+n\sin(\varphi-\theta)\sin A}=\frac{AC\sin A\sin C}{a\sin(\theta+\varphi_1)}$$

其中,$a$、$\varphi_1$ 为常数. 由于 $\sin(\theta+\varphi_1)$ 为上凸函数,故其必然在端点达到最小值. 故 $\max\{f(\theta_1),f(\theta_2)\}\geqslant f(\theta_0)=1$,故 $M_{\theta_1}$ 或 $M_{\theta_2}$ 与 $M$ 相似比例常数不小于 1,并且位于 $\triangle ABC$ 中.

对于第二种情况可以类似讨论. 设

$$BB_2=mf(\theta),f(\theta_0)=1,AB_2=\frac{BB_2}{\sin A}\sin\theta$$

$$CB_2=\frac{BB_2}{\sin C}\sin(B-\theta)$$

从而
$$AC=\frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin A}+\frac{mf(\theta)}{\sin C}\sin(B-\theta)=\frac{f(\theta)a\sin(\theta+\varphi_1)}{\sin A\sin C}$$

故
$$f(\theta)=\frac{AC\sin A\sin C}{a\sin(\theta+\varphi_1)}$$

结论一样.

## 第1节 一道东南赛试题的背景与引申

本年度的东南赛中的一道平面几何题实际上第35届IMO预选题的改述形式.

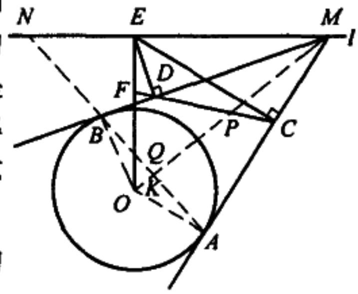


图27.28

如图27.28,一条直线 $l$ 与圆心为 $O$ 的圆不相交,$E$ 是 $l$ 上一点,$OE\perp l$,$M$ 是 $l$ 上任意异于 $E$ 的点,从 $M$ 作圆的两条切线分别切圆于 $A$ 和 $B$,$C$ 是 $MA$ 上的点,使得 $EC\perp MA$,$D$ 是 $MB$ 上的点,使得 $ED\perp MB$,直线 $CD$ 交 $OE$ 于 $F$,求证:$F$ 的位置不依赖于 $M$ 的位置.

为了讨论问题的方便,先给出这道预选题的三角证法,然后把它进行引申.①

设 $EM=x$,$OE=a$,圆半径为 $R$,联结 $OM$,并设 $\angle OMB=\beta$,$\angle OME=\alpha$,如图27.28所示,则 $\angle OMA=\beta$,由条件知 $E$、$D$、$C$、$M$ 四点共圆,所以



$$\angle EDF=\angle EMC=\alpha+\beta \quad ①$$

$$\angle FED=90^\circ-\angle DEM=90^\circ-(90^\circ-\angle DME)=\angle DME=\alpha-\beta$$

$$\angle EFD=180^\circ-\angle EDF-\angle EFD=$$

$$180^\circ-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=180^\circ-2\alpha \quad ②$$

$$ED=EM\sin\angle DME=x\sin(\alpha-\beta)$$

在 $\triangle EDF$ 中运用正弦定理得

$$\frac{EF}{\sin\angle EDF}=\frac{ED}{\sin\angle EFD}$$

则
$$EF=ED\cdot\frac{\sin\angle EDF}{\sin\angle EFD}$$

即
$$EF=\frac{x\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{x\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad ③$$

由
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)(\text{积化和差})=$$

$$-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha-1+2\sin^2\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

① 胡耀宗.一道竞赛题的简证与引伸[J].中学教研(数学),1995(9):28-30.

有
$$EF=\frac{x(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad ④$$

又
$$\sin\alpha=\frac{OE}{OM}=\frac{a}{OM},\cos\alpha=\frac{EM}{OM}=\frac{x}{OM},\sin\beta=\frac{OB}{OM}=\frac{R}{OM}$$

代入④得
$$EF=\frac{x[(\frac{a}{OM})^2-(\frac{R}{OM})^2]}{\frac{a}{OM}\cdot\frac{x}{OM}}=\frac{a^2-R^2}{2a}(\text{定值})$$

即 $F$ 为定点，它的位置不依赖于点 $M$ 位置.

**引申问题 1** （条件不变，引申结论）

一直线 $l$ 与圆心为 $O$ 的圆不相交，$OE\perp l$，$E$ 为垂足，$M$ 是 $l$ 上任意异于 $E$ 的点，从 $M$ 作圆的两条切线分别切圆于 $A$ 和 $B$. $C$ 是 $MA$ 上的点，使得 $EC\perp MA$，$D$ 是 $MB$ 上的点，使得 $ED\perp MB$，直线 $CD$ 交 $OE$ 于 $F$. 求证：

(1) 若 $CD$ 与 $OM$ 相交于 $P$，则线段 $PF$ 之长不依赖于点 $M$ 的位置.

(2) 若 $AB$ 与 $OE$ 相交于 $Q$，则点 $Q$ 的位置不依赖于点 $M$ 的位置.

(3) 若 $AB$ 与 $l$ 相交于 $N$，则线段 $EN$ 与 $EM$ 的乘积不依赖于点 $M$ 的位置.

**证明** (1) 在预选题的证明过程中，知



$$\angle EFD=180^\circ-2\alpha$$

所以
$$\angle OFP=2\alpha,\angle FOP=\angle EOM=90^\circ-\alpha$$

在 $\triangle OFP$ 中
$$\angle FPO=180^\circ-2\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ-\alpha$$

则
$$\angle FOP=\angle FPO$$

即
$$FP=FO$$

又
$$EF=\frac{a^2-R^2}{2a}(\text{已证})$$

$$FO=OE-EF=a-\frac{a^2-R^2}{2a}=\frac{a^2+R^2}{2a}$$

故
$$FP=FO=\frac{a^2+R^2}{2a}(\text{定值})$$

故线段 $PF$ 之长不依赖于点 $M$ 的位置.

(2) 联结 $OA$、$OB$，因 $O$、$A$、$M$、$B$ 四点共圆有
$$\angle OAQ=\angle OMB=\beta$$

又
$$OM\perp AB$$

$$\angle OQA=90^\circ-\angle QOK=90^\circ-\angle EOM=\alpha$$

（其中 $K$ 为 $OM$ 与 $AB$ 交点，如图 27.28 所示）

在 $\triangle OAQ$ 中运用正弦定理得

$$\frac{OQ}{\sin\angle OAQ}=\frac{OA}{\sin\angle OQA}$$

即
$$\frac{OQ}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\alpha}$$

故
$$OQ=R\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=R\frac{\frac{R}{OM}}{\frac{a}{OM}}=\frac{R^2}{a}(\text{定值})$$

故点 $Q$ 位置不依赖于点 $M$ 的位置.

(3) 在(2)的证明过程中知 $\angle OQA=\alpha$,所以

$$\angle EQN=\angle OQA=\alpha,\text{Rt}\triangle QEN\backsim\text{Rt}\triangle MEO$$

则
$$\frac{EN}{OE}=\frac{EQ}{EM}$$

即
$$EN\cdot EM=OE\cdot EQ$$

从而
$$EQ=OE-OQ$$



而
$$OE=a,OQ=\frac{R^2}{a}(\text{已证})$$

则 $EN\cdot EM=OE\cdot EQ=OE(OE-OQ)=a(a-\frac{R^2}{a})=a^2-R^2$

故线段 $EN$ 与 $EM$ 的乘积不依赖于点 $M$ 的位置.

**引申问题2** (引申条件,结论不变)

如图27.29,设直线 $l$ 与圆 $O$ 相交且不过圆心 $O$,$OE\perp l$,$E$ 为垂足,$M$ 是 $l$ 上圆外部分的任意一点,从 $M$ 引圆的两条切线,切点分别为 $A$ 和 $B$,$EC\perp MA$,$C$ 为垂足,$ED\perp MB$,$D$ 为垂足,直线 $CD$ 交 $OE$ 所在直线于 $F$,则 $F$ 的位置不依赖于 $M$ 的位置.

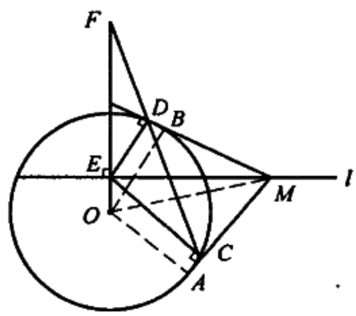


图 27.29

**证明** 联结 $OM$,设

$$\angle OMB=\beta,\angle OME=\alpha$$

则 $\angle OMA=\beta$,又设 $OE=a$,$EM=x$,圆半径为 $R$,由已行条件知 $E$、$D$、$M$、$C$ 四点共圆,所以

$$\angle DEC=\angle EMC=\alpha+\beta$$

$$\angle EDF=180^\circ-\angle EDC=180^\circ-(\alpha+\beta) \quad ①$$

$$\angle DEF=90^\circ-\angle DEM=\angle DME=\beta-\alpha \quad ②$$

由①与②得 $\angle F = 180° - \angle EDF - \angle DEF = 2\alpha$

在 $\triangle DEF$ 中运用正弦定理,有

$$\frac{EF}{\sin \angle EDF} = \frac{DE}{\sin F}$$

即

$$\frac{EF}{\sin (180° - (\alpha + \beta))} = \frac{DE}{\sin 2\alpha}$$

则

$$EF = DE \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha}$$

但

$$DE = EM\sin \angle DME = x\sin (\beta - \alpha)$$

则

$$EF = \frac{x\sin (\alpha + \beta)\sin (\beta - \alpha)}{2\sin \alpha\cos \alpha} \cdot \sin (\alpha + \beta)\sin (\beta - \alpha) =$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\alpha) =$$

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha \qquad ③$$

即

$$EF = \frac{x(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}{2\sin \alpha\cos \alpha} \qquad ④$$



联结 $OB$ 有

$$\sin \beta = \frac{OB}{OM} = \frac{R}{OM}, \sin \alpha = \frac{OE}{OM} = \frac{a}{OM}, \cos \alpha = \frac{EM}{OM} = \frac{x}{OM}$$

代入④解得 $EF = \frac{R^2 - a^2}{2a}$(定值)

即 $F$ 的位置不依赖于点 $M$ 的位置.

## 第 2 节 三角形的外接正方形问题[①]

**定义** 如果一个三角形的三个顶点都落在一个正方形的边上,则称该正方形为该三角形的一个外接正方形.

***1. 任意三角形外接正方形的一般作法***

假设任意 $\triangle ABC$,如图 27.30 所示.

**作法** 1) 以 $\triangle ABC$ 的任一边为直径(假设 $AB$ 边),向 $\triangle ABC$ 外侧画半圆.

2) 过点 $A$ 作 $AM \perp AC$,得一段圆弧 $\overset{\frown}{AM}$;同理作 $BN \perp BC$,得一段圆弧 $\overset{\frown}{BN}$.

3) 若 $\overset{\frown}{AM} \cap \overset{\frown}{BN}$ 为非空集时,在 $\overset{\frown}{MN}$ 上任取一点 $D$,联结 $DA$、$DB$ 并延长.

① 史嘉.三角形的外接正方形[J].中学数学,2005(2):47-48.

4) 过点 $C$ 分别作 $CE \perp BD$、$CF \perp DA$,垂足分别为 $E$、$F$.

5) 以点 $D$ 为圆心,以 $|DF|$(即 $|DE|$、$|DF|$ 中较长者)为半径画圆弧,交 $DB$ 于 $G$,过 $G$ 作 $GH \parallel DF$ 交 $CF$ 于点 $H$,则四边形 $DGHF$ 即为 $\triangle ABC$ 的外接正方形.

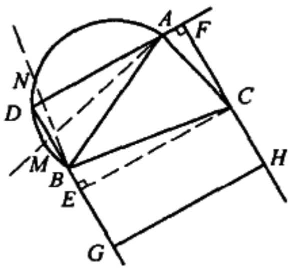



图 27.30

**证明** 根据作法知

$$DA \perp DB、DF = DG$$

且 $$DG \parallel HF、GH \parallel DF$$

易知四边形 $DGHF$ 为 $\triangle ABC$ 的外接正方形.

2. 三角形外接正方形的边长最值

下面将按三角形的种类就正方形边长的最值及其相应的位置进行分析.

(1) 三角形为直角三角形

不妨设 $c$ 为斜边长,且 $a \leqslant b < c$.



(i) 三角形的三边都不与正方形的任何一边重合.

(ii) 三角形有一边与正方形的一边重合.

(iii) 三角形有两边与正方形的两边重合.

**最值分析**

(i) 外接正方形的边长最大值为 Rt$\triangle ABC$ 的斜边长,$l = c$.

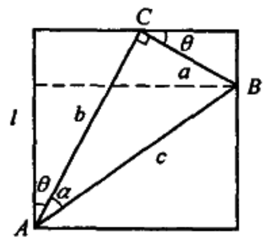



图 27.31

旋转正方形知,只有 Rt$\triangle ABC$ 的最小角的顶点与正方形的一个顶点重合时,外接正方形边长才能取到最小值,如图 27.31 所示,$l = b\cos\theta$,此时,$b\cos\theta = b\sin\theta + a\sin\theta$,则 $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b}(b \geqslant a)$.

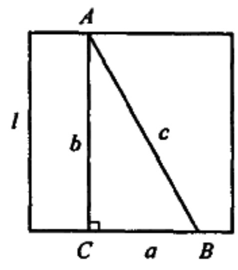



图 27.32

(ii) 只有 Rt$\triangle ABC$ 的边 $BC$ 与正方形的一边重合这一种情况,如图 27.32 所示,$l = b$.

(iii) 如图 27.33,Rt$\triangle ABC$ 的外接正方形边长最小值为 $l = b$;无最大值.

(2) 三角形为锐角三角形

不妨设三角形三边长的关系为 $a \leqslant b \leqslant c$.

(i) 三角形的三边都不与正方形的任一边重合;

(ii) 三角形有一边与正方形的一边重合.

**最值分析**

(i) 正方形边长的最大值为 $l = c$;

正方形边长的最小值情况同(1) 中的(i), 如图 27.36 所示, $l = b\cos\theta$, 此时

$$b\cos\theta = c\sin(\theta + \alpha)$$

即

$$\tan\theta = \frac{b - c\sin\alpha}{c\cos\alpha}$$

(ii) 正方形边长的最大值为 $l = c$.

旋转正方形知, 只有当三角形的最小边与正方形重合时, 正方形的边长可取到最小. 如图 27.35 所示, 根据三角形面积公式

$$\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

即

$$l = \frac{bc\sin\alpha}{a}$$

(3) 三角形为钝角三角形

不妨设 $\angle C$ 为钝角, 且 $a \leqslant b < c$.

(i) 三角形的三边都不与正方形的任一边重合.

(ii) 三角形有一边与正方形的一边重合.

**最值分析**

(i) 正方形的边长最大值为 $l = c$.

正方形的边长取最小值情况同(1) 中的(i), 如图 27.36 所示, $l = b\cos\theta$, 此时

$$\tan\theta = \frac{b - c\sin\alpha}{c\cos\alpha}$$

(ii) 正方形的边长无最大值, 如图 27.37 所示.

如图 27.38, 因为 $a \leqslant b$, 设 $\alpha \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$, 根据余弦

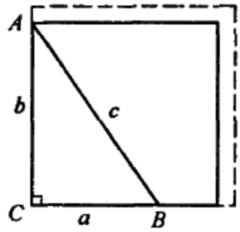


图 27.33

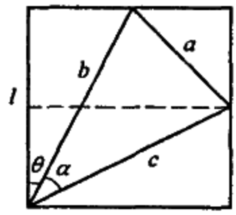


图 27.34

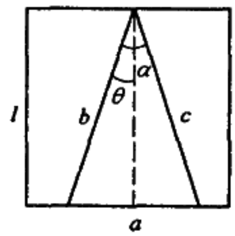


图 27.35

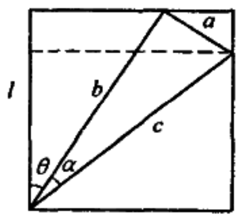


图 27.36

函数在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的单调性可知,$c\cos\alpha \geqslant c\cos\beta$.即三角形的最小边与正方形的一边重合时外接正方形的边长取到最小值,$l = c\cos\beta$.

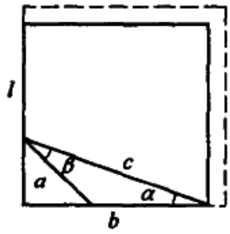



图 27.37

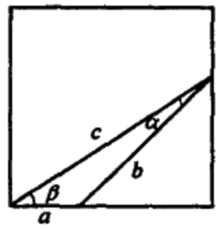



图 27.38

综上分析可以得出如下结论.

对任意$\triangle ABC$,三边长的关系为$a \leqslant b \leqslant c$,则$\triangle ABC$的外接正方形边长最小值为$l = b\cos\theta$.其中$\tan\theta = \frac{b - c\sin A}{c\cos A}$.$\theta$为边$b$与正方形边$l$所夹角的最小角.

# 第 28 章　2006 ~ 2007 年度部分试题的诠释

**东南赛试题 1**　如图 28.1,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC = 90°$,$D$、$G$ 是边 $CA$ 上的两点,联结 $BD$、$BG$.过点 $A$、$G$ 分别作 $BD$ 的垂线,垂足分别为 $E$、$F$,联结 $CF$.若 $BE = EF$,求证:$\angle ABG = \angle DFC$.

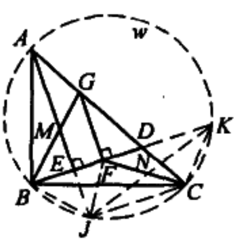



图 28.1

**证明**　作 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆 $w$,延长 $BD$、$AE$ 分别交 $w$ 于 $K$、$J$.联结 $BJ$、$CJ$、$KJ$、$FJ$.易知 $\angle BAJ = \angle KBC$,故 $BJ = KC$.

于是四边形 $BJCK$ 是等腰梯形,又 $AJ$ 垂直平分 $BF$,故 $BJ = FJ$,故四边形 $FJCK$ 是平行四边形.

设 $AE$ 与 $BG$ 的交点为 $M$,$FC$ 与 $JK$ 的交点为 $N$,则 $M$、$N$ 分别是 $BG$ 和 $FC$ 的中点,于是

$$\frac{AB}{AG} = \frac{\sin \angle MAG}{\sin \angle BAM} = \frac{\sin \angle JKC}{\sin \angle BKJ} = \frac{FK}{CK}$$

又 $\angle BAG = \angle FKC$,于是 $\triangle BAG \backsim \triangle FKC$,所以 $\angle ABG = \angle DFC$.

**东南赛试题 2**　如图 28.2,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 60°$,$\triangle ABC$ 的内切圆 $I$ 分别切边 $AB$、$AC$ 于点 $D$、$E$,直线 $DE$ 分别与直线 $BI$、$CI$ 相交于点 $F$、$G$,证明:$FG = \frac{1}{2}BC$.

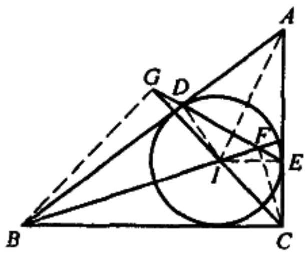



图 28.2

**证法 1**　分别联结 $CF$、$BG$、$ID$、$IE$、$AI$,则 $A$、$D$、$I$、$E$ 四点共圆.所以 $\angle IDE = \frac{1}{2}\angle A$,从而

$$\angle BDF = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

又
$$\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

所以 $\angle BDF = \angle BIC$,又 $\angle DBF = \angle CBI$,得 $\triangle FDB \backsim \triangle CIB$,所以

$$\frac{FB}{CB}=\frac{DB}{IB}$$

又由 $\angle DBI=\angle FBC$,得 $\triangle IDB\backsim\triangle CFB$,所以

$$CF\perp BF$$

从而

$$\angle FCG=\frac{1}{2}\angle A=30^\circ$$

同理 $BG\perp GC$,所以 $B$、$C$、$F$、$G$ 四点共圆,由此 $\frac{FG}{\sin\angle FCG}=BC$,所以

$$FG=\frac{1}{2}BC$$

**证法 2** 因为

$$\angle BIG=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

又因为

$$\angle BDG=\angle ADE=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$



所以 $B$、$D$、$I$、$G$ 四点共圆,因此

$$\angle BGC=\angle BDI=90^\circ$$

同理 $\angle CFB=90^\circ$,所以 $B$、$C$、$F$、$G$ 四点共圆.又

$$\angle FCG=90^\circ-\angle FBC-\angle BCI=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=30^\circ$$

所以

$$FG=BC\sin\angle FCG=\frac{1}{2}BC$$

**女子赛试题** 设凸四边形 $ABCD$ 对角线交于点 $O$. $\triangle OAD$、$\triangle OBC$ 的外接圆交于 $O$、$M$ 两点,直线 $OM$ 分别交 $\triangle OAB$、$\triangle OCD$ 的外接圆于 $T$、$S$ 两点.求证:$M$ 是线段 $TS$ 的中点.

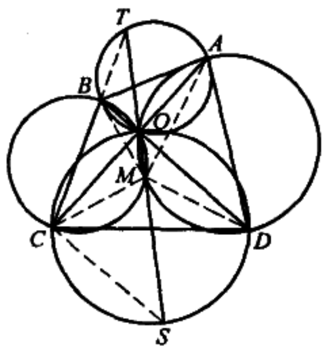


图 28.3

**证法 1** 如图 28.3. 联结 $BT$、$CS$、$MA$、$MB$、$MC$、$MD$. 由

$$\angle BTO=\angle BAO,\angle BCO=\angle BMO$$

知 $\triangle BTM\backsim\triangle BAC$,得

$$\frac{TM}{AC}=\frac{BM}{BC} \quad ①$$

同理,$\triangle CMS\backsim\triangle CBD$,得

$$\frac{MS}{BD}=\frac{CM}{BC} \quad ②$$

①÷②得

$$\frac{TM}{MS}=\frac{BM}{CM}\cdot\frac{AC}{BD} \qquad ③$$

又因 $\angle MBD=\angle MCA$，$\angle MDB=\angle MAC$，则 $\triangle MBD\backsim\triangle MCA$，得

$$\frac{BM}{CM}=\frac{BD}{AC} \qquad ④$$

将④代入③，即得 $TM=MS$.

**证法 2**　如图 28.4. 设 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODA$ 的外心分别为 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$，自 $O_1$、$O_3$ 作 $TS$ 的垂线，垂足分别为 $E$、$F$. 联结 $O_2$、$O_4$ 交 $TS$ 于 $G$.

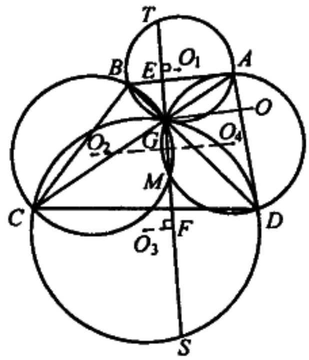


图 28.4

因 $OM$ 是圆 $O_2$ 和圆 $O_4$ 的公共弦，故 $O_2O_4$ 垂直平分 $OM$，即 $G$ 是线段 $OM$ 的中点.

同样，$O_1O_4$ 垂直平分 $OA$，$O_2O_3$ 垂直平分 $OC$，得 $O_1O_4\parallel O_2O_3$；同理 $O_1O_2\parallel O_3O_4$. 因此 $O_1O_2O_3O_4$ 构成平行四边形，其对角线互相平分. 由此易知 $EG=FG$.

又由垂径定理，$E$ 是 $TO$ 中点，$F$ 是 $OS$ 中点. 因此

$$TM=TO+OM=2EO+2OG=2EG \qquad ①$$

$$MS=OS-OM=2OF-2OG=2GF \qquad ②$$

由①、②即知 $TM=MS$.

**北方赛试题 1**　如图 28.5，$AB$ 是圆 $O$ 的直径，非直径弦 $CD\perp AB$，$E$ 是 $OC$ 中点，联结 $AE$ 并延长交圆 $O$ 于 $P$，联结 $DP$ 交 $BC$ 于 $F$. 求证：$F$ 是 $BC$ 的中点.

**证明**　（由湖南师大邹宇给出）如图 28.5，联结 $CP$、$EF$. 因 $AB$ 为直径，$CD\perp AB$，则 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，从而

$$\angle APD=\angle ABC$$

又

$$OC=OB$$

则

$$\angle OCB=\angle OBC=\angle ABC=\angle APD$$

即

$$\angle ECF=\angle EPF$$

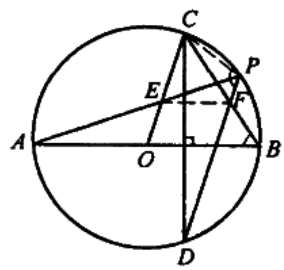


图 28.5

于是，$C$、$E$、$F$、$P$ 四点共圆. 从而

$$\angle EFC=\angle EPC=\angle APC=\angle ABC$$

即有

$$EF\parallel OB$$

而 $E$ 是 $OC$ 的中点,故 $F$ 是 $BC$ 的中点.

**北方赛试题2** 如图28.6,已知 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的高,且 $BC + AD = AB + AC$.求 $\angle A$ 的取值范围.

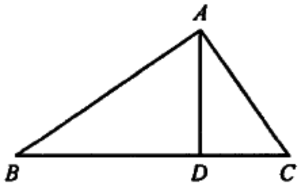


图28.6

**解** (由羊明亮给出)设 $a$、$b$、$c$ 为 $\triangle ABC$ 的三边 $BC$、$CA$、$AB$ 的长,对 $BC + AD = AB + AC$ 应用三角函数知识,有

$$a + c\sin B = c + b$$

再应用正弦定理,有

$$\sin A + \sin B\sin C = \sin B + \sin C$$

亦有

$$\sin A + \cos^2\frac{B-C}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

令 $\cos\frac{B-C}{2} = t$,则 $t \in (0,1]$,且上式变为

$$t^2 - 2\cos\frac{A}{2}\cdot t + \sin A - \sin^2\frac{A}{2} = 0$$



由 $f(t) = t^2 - 2\cos\frac{A}{2}\cdot t + \sin A - \sin^2\frac{A}{2}$ 在 $(0,1]$ 内有解,从而求得

$$A \in \left[2\arctan\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

**试题A** 如图28.7,以 $B_0$ 和 $B_1$ 为焦点的椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 $AB_i$ 交于 $C_i(i = 0,1)$.在 $AB_0$ 的延长线上任取点 $P_0$,以 $B_0$ 为圆心,$B_0P_0$ 为半径作圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 交 $C_1B_0$ 的延长线于 $Q_0$;以 $C_1$ 为圆心,$C_1Q_0$ 为半径作圆弧 $\widehat{Q_0P_1}$ 交 $B_1A$ 的延长线于 $P_1$;以 $B_1$ 为圆心,$B_1P_1$ 为半径作圆弧 $\widehat{P_1Q_1}$ 交 $B_1C_0$ 的延长线于 $Q_1$;以 $C_0$ 为圆心,$C_0Q_1$ 为半径作圆弧 $\widehat{Q_1P'_0}$,交 $AB_0$ 的延长线于 $P'_0$.试证:

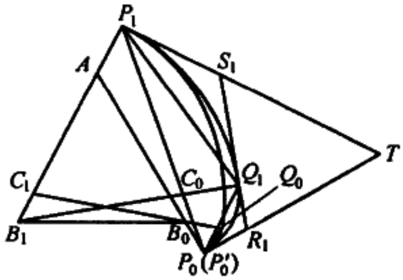


图28.7

(1) 点 $P'_0$ 与点 $P_0$ 重合,且圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 与 $\widehat{P_0Q_1}$ 相内切于 $P_0$.

(2) 四点 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 共圆.

**证法1** (1) 显然 $B_0P_0 = B_0Q_0$,并由圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 和 $\widehat{Q_0P_1}$,$\widehat{Q_0P_1}$ 和 $\widehat{P_1Q_1}$,

$\widehat{P_1Q_1}$ 和 $\widehat{Q_1P'_0}$ 分别相内切于点 $Q_0$、$P_1$、$Q_1$，得

$$C_1B_0 + B_0Q_0 = C_1P_1, B_1C_1 + C_1P_1 = B_1C_0 + C_0Q_1$$

以及

$$C_0Q_1 = C_0B_0 + B_0P'_0$$

三式相加，利用 $B_1C_1 + C_1B_0 = B_1C_0 + C_0B_0$ 以及 $P'_0$ 在 $B_0P_0$ 或其延长线上，有

$$B_0P_0 = B_0P'_0$$

从而可知点 $P'_0$ 与点 $P_0$ 重合．由于圆弧 $\widehat{Q_1P_0}$ 的圆心 $C_0$，圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 的圆心 $B_0$ 以及 $P_0$ 在同一直线上，所以圆弧 $\widehat{Q_1P_0}$ 和 $\widehat{P_0Q_0}$ 相内切于点 $P_0$．

(2) 现在分别过点 $P_0$ 和 $P_1$ 引上述相应相切圆弧的公切线 $P_0T$ 和 $P_1T$ 交于点 $T$．又过点 $Q_1$ 引相应相切圆弧的公切线 $R_1S_1$，分别交 $P_0T$ 和 $P_1T$ 于点 $R_1$ 和 $S_1$．联结 $P_0Q_1$ 和 $P_1Q_1$，得等腰 $\triangle P_0Q_1R_1$ 和 $\triangle P_1Q_1S_1$．基于此，我们可由

$$\angle P_0Q_1P_1 = \pi - \angle P_0Q_1R_1 - \angle P_1Q_1S_1 =$$
$$\pi - (\angle P_1P_0T - \angle Q_1P_0P_1) - (\angle P_0P_1T - \angle Q_1P_1P_0)$$

而

$$\pi - \angle P_0Q_1P_1 = \angle Q_1P_0P_1 + \angle Q_1P_1P_0$$

代入上式后，即得

$$\angle P_0Q_1P_1 = \pi - \frac{1}{2}(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T)$$

同理可得

$$\angle P_0Q_0P_1 = \pi - \frac{1}{2}(\angle P_1P_0T + \angle P_0P_1T)$$

所以 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 四点共圆．

**证法 2**　(1) 因 $\widehat{P_0Q_0}$ 以 $B_0$ 为圆心，$\widehat{Q_0P'_0}$ 以 $C_0$ 为圆心．注意到 $B_0$、$C_0$、$P_0$ 共线，且

$$B_0P_0 = B_0Q_0, C_0P'_0 = C_0Q_1, C_1Q_0 = C_1P_1, B_1Q_1 = B_1P_1$$

欲证 $P_0$ 与 $P'_0$ 重合，则知只须证

$C_0P'_0 = C_0P_0 \Leftrightarrow C_0Q_1 = C_0B_0 + B_0P_0 \Leftrightarrow B_1O_1 - B_1C_0 = C_0B_0 + B_0Q_0 \Leftrightarrow$

$B_1P_1 - B_1C_0 = C_0B_0 + C_1Q_0 - C_1B_0 \Leftrightarrow$

$B_1C_1 + C_1P_1 - B_1C_0 = C_0B_0 + C_1P_1 - C_0B_0 \Leftrightarrow$

$C_1B_1 + C_1B_0 = C_0B_1 + C_0B_0$

由椭圆的性质知上式成立，从而 $P'_0$、$P_0$ 重合．

由 $C_0$、$B_0$、$P_0$ 共线知 $\widehat{P_0Q_0}$ 与 $\widehat{P_0Q_1}$ 内切于 $P_0$．证毕．

(2) 因 $B_0Q_0 = B_0P_0$,则

$$\angle B_0P_0Q_0 = 90° - \frac{1}{2}\angle P_0B_0Q_0$$

同理

$$\angle C_0P_0Q_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle P_0C_0Q_1$$

$$\angle C_1P_1Q_0 = 90° - \frac{1}{2}\angle P_1C_1Q_0$$

$$\angle B_1P_1Q_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle P_1B_1Q_1$$

又 $P_1$、$P_0$ 在 $Q_0Q_1$ 同侧.从而

$P_1$、$P_0$、$Q_0$、$Q_1$ 共圆 $\Leftrightarrow \angle Q_0P_1Q_1 = \angle Q_0P_0Q_1 \Leftrightarrow$

$\angle B_1P_1Q_1 - \angle C_1P_1Q_0 = \angle B_0P_0Q_0 - \angle C_0P_0Q_1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(\angle P_1C_1Q_0 - \angle P_1B_1Q_0) = \frac{1}{2}(\angle P_0C_0Q_1 - \angle P_0B_0Q_0) \Leftrightarrow$

$\angle P_1C_1Q_0 + \angle C_0B_0C_1 = \angle AB_0C_1 + \angle AC_1B_0 \Leftrightarrow$

$180° - \angle C_1AB_0 = 180° - \angle B_1AC_0 \Leftrightarrow \angle C_1AB_0 = \angle B_1AC_0$



而上式显然成立,故 $P_0$、$P_1$、$Q_1$、$Q_0$ 四点共圆.

**证法 3** (由湖南师大邹宇给出)(1) 略.

(2) 联结 $P_1Q_1$、$P_0Q_1$、$P_1Q_0$、$P_0Q_0$,易知 $\triangle B_1P_1Q_1$、$\triangle C_1Q_0P_1$、$\triangle C_0P_0Q_1$、$\triangle B_0P_0Q_0$ 均为等腰三角形,且

$$\angle AC_1B_0 + \angle AB_0C_1 = 180° - \angle A = \angle AB_1C_0 + \angle AC_0B_1$$

$$\angle Q_1C_0P_0 = \angle AC_0B_1, \angle Q_0B_0P_0 = \angle AB_0C_1$$

故

$$\begin{aligned}\angle P_1Q_1P_0 &= \angle P_1Q_1B_1 + \angle C_0QP_0 = \frac{1}{2}(180° - \angle AB_1C_0) + \\ &\frac{1}{2}(180° - \angle Q_1C_0P_0) = \\ &180° - \frac{1}{2}(\angle AB_1C_0 + \angle Q_1C_0P_0) = \\ &180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \frac{1}{2}\angle A\end{aligned}$$

同理,求得

$$\angle P_1Q_0P_0 = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

故 $P_1$、$Q_1$、$Q_0$、$P_0$ 四点共圆.

**证法 4**　(由湖南师大邹宇给出)(1) 略.

(2) 易知 $\triangle P_1Q_1P_0$ 的外心即为 $\triangle AB_1C_0$ 的内心 $I_1$，$\triangle P_1Q_0P_0$ 的外心即为 $\triangle AC_1B_0$ 的内心 $I_2$. 欲证 $P_1$、$Q_1$、$Q_0$、$P_0$ 四点共圆，只须证 $I_1$ 与 $I_2$ 重合即可.

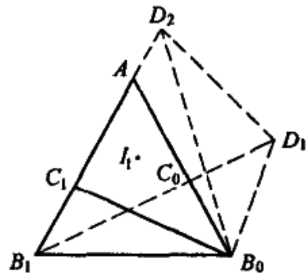


图 28.8

延长 $B_1C_0$ 至 $D_1$，使 $C_0D_1 = C_0B_0$；在射线 $C_1A$ 上取点 $D_2$，使得 $C_1D_2 = C_1B_0$，联结 $D_1D_2$、$D_2B_0$、$D_1B_0$，如图 28.8 所示. 由

$$B_1C_1 + C_1B_0 = B_1C_0 + C_0B_0$$

有

$$B_1C_1 + C_1D_2 = B_1C_0 + C_0D_1$$

亦即

$$B_1D_1 = B_1D_2$$

易知 $\triangle C_0B_0D_1$、$\triangle C_1B_0D_2$、$\triangle B_1D_1D_2$ 均为等腰三角形.

从而 $\triangle D_2D_1B_0$ 的外心(即线段 $B_0D_1$、$D_1D_2$ 的中垂线的交点)，同时位于 $\angle AC_1B_0$、$\angle AB_1C_0$、$\angle AC_0B_1$ 的角平分线，而 $\angle AC_0B_1$、$\angle AB_1C_0$ 的角平分线的交点为 $\triangle AB_1C_0$ 的内心 $I_1$，从而 $I_1C_1$、$I_1A$ 分别平分 $\angle AC_1B_0$、$\angle C_1AB_0$，即 $I_1$ 也为 $\triangle AC_1B_0$ 的内心. 故 $I_1$ 与 $I_2$ 重合.

证毕.

**注**　上述证法 4 没有用到"圆弧 $\overparen{P_0Q_0}$ 与 $\overparen{Q_1P_0}$ 内切于 $P_0$" 这个条件，而且其中提出了一个很重要的结论："设点 $D$、$E$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $AB$、$AC$ 上的点，若 $BD + DC = BE + EC$，则 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 的内心重合." 其证明与证法 4 相同. 从这个证明过程不难发现，若将构作辅助线的过程换一种动态的方式表达，再结合证明过程，则可得到下述命题.

**命题 1**　如图 28.9，设点 $D$、$E$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $AB$、$AC$ 上的点，满足 $BD + DC = BE + EC$，以 $D$ 为圆心，$DC$ 为半径作圆弧 $\overparen{CG}$ 交 $BA$ 于 $G$；以 $B$ 为圆心，$BG$ 为半径作圆弧 $\overparen{GF}$ 交 $BE$ 于 $F$；以 $E$ 为圆心，$EF$ 为半径作圆弧 $\overparen{FC'}$ 交 $AC$ 于 $C'$，则(1) $C'$ 与 $C$ 重合；(2) $\triangle GCF$ 的外心即为 $\triangle ABE$(或 $\triangle ADC$) 的内心.

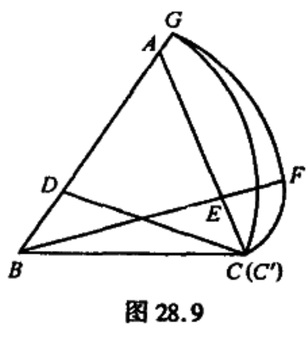


图 28.9

仔细比较命题 1 与联赛题(2006 年全国高中联赛加试题第一题，这里简称联赛题，下同)，不难发现它们之间的密切联系：命题 1 是联赛题的一个很

特殊的情形,即当 $P_0$、$Q_0$ 重合于 $B_0$ 时,共圆的四点变成了三角形.

换一种说法就是,联赛题是命题 1 的一个实质性的推广,这个推广具有质的变化(从三角形到共圆的四点,且这四点分别位于四条不同的直线上).此外,命题者为了扩大条件与结论之间的距离,把条件 $BD+DC=BE+EC$ 用椭圆的几何定义来代替,再以动态的方式构造每一个元素,从而既隐藏了各元素之间必然的联系,又将平面几何知识中很少用到的椭圆和频繁出现的圆结合起来,从这个角度来看,笔者不得不佩服命题者的独特用心!而命题者在设置题目的第一小问时加上了"圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 内切于 $P_0$",目的是希望答题者通过作切线来证明第二问的结论,这也是参考答案的证明方法,但结论"圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 与 $\overset{\frown}{Q_1P_0}$ 内切于 $P_0$"并不是关键所在.

从上面联赛题的证法我们也看到,不管点 $P_0$ 在 $AB_0$ 的延长线上如何运动,最本质的一点是不会变的,那就是 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 四点位于以 $\triangle AB_1C_0$ 或 $\triangle AC_1B_0$ 的内心为圆心的圆上.命题 1 也说明,当点 $P_0$ 运动到 $B_0$ 时,这个本质



不会发生变化,那么,我们不禁要问,当点 $P_0$ 在线段 $AB_0$ 上运动时,$P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 四点还会位于以 $\triangle AB_1C_0$ 或 $\triangle AC_1B_0$ 的内心为圆心的圆上吗?我们的回答是肯定的.

我们把这个结论称为命题 2.

**命题 2** 如图 28.10,以 $B_0$ 和 $B_1$ 为焦点的给定椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 $AB_i$ 交于 $C_i(i=0,1)$.在线段 $AB_0$ 上任取点 $P_0$,以 $B_0$ 为圆心,$B_0P_0$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 $C_1B_0$ 于 $Q_0$;以 $C_1$ 为圆心,$C_1Q_0$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 $B_1A$ 于 $P_1$;以 $B_1$ 为圆心,$B_1P_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 $B_1C_0$ 于 $Q_1$;以 $C_0$ 为圆心,$C_0Q_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P'_0}$ 交 $AB_0$ 于 $P'_0$,则(1) 点 $P'_0$ 与点 $P_0$ 重合;(2) 四点 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 共圆.

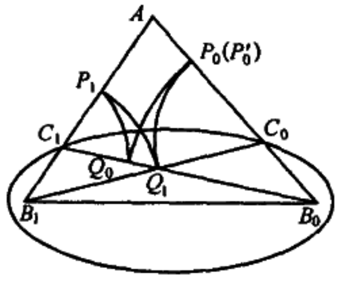


图 28.10

命题 2 的证明完全可以依照联赛题的证明.因此,我们也说命题 2 是命题 1 的一个实质性推广.

由上面的讨论,我们看到,当点 $P_0$ 在线段 $AB_0$ 及其延长线上运动时,$P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 四点位于以 $\triangle AB_1C_0$ 或 $\triangle AC_1B_0$ 的内心为圆心的圆上.那么,如果更进一步,当 $P_0$ 在 $B_0A$ 的延长线上运动时,情况又会如何呢?结论当然会像我

们所希望的那样还是成立的.下面的命题 3 就是这种情形.

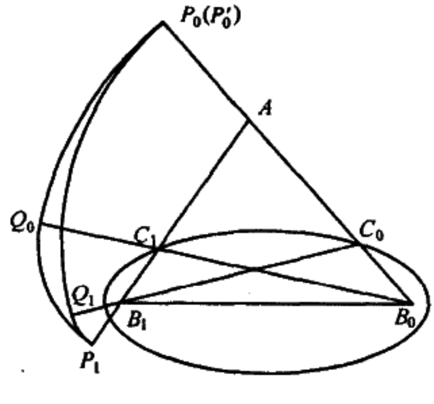



图 28.11

**命题 3**　如图 28.11,以 $B_0$ 和 $B_1$ 为焦点的给定椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 $AB_i$ 交于 $C_i(i=0,1)$.在 $B_0A$ 的延长线上任取点 $P_0$,以 $B_0$ 为圆心,$B_0P_0$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 $B_0C_1$ 的延长线于 $Q_0$;以 $C_1$ 为圆心,$C_1Q_0$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 $AB_1$ 的延长线于 $P_1$;以 $B_1$ 为圆心,$B_1P_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 $C_0B_1$ 的延长线于 $Q_1$;以 $C_0$ 为圆心,$C_0Q_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P'_0}$ 交 $B_0A$ 的延长线于 $P'_0$,则(1) 点 $P'_0$ 与点 $P_0$ 重合;(2) 四点 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 共圆.

命题 3 的证明略,仿联赛题的证明.

由前面对命题 1、命题 2、命题 3 及联赛题的讨论,我们知道,对于 $AB_0$ 所在直线上的任意一点 $P_0$,按照要求构造的四点 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 一定共圆,且圆心为 $\triangle AB_1C_0$ 或 $\triangle AC_1B_0$ 的内心.由此,我们可以用一个命题来统一它们,这个命题可以看做是对联赛题(或命题 1、命题 2、命题 3) 的推广.

**命题 4**　以 $B_0$ 和 $B_1$ 为焦点的给定椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 $AB_i$ 交于 $C_i(i=0,1)$.在 $AB_0$ 所在的直线上任取点 $P_0$,以 $B_0$ 为圆心,$B_0P_0$ 的半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_0Q_0}$ 交 $C_1B_0$ 所在的直线于 $Q_0$;以 $C_1$ 为圆心,$C_1Q_0$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_0P_1}$ 交 $B_1A$ 所在的直线于 $P_1$;以 $B_1$ 为圆心,$B_1P_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ 交 $B_1C_0$ 所在的直线于 $Q_1$;以 $C_0$ 为圆心,$C_0Q_1$ 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{Q_1P'_0}$ 交 $AB_0$ 所在的直线于 $P'_0$,则(1) 点 $P'_0$ 与点 $P_0$ 重合;(2) 四点 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 共圆.

上面的讨论都是针对点 $P_0$ 在直线 $AB_0$ 上运动时的不同情形,实际上,因为 $P_0$、$Q_0$、$Q_1$、$P_1$ 四点分别位于 $AB_0$、$C_1B_0$、$B_1A$、$B_1C_0$ 四条不同的直线上,若改变这四点的先后出现顺序,即对这四条直线中的任意一条上的点,其余的三点可以通过构造得到,这样,我们得到一个更强的命题:

**命题 5**　点 $D$、$E$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $AB$、$AC$ 上的点,若 $BD+DC=BE+EC$,那么对于四条直线 $AB$、$AC$、$BE$、$CD$ 中的任意一条上的一点,存在分别位于其他三条上的三点,这四点共于以 $\triangle ABE$ 的内心为外心的圆.

综上所述,我们认为,推广是命制平面几何试题的一个重要手段.在推广的过程中,我们往往从一个较简单的图形或性质出发,从简单到复杂,从特殊到一般,深入挖掘图形潜在的性质或巧妙构造与性质相关联的特殊图形,再根据需要适当地扩大条件与结构之间的距离,或将其简单的外形复杂化,或隐藏图形的一些特殊或本质的性质等,目的是推陈出新,从而命制出有特色、有水准的竞赛试题.

## 第1节　图形中共顶点的相等线段问题

在2006年的全国高中联赛平面几何试题中,给出的条件形式复杂,乍一看让人眼花缭乱,似乎无法捉摸.事实上,若仔细分析,发现到其中一系列的共顶点的相等线段,则问题求解思路很快便展现出来.

下面,我们以命题形式再介绍几类图形中共顶点的相等线段问题.

**命题1**①　在$\triangle PBC$中,$M$是边$BC$的中点,分别以$PB$、$PC$为直径作圆$O_1$、圆$O_2$,同在圆$O_1$、圆$O_2$的外半圆或内半圆(相对于$\triangle PBC$)上取两点$D$、$E$,若$\angle PBD=\angle PCE$,则$MD=ME$.



**证明**　下面就点$D$、$E$在圆$O_1$、圆$O_2$上的3种不同位置给出证明.

如图28.12(a)、(b)、(c)分别对应3种不同位置.联结$MO_1$、$MO_2$、$O_1D$、$O_2E$.

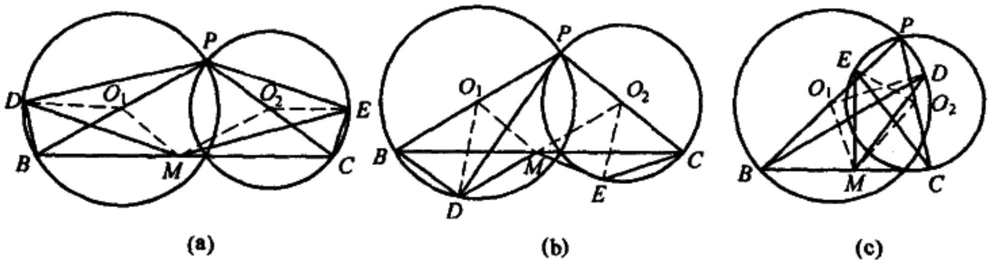



图28.12

因$M$、$O_1$、$O_2$分别为$BC$、$PB$、$PC$的中点,则$O_1M\parallel PC$,$O_2M\parallel PB$.

从而四边形$PO_1MO_2$为平行四边形.于是

$$O_1P=O_2M,O_2P=O_1M,\angle PO_1M=\angle PO_2M$$

又因
$$\angle PBD=\angle PCE$$

则
$$\angle PO_1D=2\angle PBD=2\angle PCE=\angle PO_2E$$

① 邹宇,沈文选.一个图形的性质与竞赛题命制[J].中学教研(数学),2006(5):35-37.

于是,在 $\angle O_1MD$ 与 $\angle O_2EM$ 中,有 $O_1D = O_1P = O_2M, O_1M = O_2P = O_2E$,而且在上面 3 种位置中,都不难证明 $\angle DO_1M = \angle MO_2E$,所以

$$\triangle O_1MD \cong \triangle O_2EM$$

所以
$$MD = ME$$

在此,我们顺便指出:

(1) 点 $D$、$E$ 在以 $PB$、$PC$ 为直径的圆上,很显然,$PD \perp DB, PE \perp EC$.

(2) 因 $\angle PBD = \angle PCE$,故 $\mathrm{Rt}\triangle PBD \backsim \mathrm{Rt}\triangle PCE$,从而$\dfrac{PD}{DB} = \dfrac{PE}{EC}$.

(3) 命题 1 说明,在满足题设的条件下,对于圆 $O_1$ 上的任意一点,圆 $O_2$ 上总有一点 $E$,使得 $MD = ME$ 成立.

(4) 命题 1 的逆命题也成立,即在 $\triangle PBC$ 中,$M$ 是 $BC$ 边的中点,圆 $O_1$、圆 $O_2$ 分别是以 $PB$、$PC$ 为直径的圆,同在圆 $O_1$、圆 $O_2$ 的外半圆或内半圆(相对于 $\triangle PBC$)上取两点 $D$、$E$,若 $MD = ME$,则 $\angle PBD = \angle PCE$.($\triangle O_1MD \cong \triangle O_2EM$)

下面,我们以这个图形的性质为背景,探讨一些竞赛题的命制.



将命题 1 证明过程中的 3 种情形,去掉两圆,得到 3 道初中数学竞赛题(或改编题).

**题 1**　如图 28.13,$M$ 是 $\triangle PBC$ 的边 $BC$ 的中点,以 $PB$、$PC$ 为斜边向形外作 $\mathrm{Rt}\triangle PBD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$.若 $\angle BPD = \angle CPE$,求证:$MD = ME$.

(第 10 届祖冲之杯数学竞赛题)

**题 2**　如图 28.14,$M$ 是 $\triangle PBC$ 的边 $BC$ 的中点,$PD \perp DB, PE \perp EC$,且 $\angle BPD = \angle CPE$,求证:$MD = ME$.

(第 8 届江苏省数学竞赛题改编)

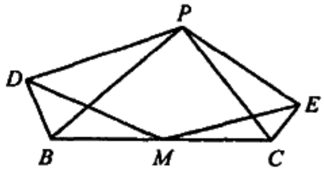



图 28.13

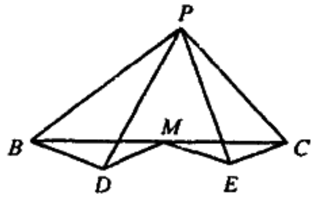



图 28.14

**题3**　如图28.15，$\triangle PBC$中，$M$是$BC$边的中点，$PD \perp DB$，$PE \perp EC$，若$\angle PBD = \angle PCE$，求证：$MD = ME$.

(2003年全国初中数学联赛C卷试题逆命题)

在图28.12(a)中，若将点$D$、$E$置于靠近点$P$的外半圆周上，延长$BD$、$CE$能相交于一点，则得到：

**题4**　如图28.16，$P$是$\triangle ABC$内部的一点，$M$是边$BC$的中点，$E$、$F$分别是边$CA$、$AB$上的点，满足$\angle PBA = \angle PCA$，$\angle BFP = \angle CEP = 90°$，证明：$ME = MF$.

(1983年南斯拉夫数学竞赛题)

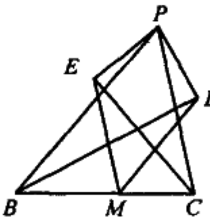



图28.15

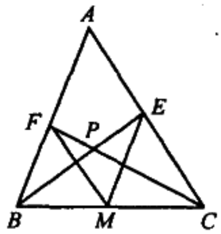



图28.16



在图28.13中，延长$DB$、$EC$相交于一点，将图形翻转，并注意到命题1的逆命题成立，即可得到：

**题5**　如图28.17，$\triangle ABC$中，$D$是边$AB$的中点，分别延长$CA$、$CB$到点$E$、$F$，使$DE = DF$，分别过$E$、$F$作$CA$、$CB$的垂线，相交于点$P$，求证：$\angle PAE = \angle PBF$.

(2003年全国初中数学联赛B卷试题)

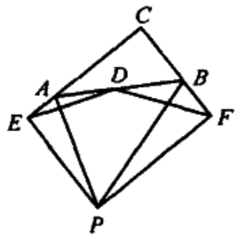



图28.17

在图28.14中，若分别以$BD$、$CE$为边作正方形$BDHI$和正方形$CEFG$，联结$DE$和$HF$，因$Rt\triangle PBD \backsim Rt\triangle PCE$，从而$\frac{PD}{DB} = \frac{PE}{EC}$，即$\frac{PD}{DH} = \frac{PE}{EF}$，可知$DE \parallel HF$，四边形$DEFH$为梯形，再去掉$PB$、$PD$、$PE$、$PC$，即得：

**题6**　如图28.18，梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，分别以两腰$AB$、$CD$为边向形外作正方形$ABGE$和正方形$DCHF$，联结$EF$，该线段的中点为$M$.求证：$MA = MD$.

(2004年全国初中数学联赛C卷试题)

在图28.16中，若分别延长$BP$、$CP$交$AC$、$AB$于$G$、$H$，因$\angle PBA = \angle PCA$，

有 $B$、$C$、$G$、$H$ 四点共圆，且 $\angle PGE = \angle PHF$，又 $\angle BFP = \angle CEP = 90^\circ$，若取 $GH$ 的中点 $N$，由命题1知 $NE = NF$，又 $ME = MF$，故 $M$、$N$ 在 $EF$ 的中垂线上，可得：

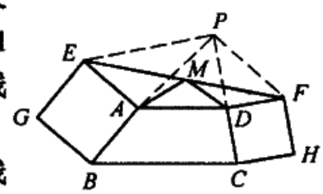



图 28.18

**题7** 如图28.19，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 $P$，边 $AB$、$CD$ 的中点分别为 $M$、$N$、$K$、$L$ 分别为边 $BC$、$DA$ 上的点，且 $PK \perp BC$，$PL \perp DA$，求证：$KL \perp MN$.

（第46届保加利亚(春季)数学竞赛题）

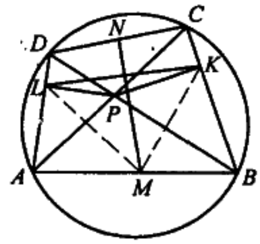



图 28.19

在图28.12(a)中，若 $D$、$E$ 分别位于 $\overset{\frown}{PB}$、$\overset{\frown}{PC}$ 的中点处，则 $\triangle PBD$、$\triangle PCE$ 均为等腰直角三角形，$MD = ME$. 若能再注意到：$MD \perp ME$（这是一道2004年湖南省高中理科实验班招生试题的特殊情形：如图28.20所示，圆 $O_1$、圆 $O_2$ 相交于点 $A$ 和 $B$，经过 $A$ 作直线与圆 $O_1$，相交于 $C$，与圆 $O_2$ 相交于 $D$. 设弧 $BC$ 的中点为 $M$，弧 $BD$ 的中点为 $N$，线段 $CD$ 的中点为 $K$，求证：$MK \perp KN$.（证略）)，从而下面的题不难得到.



**题8** 如图28.21，设 $D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 的中点，$E$、$F$ 分别是以 $CA$、$AB$ 为斜边的形外作等腰直角三角形的直角顶点，求证：$\triangle DEF$ 也是等腰直角三角形.

（第9届爱尔兰数学奥林匹克题）

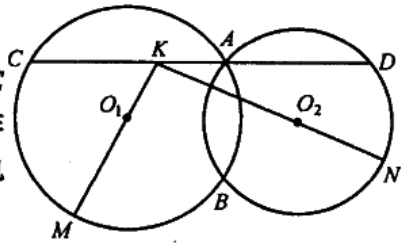



图 28.20

由题8的结论，我们可以猜想：如图28.22，若 $E$、$F$ 分别是以 $CA$、$AB$ 为斜边的形内作等腰直角三角形的直角顶点，$\triangle DEF$ 还是等腰直角三角形吗？答案是肯定的.（证明略）

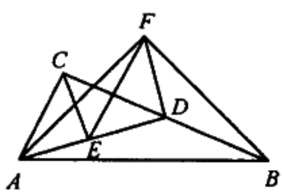



图 28.21

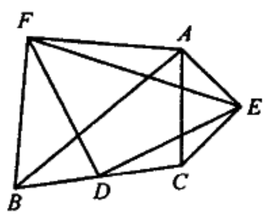



图 28.22

结合以上两题,可以得到下题.

**题 9** 如图 28.23,$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形,现固定 $\triangle ABC$,而将 $\triangle ADE$ 绕点 $A$ 在平面上旋转,试证:不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置,线段 $EC$ 上必存在点 $M$,使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

(1987 年全国高中数学联赛试题)

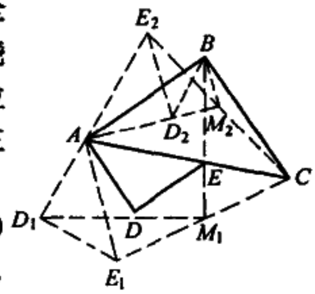



图 28.23

**略证** 如图 28.23,设 $\triangle ADE$ 旋转到 $\triangle AD_1E_1$,由题 8 可知,在 $\triangle AE_1C$ 中,$E_1C$ 的中点 $M_1$ 使得 $\triangle BM_1D_1$ 为等腰直角三角形. 因此,只须证:不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置,线段 $EC$ 的中点 $M$,使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形. 当旋转的角度小于 $180°$ 时,即为题 8 的情形;当旋转的角度大于 $180°$ 时,即为图 28.22 的情形.

为了介绍下面的命题 2,先看一个问题.①



**引题** 在任意 $\triangle ABC$ 的边上向外作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$,使得 $\angle PBC = \angle CAQ = 45°$,$\angle BCP = \angle QCA = 30°$,$\angle ABR = \angle BAR = 15°$. 求证:(1)$\angle PRQ = 90°$;(2)$PR = RQ$.

(1975 年第 17 届 IMO 试题)

在这里,我们不探讨 $\angle PRQ = 90°$ 的证明,所讨论的主要与 $PR = RQ$ 相关.

首先给出 $PR = RQ$ 的一个简证,这个证明用到上面的命题 1.

在命题 1 中,点 $D$、$E$ 在以 $PB$、$PC$ 为直径的圆上,故 $PD \perp DB$,$PE \perp EC$.

**证明** 如图 28.24,过 $A$ 作 $AE \perp CQ$ 交 $CQ$ 的延长线于 $E$,过 $B$ 作 $BD \perp CP$ 交 $CP$ 的延长线于 $D$,取 $AB$ 的中点 $M$,联结 $MD$、$ME$. 在 $\triangle ABC$ 中,有 $AE \perp CE$,$BD \perp CD$,$\angle BCD = \angle ACE$. 由命题 1 知,$MD = ME$.

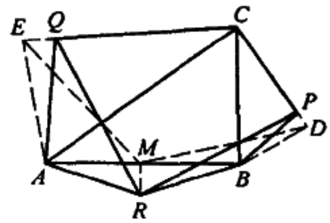



图 28.24

下面证明 $PR = RQ$. 如图 28.24 所示,联结 $MR$,则

$$\angle QAE = \angle RAM = 15°$$

从而

$$\angle EAM = \angle QAM + 15° = \angle QAR$$

① 邹宇,沈文选. 一道平面几何赛题的新证、推广及其关联[J]. 中学数学研究,待发.

且　$$\frac{AE}{AQ}=\cos 15^\circ=\frac{AM}{AR}$$

故　$$\triangle EAM\backsim\triangle QAR,\frac{EM}{QR}=\cos 15^\circ$$

同理　$$\frac{DM}{PR}=\cos 15^\circ=\frac{EM}{QR}$$

由 $MD=ME$ 知，$PR=RQ$.

从上面的证明过程不难发现，引题中给出的特殊角度 $45^\circ,30^\circ,15^\circ$，它们本身在证明过程中并没有起到很多作用，但满足一个条件 $45^\circ+30^\circ+15^\circ=90^\circ$，这一点才是最本质的．既然如此，若把 $45^\circ,30^\circ,15^\circ$ 换成 $\alpha,\beta,\gamma$，使它们满足 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，结论 $PR=RQ$ 还是成立的，于是得到引题的一个推广：

**命题2**　在任意 $\triangle ABC$ 的边上向形外作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$，使得 $\angle PBC=\angle CAQ=\alpha$，$\angle BCP=\angle QCA=\beta$，$\angle ABR=\angle BAR=\gamma$．若 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，则 $PR=RQ$.

命题2的证明可仿照引理的证明，其他步骤不变，只须把 $15^\circ$ 改为 $\gamma$ 即可．

现在，我们来围绕命题2作一些讨论．

(1) 在命题2中，若 $\gamma$ 逐渐减少到 $0^\circ$ 时，点 $R$ 将与 $AB$ 的中点 $M$ 重合，$\alpha+\beta=90^\circ$，也即 $AQ\perp CQ$，$AP\perp CP$，这时即为命题1的一个情形：点 $Q$、$P$ 分别位于以 $AC$、$BC$ 为直径的圆的外半圆上．

(2) 我们知道，在(1)中，由命题1的条件，当点 $Q$、$P$ 分别位于以 $AC$、$BC$ 为直径的圆的内半圆上时，$PR=RQ$ 也是成立的，那么，我们不禁要问：在引题中，如果是往内作同样三角形，结论还会成立吗？可喜的是，结论也是成立的．在这里，我们姑且把它作为引理的另一个推广：

**命题3**　在任意 $\triangle ABC$ 的边上向形内作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$，使得 $\angle PBC=\angle CAQ=\alpha$，$\angle BCP=\angle QCA=\beta$，$\angle ABR=\angle BAR=\gamma$．若 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，则 $PR=RQ$.

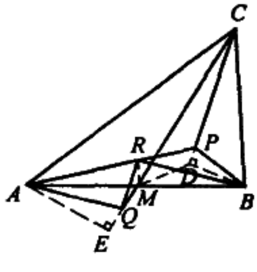



图28.25

**证明**　仿引题的证明，如图28.25所示，过 $A$ 作 $AE\perp CQ$ 交 $CQ$ 的延长线于 $E$，过 $B$ 作 $BD\perp CP$ 交 $CP$ 的延长线于 $D$，取 $AB$ 的中点 $M$，联结 $MD$、$QE$．在 $\triangle ABC$ 中，有 $AE\perp CE$，$BD\perp CD$，$\angle BCD=\angle ACE$．由引理知，$MD=ME$.

下面证明 $PR=RQ$．如图28.25所示，联结 $MR$，则

$$\angle QAE=\angle RAM=\gamma$$

从而 $$\angle EAM = \angle QAM + \gamma = \angle QAR$$

且 $$\frac{AE}{AQ} = \cos\gamma = \frac{AM}{AR}$$

故 $$\triangle EAM \backsim \triangle QAR, \frac{EM}{QR} = \cos\gamma$$

同理 $$\frac{DM}{PR} = \cos\gamma = \frac{EM}{QR}$$

由 $MD = ME$ 知,$PR = RQ$.

(3) 把命题 2 和命题 3 结合起来,即得到一个命题:

**命题 4** 在 $\triangle ABC$ 的边上同向形外或向形内作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle APB$,使得

$$\angle PBC = \angle CAQ = \alpha, \angle BCP = \angle QCA = \beta, \angle ABR = \angle BAR = \gamma$$

若 $$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

则 $$PR = RQ$$

由此,我们看到,这个命题实际上是命题 1 的推广.

最后,我们看看与命题 2、命题 3 相关的两个定理.



(4) 在命题 2 中,若令 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$,则结论除了 $RP = RQ$ 外,还有 $PR = PQ$,$QP = QR$,即 $\triangle PQR$ 为正三角形,此即为:

**拿破仑定理** 以 $\triangle ABC$ 的三边为底,分别向形外作顶角为 $120^\circ$ 的等腰三角形 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$,则 $\triangle PQR$ 为等边三角形.

从而,上面的证明也可以看成是对拿破仑定理的简证了.

(5) 仿(4)的讨论,在命题 3 中,若也令 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$,同样可知 $\triangle PQR$ 为正三角形,因此,我们得到一个新的定理,这里不妨叫做拿破仑第二定理.

**拿破仑定理第二定理** 以 $\triangle ABC$ 的三边为底,分别向形内作顶角为 $120^\circ$ 的等腰三角形 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$,则 $\triangle PQR$ 为等边三角形(当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,$P$、$Q$、$R$ 三点重合).

## 第 2 节　三角形的外接正三角形的面积最大、最小问题

给定一个正三角形,可以作出无数个形态各异的内接三角形;反过来,给定一个三角形可以作出一系列的正三角形,对于三角形的最大外接正三角形和最小正三角形有如下结论.①②

① 郭要红.三角形的最大外接正三角形[J].数学通报,2004(2):24-25.
② 吕海久,王赛英.三角形的最小外接正三角形[J].中学数学月刊,2006(8):30-32.

**定理1**　直角边长分别为 $a$、$b$ 的 Rt$\triangle ABC$ 的外接正 $\triangle DEF$ 面积最大时的边长为 $\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+b^2)+3\sqrt{3}ab}$.

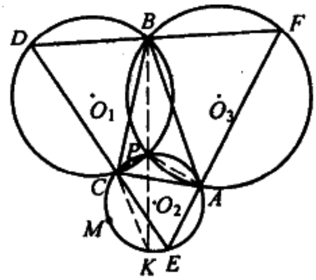


图28.26

**证明**　如图28.26,设 $\triangle DEF$ 是 Rt$\triangle ABC$ 的外接正三角形.由密克点的性质(在任一三角形的每一边上取一点,过三角形的每一顶点与两邻边上所取的点作圆,此三圆共点,该点称为密克点),知 $\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$ 的外接圆交于一个公共点 $P$. 联结 $PA$、$PB$、$PC$,则 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$.(显然点 $P$ 即为费马点)

过点 $P$ 分别作 $PA_1$、$PB_1$、$PC_1$ 分别垂直于 $EF$、$FD$、$DE$ 于点 $A_1$、$B_1$、$C_1$.由正三角形的性质或面积关系式,$h$ 为 $\triangle DEF$ 的高时,有

$$h=PA_1+PB_1+PC_1$$

且

$$PA_1+PB_1+PC_1\leqslant PA+PB+PC$$

其中等号当且仅当 $PA\perp EF, PB\perp FD, PC\perp DE$ 时成立.

若要 $\triangle DEF$ 的面积最大,当且仅当其高最长.于是,当 $PA\perp EF, PB\perp FD, PC\perp DE$ 时,$\triangle DEF$ 的面积最大.于是,可延长 $BP$ 交圆 $ACE$ 于 $K$,则 $\angle KCA=\angle KPA=60°$,从而 $\triangle KAC$ 为正三角形,由托勒密定理知

$$PK=PC+PA$$

于是

$$BK=PB+PK=PB+PC+PA$$

在 $\triangle BCK$ 中

$$BK=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 150°}=\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{3}ab}$$

故 $\triangle DEF$ 的边长为

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}BK=\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+b^2)+3\sqrt{3}ab}$$

其面积为

$$ab+\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2+b^2)$$

**定理2**　设 $a$、$b$、$c$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三边长,则 $\triangle ABC$ 的外接正三角形 $\triangle DEF$ 面积最大时的边长为

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(60°+C)}=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}}$$

**证明** 设$\angle C \geqslant \angle A \geqslant \angle B$.

(1) 若$\angle C \leqslant 120°$,则$\angle ABC$的费马点$P$在$\triangle ABC$内或边界上,与定理1的证明过程一样,$\triangle DEF$的面积最大值在$\triangle DEF$的三边分别与$PA$、$PB$、$PC$垂直时取到(若$\angle C = 120°$,点$P$与点$C$重合,只要$\triangle DEF$的三边与$PA$、$PB$、$PC$垂直).此时

$$BK = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + C)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}}$$

(2) 若$\angle C > 120°$,则等角中心$P$(对三角形各边所张的角是60°或120°的点称为等角中心)在$\triangle ABC$的外部,如图28.27所示.

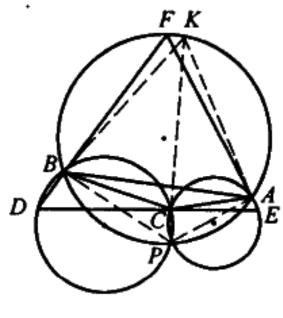



图28.27

联结$PA$、$PB$、$PC$,设$\triangle DEF$是$\triangle ABC$的外接正三角形,即$\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$的外接圆相交于$P$,此时,$\angle BPC = \angle APC = 60°$,$\angle APB = 120°$.



过点$P$分别作$PA_1$、$PB_1$、$PC_1$分别垂直于$EF$、$FD$、$DE$于点$A_1$、$B_1$、$C_1$,则$S_{\triangle DEF} = EF(PA_1 + PB_1 - PC_1)$.于是,$PA_1 + PB_1 - PC_1$是$\triangle DEF$的高.

设$\angle PBD = \beta$,则$\angle PCD = \angle PAF = \beta$,且

$$PA_1 + PB_1 - PC_1 = (PA + PB - PC)\sin\beta$$

若要$S_{\triangle DEF}$最大,只要$PA_1 + PB_1 - PC_1$最大.而$PA_1 + PB_1 - PC_1$的最大值是$PA + PB - PC$.此时,$\beta = 90°$,即$PA_1 \perp EF$,$PB_1 \perp FD$,$PC_1 \perp DA$.

延长$PC$交圆$FAB$于$K$,则$\angle KAB = \angle KPB = 60°$,即$\triangle ABK$为正三角形.

由托勒密定理知

$$PK = PA + PB$$

则

$$CK = PK - PC = PA + PB - PC$$

在$\triangle CAK$中

$$KC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}}$$

由(1)、(2)知结论获证.此时其面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S_{\triangle ABC}$$

**定理 3**　$\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的外接正三角形，若 $\angle A \leqslant 120°$，则费马点在形内或与顶点重合.

(1) 若 $\angle B \leqslant 60°$，$\angle B \geqslant \angle C$，则 $\triangle DEF$ 的一顶点与 $B$ 重合时其面积最小，其边长 $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}BC\sin(60° + B)$.

(2) 若 $\angle B > 60°$，$\angle B \geqslant \angle C$，则 $\triangle DEF$ 的一顶点与 $C$ 重合时其面积最小，其边长 $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}AC\sin(60° + C)$.

**证明**　记 $\angle PBD = \alpha$，则 $PA_1 = PA\sin\alpha$，$PB_1 = PB\sin\alpha$，$PC_1 = PC\sin\alpha$，因此，$PA_1 + PB_1 + PC_1 = (PA + PB + PC)\sin\alpha$，要使 $PA_1 + PB_1 + PC_1$ 最小，只要使 $\sin\alpha$ 最小即可. 现在我们首先研究 $\alpha$ 的范围，分两种情况研究.

(i)($\angle A \leqslant 120°$，$\angle B \leqslant 60°$，$\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C$)

$$\alpha = \angle PCE = \angle APC + \angle PCA - \angle CAE = 120° + \angle PCA - \angle CAE \quad ①$$

$$\alpha = \angle PAB + \angle FAB \quad ②$$

由等式①，知 $C$ 与 $E$ 重合时，$\angle CAE = 0°$，此时 $\alpha$ 为最大，$\alpha = 120° + \angle PCA$（图 28.28），由等式②，知 $B$ 与 $F$ 重合时 $\angle FAB = 0°$，此时 $\alpha$ 为最小，$\alpha = \angle PAB$（图 28.28）. 因此 $\angle PAB \leqslant \alpha \leqslant 120° + \angle PCA$.

由 $y = \sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的性质可知，只要比较两种极限状态时的边长的大小即可. 由图 28.28 可得 $DE = \frac{BC\sin(60° + \angle ACB)}{\sin 60°}$

由图 28.29 可得　$DE = DF = \frac{BC\sin(60° + \angle ABC)}{\sin 60°}$

现在只要比较 $\sin(60° + \angle ACB)$ 与 $\sin(60° + \angle ABC)$ 的大小即可. 因为

$$\sin(60° + \angle ACB) - \sin(60° + \angle ABC) = 2\cos(60° + \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC)\cdot \sin(\frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle ABC)$$

而
$$60° + \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC = 60° + 90° - \frac{1}{2}\angle BAC = 150° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

且
$$\angle BAC \leqslant 120°$$

因此
$$60° + \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC \geqslant 90°$$

因此 $$\cos(60^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC) \leqslant 0$$

又 $$\sin(\frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle ABC) \leqslant 0$$

因此 $$\sin(60^\circ + \angle ACB) \geqslant \sin(60^\circ + \angle ABC)$$

因此图 28.29 中的外接正三角形的边长比图 28.28 中的边长要小.

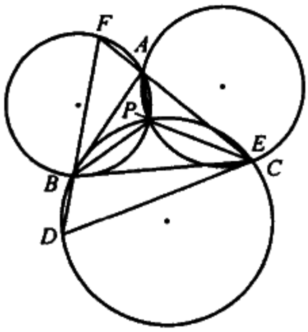



图 28.28

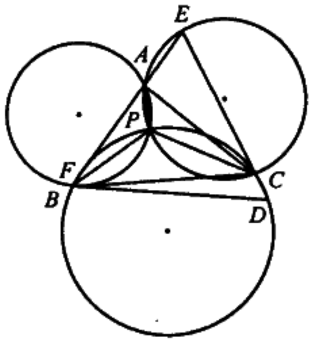



图 28.29



(ii)($\angle A \leqslant 120^\circ, \angle B > 60^\circ, \angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C$)

$$\alpha = \angle APC + \angle PCA - \angle CAE = 120^\circ + \angle PCA - \angle CAE \quad ③$$

$$\alpha = \angle PBC + \angle CBD \quad ④$$

由等式③,知 $C$ 与 $E$ 重合时,$\angle CAE = 0^\circ$,此时 $\alpha$ 为最大,$\alpha = 120^\circ + \angle PCA$(图 28.30);由等式④,知 $C$ 与 $D$ 重合时,$\angle CBD = 0^\circ$,此时 $\alpha$ 为最小,$\alpha = \angle PBC$(图 28.31).因此 $\angle PBC \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ + \angle PCA$.

由 $y = \sin x$ 在 $(0,\pi)$ 的性质可知,只要比较两种极限状态时的边长的大小即可.由图 28.30 可得

$$DE = \frac{BC\sin(60^\circ + \angle ACB)}{\sin 60^\circ}$$

由图 28.31 可得 $$DE = \frac{AC\sin(60^\circ + \angle ACB)}{\sin 60^\circ}$$

由假设 $\angle BAC \geqslant \angle ABC$,因此 $BC \geqslant AC$,因此图 28.31 中的外接正三角形的边长比图 28.30 中的边长要小.

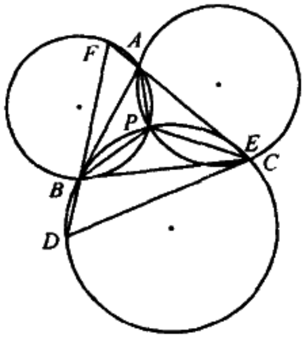



图 28.30

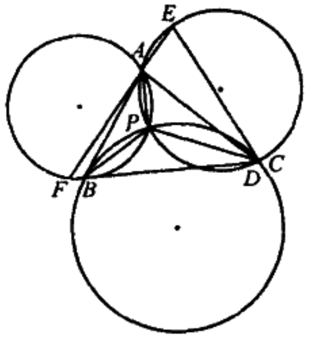



图 28.31

**定理 4**　$\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的外接正三角形，若 $\angle A > 120^\circ$，$\angle B \geqslant \angle C$，则费马点 $P$ 在形外，$\triangle DEF$ 的一个顶点与 $C$ 重合时基面积最小，其边长 $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}BC\sin(60^\circ + C)$.



**证明**　当 $\angle A > 120^\circ$ 时，费马点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 外部. 为了研究方便，我们不妨设 $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C$. 过点 $P$ 分别作 $DE$、$EF$、$DF$ 的垂线，垂足分别是 $C_1$、$A_1$、$B_1$（图 28.32）. 由正三角形的性质可知，$PB_1 + PC_1 - PA_1 = h$（$h$ 为正 $\triangle DEF$ 的高），则 $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$. 因此，$h$ 为最小时，$\triangle DEF$ 的边长为最小.

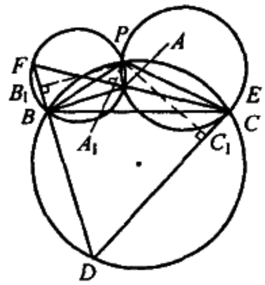



图 28.32

记 $\angle PBD = \alpha$，则 $PA_1 = PA\sin\alpha$，$PB_1 = PB\sin\alpha$，$PC_1 = PC\sin\alpha$，因此

$$PB_1 + PC_1 - PA_1 = (PB + PC - PA)\sin\alpha$$

要使 $PB_1 + PC_1 - PA_1$ 最小，只要使 $\sin\alpha$ 最小即可. 现在我们首先研究 $\alpha$ 的范围.

$$\alpha = \angle PCE = 180^\circ - \angle E - \angle CAE - \angle PCA = 120^\circ - \angle PCA - \angle CAE \quad ⑤$$

$$\alpha = \angle PBA + \angle ABD = 60^\circ + \angle PBA + \angle FAB \quad ⑥$$

由等式⑤知 $C$ 与 $E$ 重合时，$\angle CAE = 0^\circ$，此时 $\alpha$ 最大，$\alpha = 120^\circ - \angle PCA$（图 28.33）；由等式⑥，知 $B$ 与 $F$ 重合时，$\angle FAB = 0^\circ$，此时 $\alpha$ 最小，$\alpha = 60^\circ + \angle PBA$（图 28.34）. 因此 $60^\circ + \angle PBA \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ - \angle PCA$.

由 $y = \sin x$ 在 $(0,\pi)$ 的性质可知，只要比较两种极限状态时的边长的大小

即可.由图 28.33 可得

$$DE=\frac{BC\sin(60^\circ+\angle ACB)}{\sin 60^\circ}$$

由图 28.34 可得 $$DE=DF=\frac{BC\sin(60^\circ+\angle ABC)}{\sin 60^\circ}$$

现在只要比较 $\sin(60^\circ+\angle ACB)$ 与 $\sin(60^\circ+\angle ABC)$ 的大小即可.因为

$$\sin(60^\circ+\angle ACB)-\sin(60^\circ+\angle ABC)=2\cos(60^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ABC)\sin(\frac{1}{2}\angle ACB-\frac{1}{2}\angle ABC)$$

而 $$60^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ABC=60^\circ+90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC=150^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$$

且 $$\angle BAC>120^\circ$$

因此 $$60^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ABC<90^\circ$$



因此 $$\cos(60^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ABC)>0$$

又 $$\sin(\frac{1}{2}\angle ACB-\frac{1}{2}\angle ABC)\leqslant 0$$

因此 $$\sin(60^\circ+\angle ACB)<\sin(60^\circ+\angle ABC)$$

因此图 28.33 中的外接正三角形的边长比图 28.34 中的边长要小.

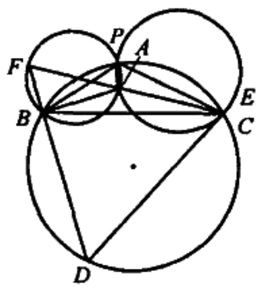



图 28.33

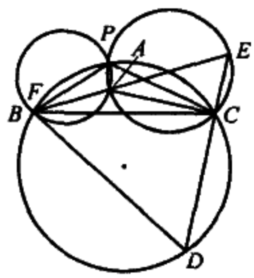



图 28.34